数理解析研究所講究録
659巻 1988年 53-59

写像のLerayスペクトル列とfiber shape

筑波大・数 矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

§1 decompositions of manifolds and sheaves

manifold Mのdecomposition Gを考えるさい, Gの元gのshape typeやGのregularity 特にhomotopical local trivialityの情報からさらにM, G, decomposition space M/G, projection $\pi: M \to M/G$などについて情報を得ようとするとき, 代数的な道具としてπの(Čech cohomology) Leray sheaf $\mathcal{L}(\pi)$やLeray spectral sequence $E(\pi): H^p(M/G, \mathcal{L}^q(\pi : \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(M : \mathcal{A})$を用いることができる。Bredonの"Sheaf Theory"[1]の中でもM/Gのcohomological dimension, local connectedness, さらにM/Gがどの様な条件の下でhomology manifoldになるかといったことについて主に代数的な観点から調べている。一方decomposition theoryでは, きわめて幾何的な議論が中心になるわけであるが, Daverman, Dydak, Walsh et alはこの方向から再びsheafを考察している。今回の講演ではhomology n manifold Xのlocal orientability (i.e. n-th homology sheaf $\mathcal{H}_n(X)$がlocally constant）の Dydak - Walsh による elementary proof [2] を紹介した，この証明は次の2つの議論に要約された：

(1) 一般に，X が完備距離空間，X 上の presheaf S は locally finitely generated，induced sheaf $\mathcal{S}$ の各 stalk $\mathcal{S}_x$ も finitely generated で $\mathcal{S}_x \cong \mathcal{S}_y$ $(x, y \in X)$ ならば dense open set 上で $\mathcal{S}$ は locally constant である。

(2) $\mathcal{H}_n(X)$ は (1) より dense open set U 上で locally constant になる。U を極大にとっておき，$X \setminus U \neq \phi$ とすると再び (1) より $X \setminus U$ の dense open set V 上で $\mathcal{H}_n$ は locally constant になる。いま A を，1つの end は V に，残りの部分は U に含まれる arc とすると $\mathcal{H}_n|A$ が constant になることが示され，$A \subset U$ となって矛盾を得る．

[2] では，finitely generated local homology をもつ homogeneous ENR が homology manifold になるという事実の elementary proof も与えている。

筆者も decomposition への興味から Leray sheaf と fiber shape の関係を調べたことがあり（[3]），この論説では次の2つの事柄について説明する．§2 Leray spectral sequence の tautness　§3 Leray spectral sequence の fiber shape invariance

§2　Tautness of Leray spectral sequences of maps

Čech type の invariant は continuity によって特徴付られる。[1] では (Čech) sheaf cohomology の tautness (paracompact support) や continuity (locally compact, compact support) が示されているが，では (Čech) Leray sheaf や，Leray spectral sequence は map に対して tautness を持つであろうか？ 次の設定を考える： $f : X \to Y$: map, $X_0 \subset X$: closed. Λ : a directed set $X_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$; $X_\lambda \supset X_\mu \supset X_0$ $(\lambda \leq \mu)$, $Y_0 \subset Y$: closed $Y_\lambda \subset Y$ $(\lambda \in \Lambda)$; $Y_\lambda \supset Y_\mu \supset Y_0$ $(\lambda \leq \mu)$ $f(X_\lambda) \subset Y_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda$ or $\lambda = 0)$ $f_\lambda = f|X_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\mathcal{A}$: a sheaf over X, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|X_\lambda$ Φ, Ψ : paracompactifying families of supports on Y, X resp. $\Phi_\lambda = \Phi \cap Y_\lambda$, $\Psi_\lambda = \Psi \cap X_\lambda$. cofinality："$X$ の任意の近傍がある X_λ を含む，$\{Y_\lambda\}$ についても同様" とする。このとき次の diagram を得る。

$$(*) \quad \begin{array}{c} \{\mathcal{L}^q_{\Psi_\lambda}(f_\lambda ; \mathcal{A}_\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}^q_{\Psi_\mu}(f_\mu ; \mathcal{A}_\mu)\}_{\lambda \leq \mu} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathcal{L}^q_{\Psi_0}(f_0, \mathcal{A}_0) \end{array}, \qquad (**) \quad \begin{array}{c} \{E(f_\lambda) \longrightarrow E(f_\mu)\}_{\lambda \leq \mu} \\ \searrow \quad \swarrow \\ E(f_0) \end{array}$$

<u>Thm</u>. (*), (**) は共に direct limit である，すなわち $\mathcal{L}$, E は tautness を満たす。

但し，ここで direct limit の意味は：

(*) 各 $y \in Y_0$ に対して y 上の stalks の diagram $\begin{array}{c} \{\mathcal{L}(f_\lambda)_y \to \mathcal{L}(f_\mu)_y\} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathcal{L}(f_0)_y \end{array}$ が direct limit。

(**) 各 r, p, q に対して diagram

$$\left\{\begin{tikzcd}[column sep=small] E_r^{p,q}(\mathfrak{f}_\lambda) \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_r^{p,q}(\mathfrak{f}_\mu) \arrow[dl] \\ & E_r^{p,q}(\mathfrak{f}_0) & \end{tikzcd}\right\}$$ が direct limit. formal には，

R-module の direct system の category dir-R-mod に terms $\underline{E}_r^{p,q}(\underline{\mathfrak{f}}) = \{E_r^{p,q}(\mathfrak{f}_\lambda)\}$ をもつ spectral sequence $\underline{E}(\underline{\mathfrak{f}})$ を考えたとき，morphism $\underline{E}(\underline{\mathfrak{f}}) \to E(\mathfrak{f}_0)$ が degree wise に direct limit ということである。

