数理解析研究所講究録
660巻 1988年 142-160

複素球面上の正則函数について

上智大理工　和田涼子（Ryoko Wada）

dを2以上の自然数とする．$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$で$\mathbb{C}^{d+1}$上の正則函数の空間を表わす．任意の$\lambda\in\mathbb{C}$について$\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})=\{F\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})\,;\,(\Delta_z+\lambda^2)F=0\}$とおく（ここで$\Delta_z=\sum_{j=1}^{d+1}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^2$）．$\rho\in\mathbb{C}$について$M_\rho=\{z\in\mathbb{C}^{d+1}\,;\,\sum_{j=1}^{d+1}z_j^2=\rho^2\}$とおく．特に$\tilde{S}=M_1=\{z\in\mathbb{C}^{d+1}\,;\,\sum_{j=1}^{d+1}z_j^2=1\}$を$\mathbb{C}^{d+1}$上の複素球面という．この解析的集合$M_\rho$上の正則函数の全体を$\mathcal{O}(M_\rho)$で表わす．Oka-Cartanの定理Bより$\mathcal{O}(M_\rho)=\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})|_{M_\rho}$である．

M_0への制限写像$F\to F|_{M_0}$が$\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$から$\mathcal{O}(M_0)$への線型位相同型であることは[6][7]で示したが，ここでは$\rho\neq 0$の場合も同様の結果が得られることを示す（定理2.1，系2.3）．

またM_0上の指数型の正則函数が$\mathbb{C}^{d+1}$上の指数型整函数にのばせることは[6]で示したが，$\tilde{S}$上の指数型の正則函数についても同様のことが成り立つことを示す（定理3.1）．

§1. 準備

dを2以上の自然数とする．$z=(z_1, \ldots, z_{d+1})$, $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$について

$$z\cdot\zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j ,$$

$$\|z\| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} ,$$

$$z^2 = z\cdot z$$

とおく．Sを$\mathbb{R}^{d+1}$の単位球面とし，dsを$\int_S 1\,ds = 1$をみたすS上の$O(d+1)$-invariantな測度とする．$\|\ \|_\infty$でS上のsup normを表わす．$\mathbb{H}_{n,d}$で$(d+1)$次元n次の球面調和函数の空間を表わす．(球面調和函数については[5]参照)．$S_n \in \mathbb{H}_{n,d}$についてS上でS_nと一致する$\mathbb{C}^{d+1}$上のn次同次調和多項式が一意的に決まる．それを$\widetilde{S}_n$で表わす．

$\mathbb{C}^{d+1}$上のLie normおよびdual Lie normを各々次式で定義する：

$$(1.1)\qquad L(z) = \{\|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2}\}^{1/2},$$

$$(1.2)\qquad L^*(z) = \sup\{|z\cdot\zeta| ;\ L(\zeta)\leqq 1\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\|z\|^2 + |z^2|)^{1/2}.$$

（[1] 参照）.

半径 r の開 Lie 球および閉 Lie 球を各々

$$\widetilde{B}(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ;\ L(z) < r \} \quad (0 < r \leq \infty),$$

$$\widetilde{B}[r] = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ;\ L(z) \leq r \} \quad (0 \leq r < \infty)$$

で表わし，$\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$ で $\widetilde{B}(r)$ 上の正則函数の全体を表わす．$\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$ は広義一様収束の位相を入れると FS 空間になる．次に

$$\mathcal{O}(\widetilde{B}[r]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r' > r} \mathcal{O}(\widetilde{B}(r'))$$

とおく．$\mathcal{O}(\widetilde{B}[r])$ は DFS 空間である．

N を $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の任意のノルムとする．$A > 0$ について

$$X_{A,N} = \{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}) ;\ \sup_{z \in \mathbb{C}^{d+1}} |F(z)| \exp(-AN(z)) < \infty \}$$

とおくと $X_{A,N}$ はノルム $\| F \|_{A,N} = \sup_{z \in \mathbb{C}^{d+1}} |F(z)| \exp(-AN(z))$ について Banach 空間になる．さらに

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (A : N)) = \operatorname*{proj\,lim}_{A' > A} X_{A' ; N} \quad (0 \leq A < \infty),$$

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [A:N]) = \operatorname*{ind\,lim}_{A'<A} X_{A';N} \quad (0 < A \leq \infty)$$

とおく。$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [\infty:N])$は 指数型整函数の空間である.

