数理解析研究所講究録
658巻 1988年 34-42

非Galois拡大体の岩澤理論

東大教養学部　片岡 俊孝
(Toshitaka Kataoka)

0.

この小論では、岩澤理論の代数的部分[1]、すなわち有限次代数体上の$\mathbb{Z}_p$-拡大での中間体の p-class group (=イデアル類群の Sylow p-subgroup) の振舞の記述・分析で p進L-函数[2]と独立な部分を、基礎体上必しもGaloisではないが中間体の様子が$\mathbb{Z}_p$-拡大と同一である無限次拡大に、ゆるやかな制限の下で、拡張する。

このような拡大が特にCM体からなる場合には、CM体の$\mathbb{Z}_p$-拡大と同様のことが成立する。一般の場合は記述に準備を要するので、弱い形で結果を述べる。

以上の結果は、関連する岩澤加群(=必しも有限次ではない代数体上の最大不分岐アーベルp-拡大のGalois群)の分析、ある種の非可換2次元p-adic Lie群Gの$\mathbb{Z}_p$

1) cf. Iwasawa [2]
2) cf. Iwasawa [1]

上の群環 $\mathbb{Z}_p[[G]]$ 上有限生成加群の考察等を基礎にしているが、その点にはふれない。

また、CM体の場合の p 進 L-函数との結びつきは不明である。

1.

p で素数、k で体をあらわす。まず我々の考察対象とする拡大体を定義する。

(1.1) K/k が twisted $\mathbb{Z}_p$-拡大

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

k 上の Galois 拡大 L で、次の①、②をみたすものが存在する。

① KL/L は $\mathbb{Z}_p$-拡大。

② $L \cap K = k$.

(1.2) (1.1) の拡大 K/k は、次のようにあらわされる。

(α) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、$[k_n : k] = p^n$ となる K/k の中間体 k_n が一意的に存在する。

(β) $k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots$

(8) $\bigcup_n k_n = K$.

(1.3) 以下、次のように仮定あるいは定義する。

p : odd.

k : 有限次代数体.

Twisted $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k に対し、①, ② をみたす k の Galois 拡大 L の中で最小のものが存在する。 L はつねにそのようなものをあらわすとする。

$G = \mathrm{Gal}(KL/k)$.

$N = \mathrm{Gal}(KL/L)$.

$H = \mathrm{Gal}(KL/K)$.

$$\eta : \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(KL/k) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}_{cont}(N) = \mathbb{Z}_p^{\times}. \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & (y \mapsto x^{-1} y x) \end{array}$$

L_0 : L/k の部分体で、$[L_0 : k]$ が p と素になる最大のもの。

$m_0 = [L_0 : k]$。 m_0 は $p-1$ の約数。

(1.4) 次の集合間に bijection がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Twisted } \mathbb{Z}_p\text{-拡大 } K/k \text{ の} \\ k \text{ 上の isomorphism class} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} H^1(k, M) \text{ の直和因子で} \\ \mathbb{Z}_p \text{ と同型なもの} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ K & \longleftrightarrow & W = \mathrm{Ker}(H^1(k, M) \to H^1(K, M)). \end{array}$$

ただし、Mは、rank 1 の free $\mathbb{Z}_p$-加群で、$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の作用を η を経由して入れたもの。

2.

代数体 k に対して、

C_k = (compact) p-class group.

($\simeq \mathrm{Gal}(k^{nr}/k)$, k^{nr} は最大不分岐アーベル p-拡大/k).

(2.1) 以下 K/k は、Twisted $\mathbb{Z}_p$-拡大であるとし、分岐に関する次の2条件が満たされていると仮定する。

(2.1.1) K/k で分岐する k の素点は有限個。

(2.1.2) L/L_0 で分岐する p 上の素点は、KL/L でも分岐する。

L/k が有限次のときは、(2.1.1), (2.1.2) はつねに満たされる。

有限アーベル群の列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ に対し、

$$A_n \approx B_n$$

で、$\{\# \mathrm{Ker} f_n\}$, $\{\# \mathrm{Coker} f_n\}$ がともに bounded となる homomorphism の列 $\{f_n ; A_n \to B_n\}$ が存在することをあらわす。

(2,2) 仮定 (2.1) の下で，次が成立する。

(a) $\dim_{\mathbb{Q}_p} C_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p < +\infty$ のとき，

$$C_{k_n} \approx \frac{(p^n-1)}{m_0} \cdot A \oplus n \cdot (\# \operatorname{Coker} \eta) B \oplus C/p^n C .$$

(b) $\dim_{\mathbb{Q}_p} C_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = +\infty$ のとき，

$$C_{k_n} \approx \frac{(p^n-1)}{m_0} A \oplus n (\# \operatorname{Coker} \eta) B \oplus C_n ,$$

$$C_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^s \approx n (\# \operatorname{Coker} \eta) \cdot C/p^s C \quad , s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} .$$

ここに，A, B, C は有限生成 $\mathbb{Z}_p$-加群で，A, B は torsion，C は torsion-free であるものをあらわす。

L/k が有限次のときは，(a) がつねに成立し，$B=0$ である。L/k が無限次で (b) をみたすものが存在する。L/k が無限次のときは，(a), (b) のどちらが成立するかを一般的に決めるのは困難であると思われるが，次のような特殊な場合には，(a) が成立する。

(2,3) (2,1) を仮定し，L/k が無限次であるとする。k' で k と異なり，L_0 をふくむ L の有限次の部分体をあらわす。このとき，k' の twisted $\mathbb{Z}_p$-拡大 K' で次の 2 条件をみたすものが存在する。

(2,3,1) $K'L = KL$.

