

無限次元トポロジーにおける写像空間に関する問題

筑波大・数学 酒井 克郎 (Katsuro Sakai)

与えられた空間 E をモデルとする多様体を E -多様体と呼ぶ。 E として I^n または R^n としたとき、 E -多様体は (境界を持つ、あるいは持たない) n 次元多様体である。ここでは、 E としてヒルベルト空間 l_2 、ヒルベルト立方体 $Q = \prod_{i>0} [-1/i, 1/i] \subset l_2$ 、および l_2 の部分線形空間で Q によって張られる l_2^0 、自然な正規直交基底によって張られる l_2^f 、すなわち

$$l_2^0 = \{(x_i) \in l_2 \mid \sup |i \cdot x_i| < \infty\},$$

$$l_2^f = \{(x_i) \in l_2 \mid x_i \neq 0 \text{ となる } i \text{ は有限個}\}$$

などを考える。これらの空間をモデルとした無限次元多様体については分類や特徴付けなどが知られていて、その一般的な基礎理論はほとんど完成したように思われる。しかしながら、

『自然に現れるどんな空間がこれらの無限次元多様体になるか?』

という問題は今でも非常に興味ある問題の一つである。無限次元になるものとして巾空間や写像空間がよく知られている。ここでは、写像空間に限って、今までに得られている結果や、まだ解かれていない問題について解説しよう。

考える空間はすべて可分距離空間とする。空間 X から空間 Y への連続写像全体を $C(X, Y)$ と表す。ここでは、 $C(X, Y)$ はコンパクト-開位相を持つものとする。 Y の距離を d する時、 X がコンパクトならば、 $C(X, Y)$ のコンパクト-開位相は距離

$$d(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

によって定義される。ここで扱う写像空間はすべてこの $C(X, Y)$ の部分空間であり、無限次元多様体となり得るものを考える。故に、

『 X はコンパクトで無限個の点を含み、 Y は孤立点を持たない』

と仮定する。実際、 X が有限個の点しか含まないなら、 $C(X, Y)$ は Y の有限積に同相となり、 Y が孤立点を持てば、 $C(X, Y)$ も孤立点を持つことになる。

定理 1 : Y が位相完備 ANR ならば, $C(X, Y)$ は 1_2 -多様体となる.

この定理は, 初め Eells [7] によって Y がリーマン多様体のとき証明され, 次いで X がコンパクト集合と开区間の直積に同相となる開集合を含むという条件の下で, まず Geoghegan [10] によって Y が多面体のときに, そして Toruńczyk [30] によって Y が位相完備 ANR のときに拡張された. しかしながら, [22] のように, Toruńczyk の 1_2 -多様体の特徴付け [31] を用いて X の開集合に関する条件なしに証明することが出来る. 実際, [22] では定理 1 がつぎのように拡張された.

定理 1 a: X を底とし Y をファイバーとするファイバー束 $\xi: E \rightarrow X$ の切片全体を $\Gamma(\xi)$ とする. Y が位相完備 ANR で $\Gamma(\xi) \neq \emptyset$ ならば, $\Gamma(\xi)$ は 1_2 -多様体となる.

X と Y が多面体の時, X から Y への PL 写像全体を $PL(X, Y)$ と表す. この空間については, Geoghegan [11] によって, 次が示されている.

定理 2 : X と Y が多面体のとき, $PL(X, Y)$ は 1_2^f -多様体となる.

実際, $(C(X, Y), PL(X, Y))$ は $(1_2, 1_2^f)$ -多様体対となる.

ここで, 一般に与えられた空間 E とその部分空間 F に対して, 局所的に (E, F) と同相な空間の対 (M, N) を (E, F) -多様体対と呼ぶ.

そこで, Q -多様体や 1_2^Q -多様体となる $C(X, Y)$ の部分空間は何かという問題が起こる. X から Y へのリプシッツ写像全体を $LIP(X, Y)$ と表し, また $k > 0$ に対して, リプシッツ定数が k 以下のリプシッツ写像全体を $k-LIP(X, Y)$ と表す. Y が局所コンパクトのとき, Arzela-Ascoli の定理により $k-LIP(X, Y)$ は局所コンパクトとなり, $LIP(X, Y)$ は σ -コンパクトとなり, その有力な候補である.

問題 1 : Y がどんな空間のとき, $LIP(X, Y)$ は 1_2^Q -多様体となるか?

また, $k-LIP(X, Y)$ は Q -多様体となるか?

この問題について, Sakai-Wong [24] と Sakai [23] によって, 次の結果が得られている.

定理 3 : (1) Y がノルム空間の局所コンパクト凸集合の開集合とき, 任意の $k > 0$ に対して, $k\text{-LIP}(X, Y)$ は Q -多様体となる.