$\tilde{S}$で$\mathbb{C}^{d+1}$上の複素球面を表わす. すなわち

$$\tilde{S} = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} \,;\, z^2 = 1 \}.$$

さらに

$$\tilde{S}(r) = \tilde{B}(r) \cap \tilde{S} \qquad (1 < r \leq \infty),$$

$$\tilde{S}[r] = \tilde{B}[r] \cap \tilde{S} \qquad (1 \leq r < \infty)$$

とおく. $\mathcal{O}(\tilde{S}(r))$を$\tilde{S}(r)$上の正則函数の全体とし, 広義一様収束の位相を入れる. また

$$\mathcal{O}(\tilde{S}[r]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r'>r} \mathcal{O}(\tilde{S}(r'))$$

とおく.

fが S上の函数または汎函数であるとき

(1.3) $\qquad S_n(f : s) = N(n, d) \langle f, P_{n,d}(\cdot s) \rangle$

$$(s \in S)$$

とおく．ここで

$$(1.4) \qquad N(n,d) = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!\,(d-1)!}$$

で，$P_{n,d}$ は $(d+1)$次元 n次の Legendre 多項式とする．$S_n(f:\ )$は$\mathbb{H}_{n,d}$の元であり，fのn次球面調和成分とよばれる（[3] [4] 参照）．

$\mathcal{O}(\widetilde{S}[r])$，$\mathcal{O}(\widetilde{S}(r))$は球面調和函数の列$\{S_n(f:\ )\}_{n=0,1,2\cdots}$の増大度によって次のように特徴づけられる．

補題1.1（[4] Theorem 5.1，5.2）．S_nをfのn次球面調和成分とするとき

$$(1.5) \qquad f \in \mathcal{O}(\widetilde{S}(r)) \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|S_n\|_\infty^{1/n} \leq 1/r \qquad (1 < r \leq \infty),$$

$$(1.6) \qquad f \in \mathcal{O}(\widetilde{S}[r]) \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|S_n\|_\infty^{1/n} < 1/r \qquad (1 \leq r < \infty).$$

次に $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2\cdots\}$，$\Lambda_+ = \{(n,k) \in \mathbb{Z}_+^2\ ;\ n \equiv k \pmod 2$ かつ $n \geqq k\}$ とおく．任意の$F \in \mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$について$S_{n,k}(F:\ ) \in \mathbb{H}_{k,d}$が一意的に存在して

$$(1.7) \qquad F(z) = \sum_{(n,k)\in\Lambda_+} \left(\sqrt{z^2}\right)^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(F:z)$$

という形に展開できる．(1.7) の右辺は $\widetilde{B}(r)$ 上広義一様収束する．$S_{n,k}(F:\ )$ は F の (n,k)-成分とよばれる（[2] 参照）．

$\Delta_z = \sum_{j=1}^{d+1}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^2$ とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ について $\mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r)) = \{F \in \mathcal{O}(\widetilde{B}(r))\ ;\ \Delta_z F(z) = -\lambda^2 F(z)\}$，$\mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}[r]) = \underset{r'>r}{\text{ind lim}}\ \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r'))$ とおく．

§2．$\widetilde{S}$ 上の正則函数

Bessel 函数 J_ν $(\nu \neq -1, -2, \cdots)$ は次式で表わされる：

$$J_\nu(t) = (t/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

この節では次のことを証明する．

定理 2.1（[8]）$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$(\lambda/2)^{-n-\frac{d-1}{2}}\ J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda) \neq 0$$

をみたすならば制限写像 $\alpha_\lambda : F \longrightarrow F|_{\widetilde{S}}$ は $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ から $\mathcal{O}(\widetilde{S})$ への線型位相同型である．

定理 2.1 を証明するために次の補題が必要である．

補題 2.2 (cf. [2] [3] [7]). $F \in \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r))$ (resp. $F \in \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}[r])$) とし，$S_{n,k}$ を F の (n,k)-成分とする．このとき $^\forall(n,k) \in \Lambda_+$ について

$$(2.1) \qquad S_{n,k} = \frac{(i\lambda/2)^{n-k}\,\Gamma\left(k+\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+k+d+1}{2}\right)}\, S_{k,k}$$

かつ

$$(2.2) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \| S_{n,n} \|_\infty^{1/n} \le 1/r$$

(resp.