(2,3,2) K'は、k上のtwisted $\mathbb{Z}_p$-拡大とk'との合成体ではない。

このとき、K'/k'に対しては、(2,2)の(a)が成立する。すなわち $\dim_{\mathbb{Q}_p} C_{K'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p < +\infty$. さらに、整数 $\lambda, \mu \geq 0, \nu$ が存在して、

$$\# C_{k'_n} = p^{e_n}, \quad e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

が、十分大きなすべての整数 n に対して成立する。

ただし、k'_n は $[k'_n : k'] = p^n$ となる K'/k'の中間体。

(2,3)のようなK'/k'として例えば次のようなものがある。

$$k' = k(\zeta), \quad K = \bigcup_n k'_n, \quad k'_n = k'(\sqrt[p^n]{\zeta\alpha}).$$

ここで、ζは1のp乗根でkにふくまれないもの、αは $k^\times \setminus (k^\times)^p \mu_{p^\infty}$ の元。$\zeta\alpha$のp^n乗根 $\sqrt[p^n]{\zeta\alpha}$ は、$(\sqrt[p^{i+1}]{\zeta\alpha})^p = \sqrt[p^i]{\zeta\alpha}$, $i>0$, をみたすように定める。

3.

この§では、K/kをCM体のTwisted $\mathbb{Z}_p$-拡大とする。

(3,1) 上の仮定の下で、KL, L はともにCM体である。

(3,2) さらに以下を仮定する。

(3,2,1) $KL(\mu_p) \supset k(\mu_{p^\infty})$.

(3,2,2) k/k^+ で分解する k の素点について条件 (2,1) が成立。

(3,2,3) C_L^- $(= Ker(C_L \to C_{L^+}))$ は有限生成。

(3,3) 次のように F, F' を定める。

(3,3,1) $F: \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$F(x) = \max\{1, x-t+1\} \cdot \# \operatorname{Coker} \eta_x$$

ただし、

$t = \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} ; 1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p \subset Im\,\eta\}$, $Im\,\eta$ が有限のときは、$t = \infty$。

$$\eta_x : H \xrightarrow[\eta]{} \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^{x+1})^\times.$$

(3,3,2)

$$F'(x) = \begin{cases} F(x) & \text{if} \quad x \leq t, \\ F(x)-1 & \text{if} \quad x > t. \end{cases}$$

(3,4) $\lambda = \dim_{\mathbb{Q}_p} C_K^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおく。次のような条件をみたす $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、(3,4,1),(3,4,2) が成立する。

"L/L^+ で分解し、KL/L で分岐する素点は、$KL/k_n L$ で完全分岐する。"

(3,4,1)　もし $\mathrm{ord}_p \# C^-_{k_{n+1}/k_n} < F'(n)$ が成立すれば、次の (1)〜(3) が成立する。

(1)　$\lambda = \mathrm{ord}_p \# C^-_{k_{n+1}/k_n}$ 。

(2)　任意の $m \geqq n$ に対し、$\mathrm{ord}_p \# C^-_{k_m/k_n} = \lambda(m-n)$ が成立する。

(3)　$C^-_{K,i} = \mathrm{Ker}\,(C^-_K \longrightarrow C^-_{k_i})$, $i \geqq 0$ とおく。任意の自然数 $m \geqq n$ に対して、

$$p\, C^-_{K,m} = C^-_{K,m+1}$$

が成立する。

(3,4,2)　もし $\mathrm{ord}_p\, C^-_{k_{n+1}/k_n} \geqq F'(n)$ なら

$$\lambda \geqq F'(n)$$

である。

関数 F' は F 以上に良くすることはできない。また、F' を F におきかえて成立する場合があるが、一般的にそうできるかどうかは不明である。

$C^-_{k_m/k_n} = \mathrm{Ker}\,(C^-_{k_m} \rightarrow C^-_{k_n})$ である。

証明には、木田の公式（Kida [3]）を用いた。

文献

[1] Iwasawa, K., Lectures on p-adic L-functions, Ann. of Math. Studies No. 74

[2] Iwasawa, K., On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math., 98, 246-326, 1973

[3] Kida, Y., ℓ-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants, J. Number theory, 12, 519-528, 1980