

超函数のラプラス変換続論

東大理 小松 彦三郎 (Hikosaburo Komatsu)

演算子法へのラプラス変換の復権という立場で佐藤超函数のラプラス変換を論じた昨年の研究集会での話のつぎである。たたみこみ方程式の形に一般化し、その解法を論ずる。

1. 復習

演算子法の最も有効な問題は定数係数線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} P\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = f(x), & P\left(\frac{d}{dx}\right) = a_m \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0 \\ u^{(j)}(0) = g_j, & j = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

であるが、 f , u の代りに Heaviside 函数 $\theta(x)$ との積 θf , θu を考え、Green の公式

$$\frac{d^i}{dx^i}(\theta u) = \theta u^{(i)} + u^{(i-1)}(0)\delta + \dots + u(0)\delta^{(i-1)}$$

を考慮すれば、解くべき方程式は $[0, b)$, $0 < b \leq \infty$,
 に台のあるリュウトルツ超函数の空間 $\mathcal{D}'[0, b)$ におけるた
 たみこみ方程式

$$(1) \quad p * u = f$$

に与る。但し $p(x) = P(d/dx)\delta(x)$ 。これを

$$(2) \quad p * q = \delta$$

と与る $q \in \mathcal{D}'[0, \infty)$ をみつけてきて

$$u = q * f$$

として解く。このリュウトルツ超函数 q を与るべく具体的に求
 めたい。

(1) をラプラス変換すれば

$$\hat{p}(\lambda) \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

と与るから、

$$(3) \quad \hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\hat{p}(\lambda)} \hat{f}(\lambda)$$

と与る。あるいは (2) から

$$(4) \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\hat{p}(\lambda)}$$

によって g を求めるのがラプラス変換の方法である。

普通には、ラプラス変換が定義できるために f , u に増大度の制限をつけなければならぬことが欠点とされてきた。しかし

シュワルツ超函数 佐藤超函数 ラプラス超函数

$$\mathcal{D}'[0, \infty) \supset \mathcal{B}[0, \infty) \leftarrow \mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$$

と理込みと拡張によってラプラス超函数 $\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$ の問題とすれば増大度と関係なくうまくゆくというのが前回の話であった [10]. (くわしくは [9] を見よ.)

ここで

$$\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} := \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) / \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C})$$

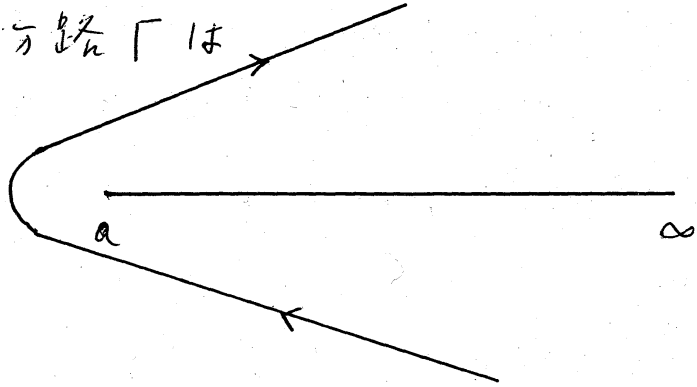
は $[a, \infty]$ に穴をもつラプラス超函数の空間である。但し $\mathcal{O}^{\text{exp}}(V)$ は V 上の整型函数で V に含まれる1角扇形上指数型の増大度をもつもの全体を表わす。ラプラス超函数

$$(5) \quad f(x) = F(x+i0) - F(x-i0), \quad F \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$$

に対して、そのラプラス変換 $\mathcal{L}f(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ を積分

$$(6) \quad \hat{f}(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{-\lambda z} F(z) dz$$