$$(2.2') \qquad \lim_{n\to\infty} \| S_{n,n} \|_\infty^{1/n} < 1/r \quad).$$

逆に $\{S_{n,k}\}_{(n,k)\in\Lambda_+}$ が (2.1), (2.2) (resp. (2.2')) をみたす球面調和函数の列 ($S_{n,k} \in \mathcal{H}_{k,d}$) であるとき，$z \in \widetilde{B}(r)$ (resp. $z \in \widetilde{B}[r]$) について

$$(2.3) \qquad F(z) = \sum_{(n,k)\in\Lambda_+} (\sqrt{z^2})^{n-k}\, \widetilde{S}_{n,k}(z)$$

とおくと (2.3) の右辺は $\widetilde{B}(r)$ 上広義一様絶対収束して $F \in \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r))$ となる (resp. (2.3) の右辺は $\mathcal{O}(\widetilde{B}[r])$ の位相で F に収束し，$F \in \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}[r])$ になる)．さらに

$$S_{n,k} = S_{n,k}(F: \ ) \qquad ((n,k)\in\Lambda_+)$$

が成り立つ．

定理2.1の証明．$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})|_{\tilde{S}} = \mathcal{O}(\tilde{S})$であるから
$\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})|_{\tilde{S}} \subset \mathcal{O}(\tilde{S})$はあきらか．

$F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$のとき(1.7)と(2.1)より$\forall z \in \mathbb{C}^{d+1}$について

$$(2.4)\qquad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda\sqrt{z^2}/2\right)^{-k-\frac{d-1}{2}} J_{k+\frac{d-1}{2}}\left(\lambda\sqrt{z^2}\right) \times \Gamma\left(k+\frac{d+1}{2}\right) \tilde{S}_{k,k}(F : z)$$

とかける．$\alpha_\lambda(F) = 0$ならば(2.4)より$\forall s \in S$について

$$(2.5)\qquad F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda/2)^{-k-\frac{d-1}{2}} J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)\,\Gamma\left(k+\frac{d+1}{2}\right) S_{k,k}(F : s) = 0$$

である．仮定から$\forall k \in \mathbb{Z}_+$について$(\lambda/2)^{-k-\frac{d-1}{2}} J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda) \times \Gamma\left(k+\frac{d+1}{2}\right) = 0$であるから(2.5)と球面調和函数の直交性より$S_{k,k}(F : s) = 0$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$. 従って$\tilde{S}_{k,k}(F : z) \equiv 0$となり(2.4)より$F \equiv 0$である．よって$\alpha_\lambda$は単射．

次に$f \in \mathcal{O}(\tilde{S})$とし$\mathbb{C}^{d+1}$上の函数$F$を次のように定義する：

$$(2.6)\qquad F(z) = \sum_{(n,k)\in\Lambda_+} \left(\sqrt{z^2}\right)^{n-k} \tilde{S}_{n,k}(z),$$

$$(2.7)\qquad \tilde{S}_{n,k}(z) = \frac{(\lambda/2)^{n+\frac{d-1}{2}}(-1)^{\frac{n-k}{2}}\tilde{S}_k(f:z)}{\Gamma(\frac{n-k}{2}+1)\Gamma(\frac{n+k+d+1}{2})J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)}.$$

$f\in\mathcal{O}(\tilde{S})$であるから(1.5)より

$$(2.8)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\|S_k(f:\ )\|_\infty^{1/k} = 0$$

十分大きいkについて

$$(2.9)\qquad \left|\Gamma\left(k+\frac{d+1}{2}\right)(\lambda/2)^{-k-\frac{d-1}{2}}J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)\right| > 1/2$$

が成り立つので(2.7)−(2.9)より

$$(2.10)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\|\tilde{S}_{k,k}\|_\infty^{1/k} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\frac{(\lambda/2)^{k+\frac{d-1}{2}}S_k(f:\ )}{\Gamma(k+\frac{d+1}{2})J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)}\right\|_\infty^{1/k}$$

$$\leq \overline{\lim_{k\to\infty}}\|S_k(f:\ )\|_\infty^{1/k} = 0$$

補題2.2,(2.7),(2.10)より$F\in\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$. $z\in\tilde{S}$のときFのつくり方から$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{S}_k(f:z)=f(z)$となるから$\alpha_\lambda$は全射である。

あきらかにα_λは連続であり,$\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$,$\mathcal{O}(\tilde{S})$はFS空間だから閉グラフ定理より$\alpha_\lambda^{-1}$も連続になる. (証明終)

