

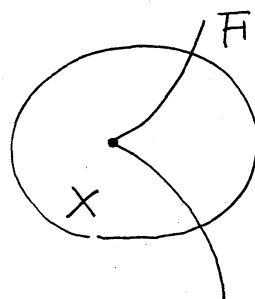
平面曲線に台を持つ holonomic 系の
Rosenlicht 型 構造定理について。

新潟大・教養 田島 慎一

(Shinichi TAJIMA)

§1. F は原点 $(0,0)$ の近傍 $X \subset \mathbb{C}^2$ における
既約平面曲線とし、 $f=0$ をその定義方程式とする。

X 上の正則函数のなす層を \mathcal{O}_X
とし、 X 上の正則函数を係数と
する線型偏微分作用素のなす層を
 \mathcal{D}_X とおく。



このとき、 F に台を持つ algebraic local cohomology

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) &\stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{\mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X/(f)^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_X) \\ &= \mathcal{O}_X(*F)/\mathcal{O}_X \end{aligned}$$

は自然に \mathcal{D}_X -加群の構造を持ち、holonomic 系

に存在することも知られてゐる [5]。

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^1$ は \mathcal{D}_X -加群 $\mathcal{M}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の具体的な構造を初等的に決定することが考えられる。

例 $F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$.

今 $P = -\frac{1}{27} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial y^3} y + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} x - \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,

$b(s) = (s+1)(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$ とおけば

$P f^{s+1} = b(s) f^s$ から

$P f^{-1} = (b(-2)) f^{-2}$, $P^2 f^{-1} = (b(-2)b(-3)) f^{-3}$

等々を得る。従つて $\mathcal{M}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ は \mathcal{D}_X -加群として $u = \frac{1}{f} \pmod{\mathcal{O}_X}$ から生成される。更に

$$\mathcal{M}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{D}_X f + \mathcal{D}_X (2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6) + \mathcal{D}_X (2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y})$$

となる。

一般に Γ の特異点の幾何的構造と $\mathcal{M}_{[\Gamma]}^1(\mathcal{O}_X)$ の \mathcal{D}_X -加群としての構造の関係を知りたいという好奇心が以下の計算の主な動機である。

注意 最近, Doorn-Essen, Smith-Stafford ほか Vigne' の仕事等をふまえて, 特異点を持つ曲線 Γ 上の \mathcal{D}_Γ -加群のなす category を森田同型を使って調べている。

Γ が特異点を持たないときの $\mathcal{M}_{[\Gamma]}^1(\mathcal{O}_X)$ の構造はよく知られているが, 復習しておく。

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\}, \quad Y = \{(x, y) \in X \mid x=0\}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{[Y]}^1(\mathcal{O}_X) \quad \text{とおく。}$$

\mathcal{M} は $u = \frac{1}{x}$ により \mathcal{D}_X 上生成されており, しかも $xu = 0$ ($x \frac{1}{x}$ は正則関数), $\frac{\partial}{\partial y} u = 0$ をみたすことから

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X x + \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial y} = B_Y | X$$

を得るが, 更に次の形の結果がある。

命題 $Y \hookrightarrow X$ が non-singular ならば、次の
なりたつ。

$$(1) \int_{X \leftarrow Y} \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{O}_Y = \mathcal{M},$$

$$(2) \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_Y.$$

特に Y 上の最も簡単な \mathcal{D}_Y -加群である \mathcal{O}_Y の積分系
として $\mathcal{H}e^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ が得られることがわかる。

(2) について、証明の方針を与えておく。

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M})$ は $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ を方程式系と

見做して \mathcal{M} に値を持つ "解" を計算すればよい。

よって

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \xrightarrow{x} \mathcal{M} \leftarrow 0$$

の cohomology をとる

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \text{Ker } x \cong \mathcal{O}_Y \quad \text{がわかる。}$$

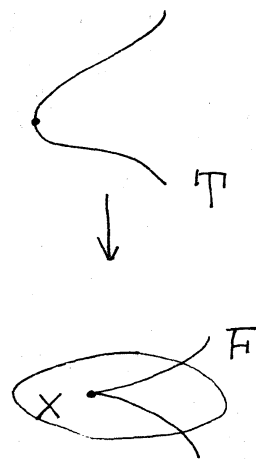
$$\text{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \text{Coker } x \quad \text{について}$$

たとえば $\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} = 1$ より, $-x \frac{\partial}{\partial x} = 1 \in x\mathcal{M}$ が \mathcal{M} の中でわかる。同様の計算をして $\text{Coker } \alpha = 0$ を得る。

§2. Normalization の導入と予想

F は原点のみに特異点を持つ analytic な既約な plane curve とし, F の normalization を T とおく。

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ P \downarrow & \searrow \pi & \\ F & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{と定める。}$$



$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) \quad \text{とおく。}$$

次のことが予想される。

基本予想 A

$$(1) \int_{\pi} \mathcal{O}_T = \mathcal{D}_{X \leftarrow T} \otimes_{\mathcal{D}_T} \mathcal{O}_T = \mathcal{M}$$

$$(2) \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow T}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_T$$

