数理解析研究所講究録
658巻 1988年 56-62

Jacobi和のuniversal power seriesとVandiver予想

東大理　市村文男 (Humio Ichimura)
東大理　金子昌信 (Masanobu Kaneko)

<u>序.</u> ℓを素数とし，自然数$n \geqq 1$に対しJ_nをFermat曲線$X^{\ell^n}+Y^{\ell^n}=Z^{\ell^n}$のJacobi多様体，$T_\ell(J_n)$をそのTate加群とする。Ihara[Ih]の中で次のことが示されている。

定理(Ihara)　$\varprojlim_n T_\ell(J_n)$は階数1の自由$\mathbb{Z}_\ell[[u,v]]$加群.

ここで，$\mathbb{Z}_\ell[[u,v]]$加群の構造は，まず1のℓ巾根のシステム$(\zeta_n)_{n\geqq 1}$ (ζ_nは1の原始ℓ^n乗根，$\zeta_{n+1}^{\ell}=\zeta_n$)を固定し$(X,Y,Z)\longmapsto(\zeta_n X, Y, Z)$，$(X,Y,Z)\longmapsto(X,\zeta_n Y,Z)$より誘導される作用をそれぞれ$1+u$倍，$1+v$倍として入れる。

$\varprojlim_n T_\ell(J_n)$にはガロア群が作用するのでこの定理より

特に準同型

$$F:\ Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})) \ni \rho \longmapsto F_\rho(u,v) \in \mathbb{Z}_\ell[[u,v]]^\times$$

を得る。($\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})$ は有理数体に1の ℓ 巾根すべてを添加した体)
この $F_\rho(u,v)$ が Jacobi 和の universal power series, 或いは ℓ-adic beta series と呼ばれるものである。その諸性質については [Ih] 以後, Anderson [A], Coleman [C], Ihara-Kaneko-Yukinari [IKY] といった研究があり, 特に準同型 F の kernel の体はわかっている。(なおこの体については Ichimura-Sakaguchi [IS] も参照。)

以下では F の image についての結果を与える。詳しいことは [IK] として発表予定。

<u>結果.</u> 以下専ら ℓ は奇素数と仮定する。又, 同型 $\mathbb{Z}_\ell[[u,v]] \simeq \mathbb{Z}_\ell[[u,v,w]]/\{(1+u)(1+v)(1+w)-1\}$ によって $\mathbb{Z}_\ell[[u,v]]$ の元 $F(u,v)$ を適宜 mod $\{(1+u)(1+v)(1+w)-1\}$ の代表元 $F(u,v,w)$ と見做す。

さて, [IKY], [C] によって $F=F_\rho$ ($\rho\in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))$) は次の諸性質を満たすことがわかる。

(i) $F \equiv 1 \mod uvw$

(ii) $F\overline{F} = 1$, $\overline{F} = F((1+u)^{-1}-1, (1+v)^{-1}-1)$.

(iii) $F(u,v,w)$ は u, v, w について対称 ($\mathfrak{S}_3$-symmetric)

(iv) $F(u,v)F(u',v') \in \mathbb{Z}_\ell[[u,v,u',v']]/\{(1+u)(1+v)(1+u')(1+v')-1\}$

は u, v, u', v' について対称 ($\mathfrak{S}_4$-symmetric)

(v) $\prod_{\zeta^\ell=1} F(\zeta(1+u)-1, \zeta(1+v)-1) = F((1+u)^\ell-1, (1+v)^\ell-1)$

そこで,

$\mathcal{F} = \{ F \in \mathbb{Z}_\ell[[u,v]]^\times \mid$ 上の (i)〜(v) を満たす$\}$

$\widetilde{\mathcal{F}} = \{ \widetilde{F} \in \mathbb{F}_\ell[[u,v]]^\times \mid$ 上の (i)〜(iv) と同様の条件を満たす$\}$

と定義する。(v) の条件は $\mathrm{mod}\ \ell$ ($\mathrm{mod}\ (\zeta-1)$) で trivial となることに注意しておく。

定理1　次の3条件は同値である.

1. ℓ での Vandiver 予想が正しい。即ち $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{\ell})$ の類数が ℓ で割れない。
2. $\mathrm{Im}\,\mathbf{F} = \mathcal{F}$. ($\mathrm{Im}\,\mathbf{F} = \{ F_\rho \mid \rho \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))\}$)
3. $\mathrm{Im}\,\mathbf{F} \mod \ell = \widetilde{\mathcal{F}}$

注1)　ℓ が正則素数 (ℓ が $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ の類数を割らない) なら 1. は成り立っている。従ってこのとき $\mathbf{F}$ の image が決

定まれる。又 $\ell < 125000$ なら Vandiver 予想は成り立つことが知られている。(Wagstaff [W])