で定義する。積分路 Γ は



の形のものをとり, λ に応じて無限遠に向う角度をかえる。

主要結果は次の二つの定理であった。

定理 1. ラプラス変換 \mathcal{L} は次の同型を与える:

$$(7) \quad \mathcal{L}: \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} \cong \mathcal{L} \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp} \\ := \left\{ \hat{f}(\lambda) \in \mathcal{O}^{\exp}(S_{-\pi/2, \pi/2} \infty) \right\};$$

$$h_f(\theta) \leq -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2 \}.$$

但し, $S_{-\pi/2, \pi/2} \infty$ は無限遠における半円 $\{e^{i\theta} \infty; |\theta| < \pi/2\}$, その上の \mathcal{O}^{\exp} とは漸近的にこの半円に近づくある角集合 V 上の \mathcal{O}^{\exp} の帰納極限の意味に解する。また

$$(8) \quad h_f(\theta) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{f}(r e^{i\theta})|}{r}$$

は指数型整型函数の理論で基本的な型函数 (indicator function) を表わす。

さらに、 $\hat{f}(\lambda) \in \mathcal{L} \mathcal{B}_{[a, \infty)}^{\text{exp}}$ の逆像と見たラプラス超函数の一つの定義至函数 $F(z) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$ は

$$(9) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty e^{\lambda z} \hat{f}(\lambda) d\lambda$$

で与えられる。ここで λ は $\hat{f}(\lambda)$ の定義域の任意の点とし、 λ から無限遠にかかき積分路を連続的に変形して $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$ に入る z に対して $F(z)$ を定める。

定理 2. 図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) & \rightarrow & \mathcal{B}_{[a, \infty)}^{\text{exp}} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty)) & \rightarrow & \mathcal{B}_{[a, \infty)} \rightarrow 0 \end{array}$$

で定義される自然な写像 ρ は全射である。

この定理の証明に前回とは左分判による $\bar{\partial}$ 問題の解を用いた。この部分だけが無等式的であったので、佐藤 [17] と金子 [6] による初等的証明を与えておく。

補題 (佐藤) U を \mathbb{C} における $[a, \infty)$ の任意の近傍とする。このとき、任意の $f \in \mathcal{B}_{[a, \infty)}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|F(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U$$

を満たす f の定義至函数 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, \infty))$ がある。

この補題は $B[a, \infty)$ には自然な局所正位相で分離的であるのがあることも示している。

証明 (金子) $[a, \infty)$ の分割

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots \rightarrow \infty$$

と $I_n := [a_n, a_{n+1}]$ の近傍 $U_n \subset U$ を $\{U_n\}$ が局所有限となるようにとる。

$f \in B[a, \infty)$ を任意にとり n とし, これを

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \text{supp } f_n \subset I_n,$$

と分割し, 各 f_n の標準定義函数

$$F_n(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} f_n(x) dx$$

が

$$(10) \quad |F_n(z)| \leq \varepsilon 2^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U_n$$

を満たすことができるのは,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$$

が求める定義函数になる。

帰納法によって f_n を求める。佐藤超函数の脆弱性によ

$$f = h_1 + k_1, \quad \text{supp } h_1 \subset [a_1, a_2],$$

$\text{supp } h_1 \subset [a_2, \infty)$ と分けることができる。 h_1 の標準定義関数 H_1 は $\mathcal{O}(\mathbb{R} \setminus I_1)$ に属し、無限遠点での値をとつて Runge の定理により、定数項をもたない $1/(z - a_2)$ の多項式 $P_1(z)$ があり、

$$F_1(z) := H_1(z) - P_1(z)$$

は (10) をみたす。 P_1 はある $p_1 \in \mathcal{D}'_{\{a_2\}}$ の標準定義関数であるから、 $f_1 = h_1 - p_1$ とすれば、 $f_1 \in \mathcal{B}_{I_1}$ 。以下同じにすればよい。

以上ではラプラス超函数の空間 $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$ を大域的に定義したが、これに対して自然に \mathcal{B} が定義でき、 \mathcal{B}^{exp} は $[-\infty, \infty]$ 上の層に属することが言明できる。この層は \mathbb{R} 上では左解超函数の層 \mathcal{B} と一致する。定理 2 はこの層が脆弱であることを示している。

2. たたみこみ代数.