(2 a) Y がノルム空間の局所コンパクト局所凸集合, あるいはリップシッツ多様体のとき, $\text{LIP}(X, Y)$ は 1_2^Q -多様体となる.

(2 b) $\dim X \neq 0$ の場合, Y がユークリッド多面体のとき, $\text{LIP}(X, Y)$ は 1_2^Q -多様体となる.

実際, (2 a, b) では, $(C(X, Y), \text{LIP}(X, Y))$ は $(1_2, 1_2^f)$ -多様体対となる.

ここで, n 次元リップシッツ多様体とは, 各点が n 次元立方体 I^n とリップシッツ同相となる近傍を持つ距離空間のことである.

定理 3 (1) は (2 a, b) の様な条件には弱められない ([24], [23] 参照). しかし, (2 b) において X の条件が必要かどうかはわからない.

問題 1 a: X が 0 次元であっても, 定理 3 (2 b) は成立するか?

また, 与えられた空間 E とその部分空間 $F \supset G$ に対して, 局所的に (E, F, G) と同相な 3 系を (E, F, G) -多様体系と呼ぶ. このとき, 定理 2 と定理 3 から次の問題を考えるのは自然である.

問題 2 : X と Y が多面体のとき, $(C(X, Y), \text{LIP}(X, Y), \text{PL}(X, Y))$ は $(1_2, 1_2^Q, 1_2^f)$ -多様体系となるか?

X と Y がリーマン多様体のとき, Geoghegan [12] と Colvin [6] によって Q -多様体となる写像空間が与えられた. すなわち, X から Y への C^1 級の写像全体を $C^1(X, Y)$ と表し,

$$D_k(X, Y) = \text{Cl}_{C(X, Y)} \{ f \in C^1(X, Y) \mid \| d_x f \| < k \}$$

とおくとき、次が [12] と [6] で示された。

定理 4 : X と Y がリーマン多様体で、 Y は境界を持たず、平坦または双曲的すなわち、正でない一定曲率を持つとき、 $D_k(X, Y)$ は Q -多様体となる。

次ぎに $X = Y$ の場合、すなわち $C(X, X)$ の部分空間について考えよう。まず、 X のレトラクション全体

$$R(X) = \{ r \in C(X, X) \mid r^2 = r \}$$

については、Chapman [5] と Sakai [21] によって次の結果が得られている。

定理 5 : X が Q -多様体のとき、 $R(X)$ は 1_2 -多様体となる。

有限次元の場合には、Basmanov-Savchenko [3] によって $R(I)$ が 1_2 に同相となることが示されたが、2次元以上のときは問題である。

問題 3 [3] : $n \geq 2$ のとき、 $R(I^n)$ は 1_2 に同相となるか？

この問題は、 $R(I^n)$ が AR となるかという問題に帰着する。

空間 X から X 自身への同相写像全体を $H(X)$ と表す。写像空間の中で、最も興味深い問題は、この同相写像の空間に関する問題であろう。

問題 4 [2] : X が多様体のとき、 $H(X)$ は 1_2 -多様体となるか？

この問題は、1次元のときは Anderson [1] によって、2次元のときは Luke-Mason [20]、Geoghegan [10] および Torunczyk [28] の結果を組み合わせることによってすでに肯定的に解決されている。実際、1, 2次元の場合には多面体に対しても成立する ([25] 参照)。また、 X が Q -多様体のときも問題とされる

が, Ferry [8] と Torunczyk [29] によって, 肯定的に解かれている.

定理 6 : X が 1, 2 次元の多面体, または Q -多様体ならば, $H(X)$ は 1_2 -多様体となる.

また, 問題 4 は次の問題に帰着することがわかっている [16].

問題 4 a : $n \geq 3$ に対して, $H_B(I^n)$ は AR となるか?

ここで,

$$H_B(I^n) = \{h \in H(I^n) \mid h|_{\text{Bd } I^n} = \text{id}\}.$$

X が多面体のとき, X 上の PL 同相写像全体を $HPL(X)$ と表す. X が PL 多様体ならば, Geoghegan [11], Edwards ([14] および Gauld [9] 参照), Haver [14], Torunczyk [28], Keesling-Wilson [18] の結果により, $HPL(X)$ は 1_{2^f} -多様体となることが知られている. 実際, X が多面体であっても成立する ([25] 参照).

定理 7 : X が多面体のとき, $HPL(X)$ は 1_{2^f} -多様体となる.

1, 2 次元の場合には, さらに次が成立する.

定理 8 : X が 1, 2 次元の多面体のとき, $(H(X), HPL(X))$ は $(1_2, 1_{2^f})$ -多様体対となる.