(*)は Leray sheaf の定義より容易に示される。一方(**)については，homology が direct limit を保つことに注意して E_2-term について次を示せばよい：

<u>claim</u> diagram $$\left\{\begin{tikzcd}[column sep=small] H^p_{\Phi_\lambda}(Y_\lambda, \mathcal{L}^q_{\psi_\lambda}(\mathfrak{f}_\lambda, \mathfrak{s}_\lambda)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^p_{\Phi_\mu}(Y_\mu, \mathcal{L}^q_{\psi_\mu}(\mathfrak{f}_\mu, \mathfrak{s}_\mu)) \arrow[dl] \\ & H^p_{\Phi_0}(Y_0, \mathcal{L}^q_{\psi_0}(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{s}_0)) & \end{tikzcd}\right\}_{\lambda \leq \mu}$$

は direct limit.

(*)より $\{\mathcal{L}^q(\mathfrak{f}_\lambda)\} \to \mathcal{L}^q(\mathfrak{f}_0)$ は direct limit であり，compact supports case は [1] ch II §14 より示う。一般の case は次の事柄に注意する：

<u>Lemma</u> index set Λ は次の意味で "locally finite directedness" を満たす：Y の open set U に対して $\lambda \leq_U \mu \Leftrightarrow \mathfrak{f}^{-1}(U) \cap X_\lambda \supset \mathfrak{f}^{-1}(U) \cap X_\mu$ と定義する。もし $\{U_\alpha\}_\alpha$ が locally finite open family of Y であれば indices $\{\lambda_\alpha\}_\alpha \subset \Lambda$ に対して $\lambda \in \Lambda$ で $\lambda_\alpha \leq_{U_\alpha} \lambda$ となるものがとれる。

これより "compact, finite indices" を "paracompact, locally finite indices" におきかえて，local sections をつなぎ合わせることができる．したがって $\mathcal{L}(f_\lambda)$'s の flabby resolutions の direct limit が $\mathcal{L}(f_0)$ の flabby resolution となり，これらも locally finite directedness を満たすので，sections Γ をとっても direct limit が保たれ claim を得る。

§3 fiber shape invariance of Leray spectral sequences

fiber shape theory は fiber homotopy theory の Čech extension として定義される。以下，空間は metrizable とする．B を base space とし，$\mathcal{FH}_B$ を fiber homotopy category over B，$\mathcal{FA}_B$ を ANFR over B からなる subcategory とする。ここで map $p: E\to B$ が ANFR (又は local soft map) とは diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

，$A\subset X$：closed が与えられたとき，A の近傍 U と map $U\to E$ で次を可換にするものが存在する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "f|_U"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

（すなわち，partial lift が近傍に拡張する。）たとえば，ANR fiber の bundle map は ANFR であり，ANR の間の proper map に対しては，ANFR は Hurewicz fibration と一致する。さて pro $\mathcal{FH}_B$ において各 map $f: X\to B$ に対して morphism $\phi: f\to \mathbf{p}_f\in$ pro-$\mathcal{FA}_B$ が存在して，"任意の $\psi: f\to \mathbf{q}\in$ pro $\mathcal{FA}_B$ に対して $\chi: \mathbf{p}_f\to \mathbf{q}$ で $\chi\phi=\psi$ となるものが unique

に存在する"。したがって fiber shape category $sh_B = sh(\mathcal{FH}_B, \mathcal{FA}_B)$ を得る： $\mathrm{Ob}\, sh_B = \mathrm{Ob}(\mathcal{FH}_B)$， $\mathrm{Mor}_{sh_B}(f, g) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Pro}\text{-}\mathcal{FA}_B}(\Phi_f, \Phi_g)$ である。

一般に shape invariant は homotopy invariant で continuity をもつものとして特徴付られる。Leray sheaf や Leray spectral sequence は (fiberwise) constant sheaf 係数のとき fiber homotopy invariant で §2 より tautness を満たすから，fiber shape invariant になることがわかる：

<u>Thm</u>　$\mathcal{B}$ を B 上の sheaf，ϕ を B 上の paracompactifying family of supports とするとき map $f : X \to B$ の Leray sheaf $\mathcal{L}^*(f ; f^*\mathcal{B})$，Leray spectral sequence $E_f : H^p_\phi(B ; \mathcal{L}^q(f)) \Rightarrow H^{p+q}_{f^{-1}(\phi)}(X ; f^*\mathcal{B})$ は fiber shape invariant である。

これより自動的に fiber shape morphism に対する Vietoris - Biegle type の結果が得られる。

<u>Cor</u>　$f : X \to B$, $g : Y \to B$ を closed maps，$\Phi : f \to g$ を fiber shape morphism とする。もし各 $b \in B$ に対し $\Phi^*_b : H^*(g^{-1}(b) ; \mathcal{B}_b) \to H^*(f^{-1}(b) ; \mathcal{B}_b)$ が isomorphism であれば $\Phi^* : H^*_{g^{-1}(\phi)}(Y ; g^*(\mathcal{B})) \to H^*_{f^{-1}(\phi)}(X ; f^*\mathcal{B})$ も isomorphism である.

References

[1]　G. E. Bredon, Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York

1967.

[2] J. Dydak and J. Walsh, Sheaves that are locally constant with applications to homology manifolds, Geometric Topology and Shape Theory, Lecture Notes in Math. 1283, pp. 65 ~ 87, Springer-Verlag, 1987.

[3] T. Yagasaki, Fiber shape invariance of Leray spectral sequences of maps and approximate fibrations from spheres, preprint, May 1987.