乗法の掛算は明らかに双線型写像

$$\mathcal{L}\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \times \mathcal{L}\mathcal{B}_{[b, \infty]}^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{B}_{[a+b, \infty]}^{\text{exp}}$$

を定める。この両辺の逆ラプラス変換をとって、たたみこみ

$$(11) \quad \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} \times \mathcal{B}_{[b, \infty]}^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{B}_{[a+b, \infty]}^{\text{exp}}$$

を定義する。 $\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$ および \mathcal{U}''

$$(12) \quad \mathcal{B}_+^{\text{exp}} := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$$

はこのたたみこみに対して可換代数を成す。

定理1の同型から明らかにこれらの代数は零因子を含まない。しかし Titchmarsh の定理

$$(13) \quad \inf \text{supp } f * g = \inf \text{supp } f + \inf \text{supp } g$$

は成立しない。

反例 (Pólya [15], Cartwright [5]). 実数列 ξ_n を

$$n(r) := \#\{\xi_n; |\xi_n| < r\} = o(r),$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi_n} \quad \text{有界,}$$

となるようにとって

$$\hat{f}(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_n}\right) e^{\lambda/\xi_n}$$

と定義すれば、これは指数型の整函数であり、この型函数は次の公式で与えられる:

$$\widehat{h_f}(\theta) = \overline{\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) \cos \theta},$$

但し,

$$S(r) = \sum_{|\xi_n| < r} \frac{1}{\xi_n}.$$

故に、任意の $a < 0 < b$ に対して

$$a = - \overline{\lim_{r \rightarrow \infty} S(r)}$$

$$b = \underline{\lim_{r \rightarrow \infty} S(r)}$$

とすると、 ξ_n をとれば、 $\hat{f}(\lambda)$ は $\mathcal{L} \mathcal{B}[a, b]$ に属する。しかし

$$\hat{f}(\lambda) \hat{f}(-\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\xi_n} \right)^2 \right)$$

の型函数 $\widehat{h_{\hat{f}(\lambda) \hat{f}(-\lambda)}}(\theta) = 0$ 。 $\check{f}(x) = f(-x)$ によつて \check{f} を定義したとき、 $\check{f} \in \mathcal{B}[-b, -a]$ 。しかし、 $f * \check{f}$ は $\mathcal{B}_{\{0\}}$ に属し

$$\begin{aligned} 0 &= \inf \operatorname{supp} f * \check{f} > \inf \operatorname{supp} f + \inf \operatorname{supp} \check{f} \\ &= a - b \end{aligned}$$

と矛盾。

$-\infty < a < b \leq \infty$ とする。 \mathcal{B} の脆弱性とは

理 2 を用いれば,

$$(14) \quad \mathcal{B}_{[a, b)} \cong \mathcal{B}_{[a, \infty)}^{\text{exp}} / \mathcal{B}_{[b, \infty)}^{\text{exp}}$$

と表わされることかあかる。これと (11) を用いれば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ および $0 < c \leq \infty$ に対して, $\mathcal{B}_{[a, a+c)}$ と $\mathcal{B}_{[b, b+c)}$

$$(15) \quad \mathcal{B}_{[a, a+c)} \times \mathcal{B}_{[b, b+c)} \rightarrow \mathcal{B}_{[a+b, a+b+c)}$$

が代表による一意的に定まることかあかる。

上の反例に於て, $c < \infty$ のとき, $\mathcal{B}_{[a, a+c)}$ は零因子をもつ。他の $\mathcal{B}_{[a, a+c)}$ 代数 $\mathcal{B}_{[0, \infty)}$ および $\mathcal{B}_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{[a, \infty)}$ が零因子をもつかどうかは知らずまい。

定義 $f \in \mathcal{B}_+ \quad (\mathcal{B}_+^{\text{exp}})$ が正則とは, 任意の $g \in \mathcal{B}_+ \quad (\mathcal{B}_+^{\text{exp}})$ に対して (13) が成り立つことであるとして定義する。

定理 3. 次の条件のいずれかかたりたてば f は正則である:

$$1) \quad \text{supp } f = \{a\} \quad \text{1 点};$$

$$2) \quad \text{supp } f \text{ はコンパクトかつ}$$

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |\hat{f}(i\nu)|}{1 + \nu^2} d\nu < \infty;$$