これは, Geoghegan-Haver [13] によって PL 多様体に対して示されたが, 多面体に対しても成立する ([25] 参照). また, 3 次元以下の PL 多様体 X に対して, $HPL(X)$ は $H(X)$ で常に稠密となるが, 一般にそうなるとは限らない. 例えば, Kirby-Siebenmann ([19] 参照) によれば, $H(S^2 \times S^3)$ は PL 同相写像を含まない連結成分を含む. よって, 定理 8 はこの場合には成立しない. しかし, PL 同相写像とアイトピックな X 上の同相写像全体を $H^*(X)$ と表せば, Geoghegan

-Haver [13] によって、次の結果が得られている。

定理 8 a: X は PL 多様体で $\dim X \neq 4, 5$ (境界を持たない場合は $\dim X \neq 4$) とする。このとき、

- (1) $HPL(X)$ は $H^*(X)$ において稠密である。
- (2) $H(X)$ が 1_2 -多様体となれば、 $(H^*(X), HPL(X))$ は $(1_2, 1_2^f)$ -多様体対となる。

X 上のリップシット同相写像全体を $HLIP(X)$ と表す。この空間については、当然次の問題が生ずる。

問題 5: X がリップシット多様体のとき、 $HLIP(X)$ は 1_2^0 -多様体となるか？
また、 $(H(X), HLIP(X))$ は $(1_2, 1_2^0)$ -多様体対となるか？

Sullivan [27] によれば、定理 8 a と同じ次元の条件の下で、リップシット多様体 X について、 $HLIP(X)$ は $H(X)$ で稠密である。Sakai-Wong [23] によって次ぎが示された。

定理 9: X が 1, 2 次元の多面体のとき、 $(H(X), HLIP(X))$ は $(1_2, 1_2^0)$ -多様体対となる。

定理 9 a: 定理 8 a の条件の下で、 $H(X)$ が 1_2 -多様体となれば、 $(H(X), HLIP(X))$ は $(1_2, 1_2^0)$ -多様体対となる。

$HLIP^*(X) = HLIP(X) \cap H^*(X)$ とおく。定理 8 と定理 9 または定理 8 a と定理 9 a より次の問題が生ずる。

問題 6: (1) X が 1, 2 次元の多面体のとき、
 $(H(X), HLIP(X), HPL(X))$
は $(1_2, 1_2^0, 1_2^f)$ -多様体系となるか？

(2) 定理 8 a の条件の下で

$$(H^*(X), HLIP^*(X), HPL(X))$$

は $(1_2, 1_2^0, 1_2^f)$ -多様体系となるか?

X が多面体のとき, $X \times Q$ は Q -多様体となる [4]. 各 n に対して, $I_n = [-1/n, 1/n]$, $Q_n = \prod_{i=1}^n I_i$ とおき, $X \times I_1 \times \cdots \times I_n$ 上の同相写像 h を $X \times Q = X \times I_1 \times \cdots \times I_n \times Q_n$ 上の同相写像 $h \times id$ と同一視することにより, $H(X \times I_1 \times \cdots \times I_n)$ を $H(X \times Q)$ の部分集合と見なし,

$$HPL(X \times Q) = \bigcup_{n \geq 0} HPL(X \times I_1 \times \cdots \times I_n)$$

と定義する. 一般に, $HPL(X \times Q)$ は $H(X \times Q)$ で稠密とはならない. 実際, X を T 字形のグラフとし, v を X の位数 3 の点, e_1, e_2, e_3 を X の端点とすると, $X \times Q$ は Q と同相となり均質であるから, 点 $(v, 0)$ を点 $(e_1, 0)$ に写す $X \times Q$ 上の同相写像 h が存在するが, 各 $X \times I_1 \times \cdots \times I_n$ 上のどんな同相写像 f 対しても

$$f(\{v\} \times I_1 \times \cdots \times I_n) = \{v\} \times I_1 \times \cdots \times I_n,$$

$$f(\{e_1, e_2, e_3\} \times I_1 \times \cdots \times I_n) = \{e_1, e_2, e_3\} \times I_1 \times \cdots \times I_n$$

であるから h の近くには $HPL(X \times Q)$ の元は存在しない. しかし, PL 多様体の場合は問題となる.

問題 7: X が PL 多様体のとき, $(H(X \times Q), HPL(X \times Q))$ は

$(1_2, 1_2^f)$ -多様体対となるか?

また, 問題 5 に関連して次の問題が生ずる.

問題 8: Q -多様体 X に対して, どんな距離について, $HLIP(X)$ は 1_2^0 -多様体となるか? またそのとき, $(H(X), HLIP(X))$ は $(1_2, 1_2^0)$ -多様体対となるか?

$H(X)$ の $C(X, X)$ での閉包を $\overline{H}(X)$ で表す. X が 1, 2 次元の多様体のとき, $\overline{H}(X)$ は monotone 写像全体と一致する ([32]). また, Siebenmann [26] と Chapman ([4] 参照) によれば, X が 6 次元以上 (境界を持たない場合は 5 次元

以上) の多様体または Q -多様体のときは, CE 写像全体と一致する. これについて, 次の問題がある.

