数理解析研究所講究録
660巻 1988年 161-163

On the structure of holonomic $\mathcal{D}_X$ module with two irreducible charactristic varieties.

東大·理　本多 尚文 (HONDA Naofumi)

§ Introduction

一般に、holonomic module の構造は、microlocalizeする事でかなりの事が判っている。本稿では、特に、その特性多様体が2つの既約ラグランジアン解析集合からなる場合について、「$\mathcal{D}_X$-moduleのCategoryでどの程度構造が判るか」という事を問題とする。Xを複素多様体、YをXの部分複素多様体とする。この時、次の事が知られている。

定理 (Kashiwara [1])

$\mathcal{M}$を$\mathcal{D}_X$ Coherent module, s.t. $\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_Y X$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\text{fini}} \mathcal{B}_{Y|X}. \qquad \boxed{\diagup}$$

ここで、$\mathcal{B}_{Y|X} = R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)[d]$ ($d = \mathrm{codim}(Y)$) とする。

そこで、次の様な問題を考える。

Problem (#) Xを複素多様体、Y_1, Y_2をXの部分複素多様体とする。Coherent $\mathcal{D}_X$ module $\mathcal{M}$が $\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_{Y_1}X \cup T^*_{Y_2}X$ を満たす時、$\mathcal{M}$の構造は？

§ Holonomic module の構造

この Problem に対する. 最も単純な場合の解答は. 以下の通りである.

定理 I

$X, Y_1, Y_2, \mathcal{M}$ は Problem (#) の通りとする.

Y_1, Y_2 が以下の a) or b) を満足するとする.

a) $Y_1 \not\subset Y_2$ かつ $Y_2 \not\subset Y_1$

b) $Y_1 \subset Y_2$ (resp. $Y_2 \subset Y_1$) で $\mathrm{Codim}_{Y_2}(Y_1) \geqq 2$

(resp. $\mathrm{Codim}_{Y_1}(Y_2) \geqq 2$)

この時,

$$\mathcal{M} \simeq \Big(\bigoplus_{fini} \mathcal{B}_{Y_1|X}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{fini} \mathcal{B}_{Y_2|X}\Big) \qquad \boxed{/}$$

従って. 特に問題となるのは. 次の様な場合である.

$$\begin{cases} Y \text{ は } X \text{ の nonsing hypersurface} \\ \mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \pi^{-1}(Y) \qquad (\pi : T^*X \to X) \end{cases}$$

しかし. この場合 $\mathcal{M}$ の構造を決定する事は非常に難しい問題である. 特に. 単純な場合として. 1変数の holonomic に. reduce 出来る時を考える.

$X = \mathbb{C}^n$ とし. 以下の様に設定する

$$\begin{array}{ccccc} Y & & X & & Z \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{C}^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} \\ (y) & \longmapsto & (y, 0) & & \\ & & (y, z) & \longmapsto & (z) \end{array}$$

<u>Th II</u>

X, Y, Z は既に述べた通り．$\mathcal{M}$ は holonomic $\mathcal{D}_X$ module で
$\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \pi^{-1}(Y)$，$\Gamma_{[Y]}\mathcal{M} = 0$ を満足するとする．
更に $\mathcal{M}$ が 条件 (＊) $\mathrm{char}_p(\mathcal{M}) \subset$ null section of $T^*(X/Z)$
を満たすとする．

この時，holonomic $\mathcal{D}_Z$ module $\widetilde{\mathcal{M}_Z}$ が存在し

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} \widetilde{\mathcal{M}_Z} \qquad \boxtimes$$

Remark：

1) $\mathcal{M}$ が R.S であれば，(＊)は常に満たされる．

2) $\mathcal{D}^\infty$ を用いれば，(＊)は必要ない．つまり常に $\mathcal{M}^\infty \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} (\widetilde{\mathcal{M}_Z})^\infty$．

$\mathrm{char}_p(\mathcal{M})$ 及び，$T^*(X/Z)$ については，(Schapira [2]) を参照せよ．

[Reference]

[1] Kashiwara, M. : On the maximally overdetermined system of linear differential equation I, Publ. R.I.M.S., Kyoto, 10, 563-579, (1975).

[2] Schapira, P. : Microdifferential Systems in the Complex domain, Grundlehren der Math., 269, Springer, (1985).