3) 正則な f_0 と $\inf \operatorname{supp} f_0 < \inf \operatorname{supp} f_1$ をみたす f_1 を用いて

$$f = f_0 + f_1$$

と分解できる。

証明 条件 1) の場合は Pólya [15] の結果である。

Boas の教科書 [2] の 191 ページを見よ。ここで最小絶対値定理 ([2] 51 ページ) を用いて (代りに Ahlfors-Heins の定理 ([2] 116 ページ) を用いれば, 条件 2) の場合の証明ができる。条件 3) の場合は自明である。

非擬解析族の函数空間 $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ の双対空間の元として定義される超函数 $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ がコンパクト台をもつき, そのラプラス変換は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\nu)}{1 + \nu^2} d\nu < \infty$$

をみたす $M(t) \geq 0$ を用いて

$$|\hat{f}(i\nu)| \leq C \exp M(L\nu), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

と評価される。したがって, このような超函数 f は条件 2) をみたす。 ([8] を見よ。)

3. 可逆性.

簡単のためたまたみ代数 $\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ または \mathcal{B}_+ の中でのみ考へる.

定義 $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または \mathcal{B}_+) が可逆とは

$$p * q = \delta$$

となる $q \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または \mathcal{B}_+) が存在することである。これは任意の $f \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または \mathcal{B}_+) に対して方程式

$$p * u = f$$

が唯一つの解 $u \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または \mathcal{B}_+) をもつことと同等である。

$p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ (または \mathcal{B}_+) が正則可逆とは可逆であって、逆 q が

$$\inf \text{supp } p + \inf \text{supp } q = 0$$

をみたすことと定義可る。

p が正則可逆であるための必要十分条件は p が正則かつ可逆であることである。

正則でない可逆元があるかどうかは知らない。

定理 1 によれば, $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が可逆であるための必要十分条件は p のラプラス変換の逆数 $1/\hat{p}(\lambda)$ が $\mathcal{L}\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ に属することである. この逆数の逆ラプラス変換 q が p の唯一の逆となる. 特に可逆な p のラプラス変換は次の条件を満たす

0) $\hat{p}(\lambda)$ は $S_{-\pi/2, \pi/2} \infty$ の近傍で零点を持たない.

定理 4. $p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が条件 0) および定理 3 の条件 1) または 2) を満たせば, p は正則可逆である.

$p \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が定理 3 の条件 3) のように分解でき, p_0 が正則可逆ならば, p も正則可逆である.

証明. $a = \inf \text{supp } p$ とする. 零点がないという条件 0) の下では, 定理 3 の条件 1) または 2) から

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{p}(re^{i\theta})|}{r} = -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2,$$

が導かれる. これから $\hat{p}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}\mathcal{B}_{[-a, \infty]}^{\text{exp}}$ がわかる.

後半を証明するため, q_0 を p_0 の逆とする. このとき, $q_0 * p = \delta + q_0 * p_1$ において $\inf \text{supp } q_0 * p_1 > 0$. したがって, 上記のラプラス変換 $1 + (q_0 * p_1)^{\wedge}(\lambda)$ は逆 $\sum (-1)^n (q_0 * p_1)^{\wedge}(\lambda)^n \in \mathcal{L}\mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$

をもつ。この至数の逆ラプラス変換を q_2 とし、
 $q_2 * q_0$ が p の正則可逆となる。

以上は $\mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ における正則可逆性の判定条件であ
 るが、次の定理により \mathcal{B}_+ における (正則) 可逆性はこ
 の場合に戻着することができる。定理 2 において $p(\tilde{f}) = f$
 であるとき、 $f \in \mathcal{B}_+$ を $\tilde{f} \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ の制限、 \tilde{f} を f の拡張
 という。

定理 5. $p \in \mathcal{B}_+$ が可逆 (正則可逆) であるための必要十
 分条件は p の一つの、 \mathbb{R} 上への拡張 $\tilde{p} \in \mathcal{B}_+^{\text{exp}}$ が
 可逆 (正則可逆) であることである。