ること自然と思われ。今 $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_X / (f)$ とおけば

$$\begin{aligned} p^* \mathcal{O}_F &= \{ p^*(h) \mid h \in \mathcal{O}_F \} \\ &= \left\{ \sum a_{\alpha\beta} t^{2\alpha} t^{2\beta} \mid \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathcal{O}_F \right\} \\ &= \left\{ \sum c_r t^r \mid c_0 = 0 \right\} \subset \mathcal{O}_F \end{aligned}$$

となるが、 $t \frac{\partial}{\partial x}$ や $t^2 \frac{\partial}{\partial x}$ は $p^* \mathcal{O}_F$ に作用することには注意しよう。

次に $2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6$ の定数項 6 の意味について考えてみる。もともと方程式系の積分の理論は左加群よりも右加群で考えた方が自然なわけだから、今の場合も“関数”ではなく“form”で考えた方が幾何的なこととの関係がはるるりつかめようである。そこで次の Poincaré residue map を思ったそう。

$$\frac{dx \wedge dy}{f(x, y)} \longrightarrow \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Big|_{f=0}$$

今扱っている具体例では

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2 - x^3} \longrightarrow \frac{dx}{2y} \Big|_{f=0} = \frac{1}{t^2} dt \quad \text{となる。}$$

注意. $\frac{1}{t^2}$ の指数 2 は $f=0$ の Milnor 巻戻 $\mu = \ell(\mathbb{C}[[X, Y]] / (\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}))$ と一致し, $\delta = \ell(\mathcal{O}_\pi / \mathcal{O}_F)$ とおけば $\mu = 2\delta$ とおき = 4 はよく知られている。

注意 $\frac{1}{t^2}$ を π に沿って積分してやると

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{t^2} \delta(x-t^2) \delta(y-t^3) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} \left\{ x^{-\frac{1}{2}} \delta(x^{\frac{1}{2}}-t) \delta(y-t^3) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. x^{-\frac{1}{2}} \delta(x^{\frac{1}{2}}+t) \delta(y-t^3) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left\{ \delta(y-x^{\frac{3}{2}}) + \delta(y+x^{\frac{3}{2}}) \right\} \\ &= \delta(y^2-x^3) \qquad \qquad \qquad \text{と得る。} \end{aligned}$$

次の節で, 関数 $\frac{1}{t^2}$ の満たす微分方程式系

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}_T \left(t \frac{\partial}{\partial t} + 2 \right)$$

と与えらる。

$$\int_{X \leftarrow T} \mathcal{N} = \mathcal{D}_X \leftarrow T \otimes \mathcal{N}$$

と $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の関係も調べよう。

§3. 方程式系の積分系の計算.

この節では $\int_{\pi} \mathcal{M}$ の計算を実行して、次の結果が
なりたつことを示します。

定理

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_{[[0,0]]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

は exact

注意 この結果は dualizing module

$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X/(f), \omega_X^2)$ に対する Rosenlicht の定理
の左 \mathcal{O}_X -加群版ともいうべきものになる。

方程式系 \mathcal{M} の積分の計算を実行するために、
graph による embedding $i: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} \times X = \tilde{X}$
を用意する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{i} & \mathbb{T} \times X = \tilde{X} \\ p \downarrow & \searrow \pi & \downarrow p_X \\ F & \longrightarrow & X \end{array}$$

$$\int_{\pi} M = \int_{Pr} \left\{ \int_i M \right\} \quad \text{がたりのたつが、簡単な}$$

計算により)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_i M = d\tilde{X} / \tilde{Y} \\ \tilde{Y} &= d\tilde{X} (x-t^2) + d\tilde{X} (y-t^3) + d\tilde{X} (t \frac{\partial}{\partial t} + 2t \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3t \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 2) \end{aligned} \right.$$

がたりのたつ。

$$\mathbb{R} \int_{\pi} M = \mathbb{R} \int_{Pr} \mathcal{L} = \int_{Pr} \mathcal{L} = \mathcal{L} / \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$$

とたりのたつから $\mathcal{L} / \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$ の $d\tilde{X}$ -加群としての構造を計算すればよい。

恒等式

$$\begin{aligned} & t \frac{\partial}{\partial t} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^3 \frac{\partial}{\partial y} + 2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t + 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6 + 2 \frac{\partial}{\partial x} (t^2 - x) + 3 \frac{\partial}{\partial y} (t^3 - y) \end{aligned}$$

より $\text{mod } \tilde{Y} \text{ として}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-t) \equiv 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6 \in \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$$

を得る。同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}(-t^2) \equiv 2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} \in \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} \quad \text{等がわかる。}$$

従って、 $u = 1 \pmod{\tilde{\mathcal{I}}} \in \mathcal{L}$ とおけば、 $\int_{\mathbb{P}^1} u$ は

$$D_X/D_X(y^2-x^3) + D_X(2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6) + D_X(2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y})$$

に対応する ϵ がわかる。よって、 $\int_{\mathbb{P}^1} (tu)$ は D_X 上

$\int_{\mathbb{P}^1} u$ から生成される \mathbb{C} の \mathbb{C} 。

$$0 \rightarrow \eta_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow \int_{\mathbb{P}^1} \mathcal{L}$$