注2) Iwasawa [Iw] において，exponent ℓ の Jacobi 和が $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_1)^\times$ の中で生成する閉部分群がある群と一致することと Vandiver 予想との同値性が与えられている。上の結果はある意味でこれの "universal version" と思えるが，explicit な関係はまだついていない。

次に Vandiver 予想を仮定せずに $\mathcal{F}/\mathrm{Im}\,\mathbf{F}$ ("Vandiver gap") の記述をする。

A_n ; $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ のイデアル類群の ℓ-Sylow 部分群

$A_\infty = \varinjlim_n A_n$, A_∞^+ ; その "plus part" とする。

作用等，省略するが，$\mathcal{F}/\mathrm{Im}\,\mathbf{F}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ には自然に $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\mathbb{Z}_\ell]] \simeq \mathbb{Z}_\ell[[t]]$ - module の構造が入り，さらに，共に Λ 上有限生成，torsion となっている。従っていわゆる characteristic power series が定まる。我々は作用をひねった $(\mathcal{F}/\mathrm{Im}\,\mathbf{F})(-1)$ (Tate twist) を考える。これも有限生成 torsion Λ-module である。

定理2. $(\mathcal{F}/\mathrm{Im}\,\mathbf{F})(-1)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(A_\infty^+, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ は同じ characteristic power series を持つ。

"Gamma" series, Coleman の定理.

Jacobi 和が Gauss 和の積に分解し, Beta 関数が Gamma 関数の積で書けるように $F_\rho(u,v)$ も次のような分解をもつ。([IKY])

$$F_\rho(u,v) = \hat{G}_\rho(u)\hat{G}_\rho(v)\hat{G}_\rho(w) \quad (\rho \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})))$$

$$((1+u)(1+v)(1+w)=1.)$$

$\hat{G}_\rho(u) \in \hat{\mathbb{Z}}_\ell^{ur}[[u]]$, $\hat{\mathbb{Z}}_\ell^{ur}$ は $\mathbb{Q}_\ell$ の最大不分岐拡大の完備化の整数環

$$\lambda\hat{G}_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \log \hat{G}_\rho(u) - \frac{1}{\ell}\log \hat{G}_\rho^{\varphi}((1+u)^\ell - 1) \quad (\varphi : \text{Frobenius})$$

とすると $\lambda\hat{G}_\rho \in \mathbb{Z}_\ell[[u]]$ であってさらに

$$\mathcal{V}^- = \left\{ g \in \mathbb{Z}_\ell[[u]] \;\middle|\; \sum_{\zeta^\ell=1} g(\zeta(1+u)-1) = 0,\ g((1+u)^{-1}-1) = -g \right\}$$

に入る。([C], [IKY]) 我々の定理1のもととなるのが

定理 (Coleman [C]). 次の2条件は同値

1. ℓ での Vandiver 予想が正しい。

2. $\{\lambda \widehat{G}_\rho \mid \rho \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))\} = \mathcal{V}^-$

この定理の"modulo ℓ version"を与えることができる.

まず, $\mathcal{V}^-$ mod ℓ は微分作用素 $D = (1+u)\frac{d}{du}$ をつかって次のように記述される。

命題 $\mathcal{V}^-$ mod ℓ $= \{g \in \mathbb{F}_\ell[[u]] \mid (D^{\ell-1}-1)g=0,\ g((1+u)^{-1}-1) = -g\}$

定理3. 次の2条件は同値.

1. ℓ でのVandiver予想が正しい.
2. $\{\lambda \widehat{G}_\rho \bmod \ell \mid \rho \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))\}$
$= \{g \in \mathbb{F}_\ell[[u]] \mid (D^{\ell-1}-1)g=0,\ g((1+u)^{-1}-1) = -g\}$

注) この定理は, $F_\rho(u, v)$ を v について展開したときの v の係数 $h_\rho(u)$ の reduction mod ℓ に対する命題として定式化することもできる。

文献

[A] G. W. Anderson : The hyperadelic gamma function: a précis, Adv. Studies in Pure Math. vol 12 (1987) 1-19.

[C] R. Coleman : Anderson-Ihara theory ; Gauss sums and circular units, to appear in Adv. Studies in Pure Math.

[IK] H. Ichimura and M. Kaneko : On the universal power series for Jacobi sums and the Vandiver conjecture, to appear

[IS] H. Ichimura and K. Sakaguchi : The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after Soulé), and some related topics, Adv. Studies in Pure Math. vol 12 (1987) 53-64.

[Ih] Y. Ihara : Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Math., 123, (1986) 43-106

[IKY] Y. Ihara, M. Kaneko and A. Yukinari : On some properties of the universal power series for Jacobi sums, Adv. Studies in Pure Math., vol. 12, (1987), 65-86

[Iw] K. Iwasawa : A note on Jacobi sums, Symposia Math., 15 (1975), 447-459

[W] S. Wagstaff : The irregular primes to 125,000, Math. Comp., 32 (1978) 583-591