証明. p の一つの拡張 \tilde{p} が (正則可) 逆 \tilde{q} をもてば、
 明らかにその制限 $q = p(\tilde{q})$ は p の (正則可) 逆となる。

逆に、 p が (正則可) 逆 q をもつとする。 \tilde{p} を p の
 任意の拡張、 \tilde{q} を q の一つの拡張とすれば、

$$\tilde{q} * \tilde{p} = \delta + h$$

と書いたとき、 h は ∞ 上のみ台をもつラプラス
 超至数となる。前定理の証明の中と同じ計算で、左
 辺は正則可逆 $\tilde{q}_2 \in \mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$ をもつことがわかる。しか
 かも、 $\tilde{q}_2 * \tilde{q}$ が \tilde{p} の (正則可) 逆となる。

特に、 p が定理 3 の条件 1) または 2) をみたす超

函数であるとき, p が B_+ で可逆であることと $\hat{p}(\lambda)$ が定理4の条件0)をみたすことは同等になる。 p の値が1点の場合, これは河合[7]の双曲型作用素の特徴づけの1次元の場合に他ならない。

4. Mikusiński の演算子との比較

Mikusiński [13] は, 連続函数の空間 $C([0, \infty))$ が通常の加法とたねみこみに関して零因子を持たない代数をなすことに基いて, この商体として演算子の空間 M を定義し, Heaviside 演算子法の基礎づけを行った。

$f \in C([0, \infty))$ の不定積分 $\theta * f$ は $[0, \infty)$ にあるある連続函数の空間 $C_{[0, \infty)}$ に属し, $f/g \in M$, $f, g \in C([0, \infty))$ は $\theta * f / \theta * g$ と表わされるから, M は $C_{[0, \infty)}$ の商体でもある。

さらに, θ の代り $\delta(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, とのたねみこみを行えば, たねみこみ代数

$$C_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} C[a, \infty)$$

を用いて, 商体

$$M = C_+ / C_+$$

と表わすことができる。

定理3の2) および3) からわかるように, すべての
 $f \in C_+$ は B_+ の中で"正則"である. 即ち Titchmarsh
 の定理(13) が任意の $f \in C_+$ および $g \in B_+$ に対
 して成立する.

Mikusinski の演算子 $p = f/g$, $f, g \in C_+$,
 はあまり正体のよくわからぬものであるが, これから \mathbb{R} の
 下限

$$\inf \text{supp } p = \inf \text{supp } f - \inf \text{supp } g$$

は表示 f/g によらず定まることに注意する.

特に $g \in C_+$ は B_+ の中で"零因子"となることはな
 い. 従って, Mikusinski の演算子 $M = C_+/C_+$
 および佐藤超函数 B_+ は共に商のなす \mathbb{R} - m -代数

$$B_+/C_+ := \{ f/g ; f \in B_+, g \in C_+ \}$$

に埋込むことができる.

定理6. 1) すべての $f \in B_+ \cap M$ は B_+ にお
 いて"正則"である.

2) $f \in B_+ \cap M$ が B_+ において可逆でなければ,
 M における逆元 δ/f は B_+ に属さない.

証明 $f \in B_+$ が M において δ/ψ , $\delta, \psi \in$

C_+ と表わされたとすると, 任意の $g \in \mathcal{B}_+$ に対し

$$\psi * f * g = \varphi * g.$$

両辺の $\inf \sup$ を一通りに計算して比較すれば, 正則性 (13) を得る。

2) の言証明は明らかである。

これから, M と \mathcal{B}_+ は共に一つか他に含まれることはないことがわかる。

$\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ を一つの非擬解析族, $\mathcal{D}_+^{*'}$ をこの双対空間として定義される超函数族のうち台が下に有限であるものの全体とする。任意の $f \in \mathcal{D}_+^{*'}$ は $\varphi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ とたたみこみをとると $C_+ | = \lambda$ 。すなわち

$$\mathcal{D}_+^{*' } \subset M \cap \mathcal{B}_+.$$

次の定理は, 弱い意味でこの逆が成り立つことを示している。

定理7. $f \in \mathcal{B}_{[a,b]}$ をコンパクト台の左解超函数とする。

1) あるコンパクト台の連続函数 $\varphi \neq 0$ とのたたみこみ $f * \varphi$ が連続函数と成るならば, f のラプラス変換 $\hat{f}(\mu + i\nu)$ は (16) をみたす。