は成りたつが、一致 $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ 。よって、 $\int_{\mathbb{P}^1} (tu)$ のみならず

方程式系を前と同様に計算する ϵ によつて

$$(\#) \quad \int_{\mathbb{P}^1} \mathcal{L} \pmod{\eta_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)}$$

たゞ D_X -加群を扱ってみる。Leibniz の規則のみを用いるとよつて $(\#)$ は

$$D_X/D_X(2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 5) + D_X(2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}) + D_X(y^2-x^3)$$

ϵ たち ϵ がわかる。

更に ideal の計算をしてやれば

$$d_X / d_X \mathcal{O}_X + d_X \mathcal{O}_X = \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X)$$

と等しくなることは確かめられから、結局

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow \int_{\pi} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

exact

を得る。

注意. 方程式系の言葉ではなく meromorphic differential form の言葉でいいかえてみる。 $\mathcal{M} = \mathcal{O}[t^{-1}]$ とおいて

$m \in \mathcal{M}$ に対して $\int m \in \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)$ となる必要十分条件は

$$\int m p^*(h)(t) dt = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}_X$$

となるので、上の結果は dualizing module と Rosenlicht differential の関係に対応する。

注意. Intersection theory に関する Vilsonen の結果と比較せよ。

§ 4. 基本予想との関係.

22. $\mathcal{H}_{[\mathbb{R}]}^1(\mathcal{O}_X)$ が non-trivial な submodule を持たないところから例を以て $\frac{x}{y^2-x^3} \bmod \mathcal{O}_X$ が \mathcal{O}_X 上 $\mathcal{H}_{[\mathbb{R}]}^1(\mathcal{O}_X)$ は生成元を以て成る。

$$\frac{x}{y^2-x^3} dx \wedge dy \text{ の Poincaré residue は } \frac{x}{2y} dx = dt$$

だから.

$$\int_{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{H}_{[\mathbb{R}]}^1(\mathcal{O}_X)$$

が成りたるところからこの予想である。

実際

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{[0]}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow 0$$

exact

を積分して

$$0 \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

exact

を得る。

他方

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_{[[0,0]]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

exact

が既に示してありかつ

$$\int_{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) \quad \text{を得る。}$$

$$\text{次に } \mathcal{H}_{\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1}(\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)) \text{ について考える}$$

ため。

$$i(\mathbb{P}^1) = \{(t, x, y) \in \mathbb{P}^1 \times X \mid x = t^2, y = t^3\} \text{ とおくと}$$

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow \mathbb{P}^1} = \mathcal{H}_{[i(\mathbb{P}^1)]}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times X}) \quad \text{は } \mathcal{D}_X \text{ 上}$$

$$m = \frac{dt}{(x-t^2)(y-t^3)} \quad \text{と } tm = \frac{t dt}{(x-t^2)(y-t^3)}$$

よって生成されることは注意して $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1}(\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X))$
を計算してあげると (計算は内積の計算に注意) である。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{H}_{\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1}(\mathcal{D}_X \leftarrow \mathbb{P}^1, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X))$$

を得る。

平面曲線 $f=0$ の Puiseux 展開が簡単な場合には全く同様な方法で、—— Leibniz の規則だけで —— \mathcal{D}_X -加群の計算ができる。

曲面 S に対して algebraic local cohomology $\mathbb{R}\Gamma_{[S]}(\mathcal{O}_X)$ の \mathcal{D}_X -加群としての構造が具体的に計算できるとおもしろいと思う。

以上.

文献

- [1] J.-L. Brylinski, La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le D-module qui calcule sa cohomologie d'intersection, Astérisque 130 (1985), 260-271.
- [2] M.G.M. van Doorn and A.R.P. van Essen, D_n -Modules with support on a curve, preprint.
- [3] A. Grothendieck, Local cohomology, Lecture Notes in Math. 41 (1967).
- [4] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, Invent. math. 38 (1976), 33-53.
- [5] ———, On the holonomic systems of linear differential equations II, Invent. Math., 49 (1978), 121-152.
- [6] K. Kodaira, On compact analytic surfaces I, Ann. Math., 71 (1960), 111-152.

- [7] Lê Dũng Tráng and Z. Mebkhout, Introduction to linear differential systems, Proc. Symposia in Pure Math., 40 (1983), part 2, 31-63.
- [8] M. Lejeune-Jalabert, Le théorème "AF + BG" de Max Noether, Seminaire sur les singularités, Pub. Math. L'univ. Paris VII, (1980), 97-138.
- [9] Z. Mebkhout, Local cohomology of analytic spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12 Supp. (1977), 247-256.
- [10] S.P. Smith and J.T. Stafford, Differential operators on an affine curve, preprint.
- [11] J.P. Vigué, Opérateurs différentiels sur les espaces analytique, Invent. Math., 20 (1973), 313-336.
- [12] K. Vilonen, Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities, Invent. Math., 81 (1985), 107-114.
- [13] T. Yano, Exponents of singularities of plane irreducible curves, Sci. Rep. Saitama Univ., 10,2 (1982), 21-28.