数理解析研究所講究録
657巻 1988年 61-65

Algebraic independence of values of gap series

奈良女子大 理 西岡久美子(Kumiko Nishioka)

代数的数を係数に持つ巾級数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$ $(0 \le e_0 < e_1 < \dots, a_k \ne 0)$ の代数的数における値の代数的独立性について考える。

$S_k = [\mathbb{Q}(a_0, a_1, \dots, a_k) : \mathbb{Q}]$

$A_k = \max\{1, \boxed{a_0}, \dots, \boxed{a_k}\}$

$M_k = \min\{d \in \mathbb{N} \mid da_0, \dots, da_k$ は代数的整数$\}$

とおく。ここで代数的数αに対し $\boxed{\alpha}$ とはαのすべての共役の絶対値の最大値である。以下では

$$(*) \qquad \lim_{k \to \infty} S_k(e_k + \log A_k M_k)/e_{k+1} = 0$$

と仮定する。$f(z)$ の収束半径を $R > 0$ とする。$f(z)$ の代数的数における値の超越性、代数的独立性に関していくつかの結果が得られている。Cijsouw and Tijdeman(1973) は代数的数α $(0 < |\alpha| < R)$ に対し $f(\alpha)$ は超越数であることを示した。Bundschuh and Wylegala(1980) は代数的数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $(0 < |\alpha_i| < R)$ の絶対値が相異なれば $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的独立であることを証明した。後者の証明は

$$f(\alpha_i) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^{e_k} \sim a_m \alpha_i^{e_m} \quad (m \to \infty)$$

となることから、$f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ の収束の速さが相異なることに基づいている。この方法ではα_i達の絶対値が等しい場合を扱うことができない。私は最近証明された Evertse(1984) の定理を使って a_k $(k = 0, 1,$

...）がすべて１つの代数体 K に含まれているときに、これら $f(\alpha_i)$ 達の代数的独立性のための必要十分条件をみつけることができた([10])。

［定理１］K を代数体とする。$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}$ $(0 \le e_0 < e_1 < \ldots,\ a_k \in K^*)$ は (*) をみたし、その収束半径は $R\ (>0)$ であるとする。代数的数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(0 < |\alpha_i| < R)$ に対し、次の３つの性質は同値である。

(i) $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ は代数的従属である。

(ii) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ の空でない部分集合 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ と代数的数 γ、１の巾根 $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_s}$、0 でない代数的数 $d_1, \ldots, d_s$ があって

$$\alpha_{i_j} = \zeta_{i_j}\gamma,\quad \sum_{j=1}^{s} d_j \zeta_{i_j}^{e_k} = 0$$

が十分大きなすべての自然数 k について成り立つ。

(iii) $1, f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上１次従属である。

例１ $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$ とする。代数的数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (0 < |\alpha_i| < 1)$ に対して、$f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ が代数的独立であるための必要十分条件は任意の α_i/α_j $(i \ne j)$ が１の巾根でないことである。

例２ $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!+k}$ とする。代数的数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(0 < |\alpha_i| < 1)$ が相異なれば $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ は代数的独立である。

次に我々は巾級数 $f_w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [kw] z^k$ (w は実無理数) の特殊値の代数的独立性について考える。Mahler(1929) は w が２次無理数の時、代数

的数α(0 < $|\alpha|$ < R) に対し $f_w(\alpha)$ は超越数であることを示した。
Loxton and van der Poorten(1977) は Mahler の方法を一般化して、w が任意の無理数の時、代数的数α(0 < $|\alpha|$ < R) に対し $f_w(\alpha)$ は超越数であることを示した。w の連分数展開を $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ とする。代数的独立性については Masser(1982) が $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ が有界の時、代数的数$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (0 < $|\alpha_i|$ < 1) が相異なれば $f_w(\alpha_1), \ldots, f_w(\alpha_n)$ は代数的独立であることを証明無しで報告している。しかし残念ながら証明はまだ公表されていない。我々は $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ が有界でない場合を考える。Evertse(1984) の定理を使って次の定理を得ることができた([11])。

[定理2] w の連分数展開を $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ とし、単調増加自然数列 $\{k_r\}_{r=0,1,\ldots}$ と自然数 m で

$$\lim_{r\to\infty} a_{k_r} = \lim_{r\to\infty} a_{k_r-m} = \infty$$

をみたすものが存在すると仮定する。このとき、代数的数$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (0 < $|\alpha_i|$ < 1) が相異なれば $f_w(\alpha_1), \ldots, f_w(\alpha_n)$ は代数的独立である。

例３ $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ なら w は定理２の条件をみたす。
例４ $e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots]$ だから e は定理の条件をみたす。
$\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ が有界でないという条件だけの下に、代数的独立性の必要十分条件を求めることはまだできていない。しかし次の定理が証明される([11])。

[定理３] w の連分数展開を $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ とし、$\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ が有界でないとする。代数的数$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (0 < $|\alpha_i|$ < 1)に対して、任意

の α_i/α_j $(i\neq j)$ が1の巾根でないなら、$f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ は代数的独立である。

参考文献

[1] P. Bundschuh: A criterion for algebraic independence with some applications. to appear.

[2] P. Bundschuh and F.-J. Wylegala: Uber algebraische Unabhangigkeit bei gewissen nichtfortsetzbaren Potenzreihen. Arch. Math. 34(1980) 32-36.

[3] P.L. Cijsouw and R. Tijdeman: On the transcendence of certain power series of algebraic numbers. Acta Arith. 23(1973) 301-305.

[4] J.-H. Evertse: On sums of S-units and linear recurrences. Compositio Math. 53(1984) 225-244.

[5] Y. Flicker: Algebraic independence by a method of Mahler. J. Austral. Soc.(Ser. A)27(1979) 173-188.

[6] J.H. Loxton and A.J. van der Poorten: Arithmetic properties of certain functions in several variables Ⅲ. Bull. Austral. Math. Soc. 16(1977) 15-47.

[7] K. Mahler: Arithmetische eigenschaften der Losungen Einer klasse von functionalgleichungen. Math. Ann. 101(1929) 342-366.

[8] D.W. Masser: A vanishing theorem for power series. Inven. math. 67(1982) 275-296.

[9] K. Nishioka: Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series. Proc. Japan. Acad. Ser. A 62(1986) 219-222.

[10] K. Nishioka: Conditions for algebraic independence of certain power series of algebraic numbers. Compositio math. 62(1987) 53-61.

[11] K. Nishioka: Evertse theorem in algebraic independence. to appear.