2) 逆に, $\hat{f}(\mu + i\nu)$ が (16) をみたすならば,

任意の $c > 0$ と非擬解析族 \mathcal{D}^* に対して $0 < \epsilon < c$ の $\psi \in \mathcal{D}_{[-c, c]}^*$ が存在し, $\psi * f$ が $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属する。

証明. 半平面 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (または $\operatorname{Re} \lambda < 0$) 上の整型函数 $\hat{f}(\lambda)$ は, その上の \Rightarrow の有界整型函数の商と表わせるとき Nevanlinna 族に入るという。1) の仮定がみちたれるとき, $\hat{\psi}(\lambda)$ と $\hat{\psi}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$ は, Paley-Wiener の定理により, 共に両半平面 $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ 上 Nevanlinna 族に入り, したがって $\hat{f}(\lambda)$ 自身が Nevanlinna 族に入る。Krein [12] はこのように整函数は (16) をみたす指数型整函数であることを証明している。

2) Beurling-Malliavin [1] はこの仮定の下で $\hat{f}(\lambda)$ は \Rightarrow の測度のラプラス変換の商として表せることを証明している。すなわち ψ も $\psi * f$ も測度に関するものであるが, これらとある $\psi \in \mathcal{D}^*$ のたたみこみをとれば, 共に $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属する ϕ にすることができるといえる。

Boehme [3], [14] は Mikusiński 演算子の一部に台の概念を定義した。Burzyk [4] によれば, 定理 7 の条件は正しく f がコンパクト台の演算子であるための必要十分条件である。

(16) はこの他にいろいろ存とこりに現われる重要な条件である。超函数 \mathcal{D}' の一般論を非擬解析族 \mathcal{D}^* と独立に (16) のみを基礎として組立てることが望まれる。

文献

- [1] A. Beurling - P. Malliavin, On the Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107(1962), 291 - 309.
- [2] R. P. Boas, Jr., Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
- [3] T. K. Boehme, The support of Mikusiński operators, Trans. Amer. Math. Soc., 176(1973), 319 - 334.
- [4] J. Burzyk, A Paley-Wiener type theorem for operators and its applications, Proc. Conf. on Generalized Functions, Convergence Structures and their Applications, to appear.
- [5] M. L. Cartwright, On integral functions of integral order, Proc. London Math Soc., 33(1931), 209 - 224.
- [6] 金子晃, 超関数入門, 下, 東京大学出版会, 1982.
- [7] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 17(1970), 467 - 517.
- [8] H. Komatsu, Ultradistributions II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac.

- Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24(1977), 607 - 628.
- [9] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions — A new foundation of the Heaviside calculus, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 34(1987), 805 - 820.
- [10] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions, 代数解析学の発展, 数理研講究録 638(1988), 224 - 238.
- [11] H. Komatsu, Operational calculus, hyperfunctions and ultradistributions, Prospects of Algebraic Analysis, Academic Press, to appear.
- [12] M. G. Krein, A contribution to the theory of entire functions of exponential type, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, 11 (1947), 309 - 326 (in Russian).
- [13] J. Mikusiński, Rachunek Operatorow, Warszawa, 1953.
- [14] J. Mikusiński - T. K. Boehme, Operational Calculus, 2nd Ed. Vol. II, Pergamon Press, Oxford, & PWN, Warszawa, 1987.
- [15] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z., 29(1929), 549 - 640.
- [16] Y. Saburi, Fundamental properties of modified Fourier hyperfunctions, Tokyo J. Math., 8(1985), 231 - 273.
- [17] 佐藤幹夫, 超函数の理論, 数学 10(1958), 1 - 27.