問題 9 : X が有限次元多様体または Q -多様体のとき, $\overline{H}(X)$ は 1_2 -多様体となるか?

$X = I$ または I^2 のときは, それぞれ Geoghegan [10] と Haver [15] によって次が得られている.

定理 10 : $\overline{H}_B(I)$ および $\overline{H}_B(I^2)$ は 1_2 と同相である.

ここで,

$$\overline{H}_B(I^n) = \{h \in \overline{H}(I^n) \mid h \mid_{Bd I^n} = id\}.$$

参考文献

1. Anderson, R. D., Spaces of homeomorphisms of a finite graphs, unpublished manuscript.
2. Anderson, R. D. and Bing, R. H., A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 771-792.
3. Basmanov, V. N. and Savchenko, A. G., The space of retractions of an interval is homeomorphic to Hilbert space, in: 5th Tiraspol' Symp. on General Topology and its Applications, Shtiintsa, Kishinev, 1985, 20-21.
4. Chapman, T. A., Lectures on Hilbert cube manifolds, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.
5. Chapman, T. A., The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, Topology Proc. 2 (1977), 409-430.
6. Colvin, M. R., Hilbert cube manifold structures on function spaces - The hyperbolic case, Houston J. Math. 11 (1985), 49-64.
7. Bells, J. Jr., On geometry of function spaces, Symp. Intern. de Topologia Algebraica (Univ. Nac. Autonoma de Mexico and UNESCO, Mexico, City, 1958), 303-308.
8. Ferry, S., The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold

is an ANR, *Ann. of Math.* 106 (1977), 101-119.

9. Gauld, D. B., Local contractibility of spaces of homeomorphisms, *Compositio Math.* 32 (1976), 3-11.
10. Geoghegan, R., On the spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions - I, *Topology* 11 (1972), 159-177.
11. Geoghegan, R., On the spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions, II: The piecewise linear case, *Proc. London Math. Soc.* (3) 27 (1973), 463-483.
12. Geoghegan, R., Hilbert cube manifolds of maps, *Gen. Topology Appl.* 6 (1976), 27-35.
13. Geoghegan, R. and Haver, W. E., On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.* 55 (1976), 145-151.
14. Haver, W. E., Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40 (1973), 280-284.
15. Haver, W. E., Monotone mappings of a two-disk onto itself which fix the disk's boundary can be canonically approximated by homeomorphisms, *Pacific J. Math.* 50 (1974), 477-483.
16. Haver, W. E., A near-selection theorem, *General Topology Appl.* 9 (1978), 117-124.
17. Jakobsche, W., The space of homeomorphisms of a 2-dimensional polyhedron is an l_2 -manifold, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math.* 28 (1980), 71-75.
18. Keesling, J. and Wilson, D. C., The group of PL-homeomorphisms of a compact PL-manifold is an l_2^f -manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* 193 (1973), 249-256.
19. Kirby, R., Lectures on triangulations of manifolds, Mimeographed Notes, Univ. of California at Los Angeles, 1969.
20. Luke, R. and Mason, W. K., The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract, *Trans. Amer. Math. Soc.* 164 (1972), 275-285.
21. Sakai, K., The space of retractions of a compact Q -manifold is an l_2 -manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.* 83 (1981), 421-424.
22. Sakai, K., The space of cross-sections of a bundle, *Proc. Amer. Math. Soc.* (to appear).
23. Sakai, K., The space of Lipschitz maps from a compactum to a polyhedron, preprint.
24. Sakai, K. and Wong, R. Y., The space of Lipschitz maps from a compactum to a locally convex set, preprint.
25. Sakai, K. and Wong, R. Y., On the space of Lipschitz homeomorphisms of a compact polyhedron, preprint.
26. Siebenmann, L. C., Approximating cellular maps by homeomorphisms,

- Topology, 11 (1972), 271-294.
27. Sullivan, D., Hyperbolic geometry and homeomorphisms, in J.C. Cantrell, ed., Geometric Topology, (Academic Press, New York, 1979), 543-555.
 28. Toruńczyk, H., Absolute retracts as factors of normed linear spaces, Fund. Math. 86 (1974), 53-67.
 29. Toruńczyk, H., Homeomorphism groups of compact Hilbert cube manifolds which are manifolds, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys., 25 (1977), 401-408.
 30. Toruńczyk, H., Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2 -manifolds, Fund. Math. 101 (1978), 93-110.
 31. Toruńczyk, H., Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111 (1981), 247-262.
 32. Youngs, J.W.T., Homeomorphic approximations to monotone mappings, Duke Math. J. 15 (1948), 87-94.