注意　ある $n \in \mathbb{Z}_+$ について $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda)=0$ であるとき，$\lambda \in \mathbb{R}$ であり $n \neq k$ なる $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ について $(\lambda/2)^{-k-\frac{d-1}{2}} J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda) \neq 0$ であることが知られている．

このとき

$$\mathrm{Ker}\,\alpha_\lambda = \left\{ F(z) = \left(\lambda\sqrt{z^2}/2\right)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda\sqrt{z^2})\,\widetilde{S}_n(z);\ S_n \in \mathbb{H}_{n,d} \right\},$$

$$\mathrm{Coker}\,\alpha_\lambda = \mathbb{H}_{n,d}$$

である．

$\rho \in \mathbb{C}$ について $M_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1};\ z^2 = \rho^2 \}$ とおき

$$M_\rho(r) = M_\rho \cap \widetilde{B}(r) \qquad (0 \le |\rho| < r \le \infty)$$

$$M_\rho[r] = M_\rho \cap \widetilde{B}[r] \qquad (0 \le |\rho| \le r < \infty)$$

とおく．$\mathcal{O}(M_\rho(r))$ で $M_\rho(r)$ 上の正則函数の全体を表わし，$M_\rho(r)$ 上の広義一様収束の位相を入れる．また $\mathcal{O}(M_\rho[r]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r'>r} \mathcal{O}(M_\rho(r'))$ とする．

定理2.1と補題1.1，補題2.2より次の系が得られる．

系2.3．$\lambda, \rho \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$(\lambda\rho/2)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda\rho) \neq 0$$

をみたすとき 次の制限写像 $\alpha_{\lambda,\rho} : F \longrightarrow F|_{M_\rho}$ は 線型位相同型である.

$$\alpha_{\lambda,\rho} : \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_\rho(r)) \qquad (0 \leq |\rho| < r \leq \infty),$$

$$\alpha_{\lambda,\rho} : \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_\rho[r]) \qquad (0 \leq |\rho| \leq r < \infty).$$

(注意. $\lambda = 0$, $\rho = 1$ の場合は [3] [4] で, $\rho = 0$ の場合は [7] で 各々証明されている).

§3. $\widetilde{S}$ 上の指数型の正則函数

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の任意のノルム $N(z)$ と $A > 0$ について

$$Y_{A,N} = \{ f \in \mathcal{O}(\widetilde{S}) ; \sup_{z \in \widetilde{S}} |f(z)| \exp(-AN(z)) < \infty \}$$

とおく. $Y_{A,N}$ はノルム

$$\|f\|_{A,N} = \sup_{z \in \widetilde{S}} |f(z)| \exp(-AN(z))$$

について Banach 空間である. さらに

$$\mathrm{Exp}(\widetilde{S}:(A:N)) = \operatorname*{proj\,lim}_{A'>A} Y_{A';N} \quad (0 \leq A < \infty),$$

$$\mathrm{Exp}(\widetilde{S}:[A:N]) = \operatorname*{ind\,lim}_{A'<A} Y_{A';N} \quad (0 < A \leq \infty)$$

とおく.

この節では次の定理を証明する.

定理 3.1 ([8]). $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$(\lambda/2)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda) \neq 0$$

をみたすとき 次の制限写像 $\alpha_\lambda : F \longrightarrow F|_{\widetilde{S}}$ は線型位相同型である.

$$(3.1) \qquad \alpha_\lambda : \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:(A:L^*)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\widetilde{S}:(A:L^*))$$

$$(|\lambda| \leq A < \infty),$$

$$(3.2) \qquad \alpha_\lambda : \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:[A:L^*]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\widetilde{S}:[A:L^*])$$

$$(|\lambda| < A \leq \infty),$$

ここで

$$\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:(A:N)) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}:(A:N)),$$

$$\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:[A:N]) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}:[A:N])$$

とする.

$1<r$ について $\tilde{S}[r]=\{z\in\tilde{S}\,;\,L^*(z)=r\}$ とおく.
$S[r]\simeq O(d+1)/O(d-1)$ なので $S[r]$ 上の $O(d+1)$-invariant な測度 dz で $\int_{S[r]}1\,dz=1$ なるものが一意的に存在する.

定理3.1を証明するためにいくつかの補題を証明する.

補題3.2. 任意の $\alpha, s\in S$ について

$$(3.3)\qquad N(n,d)\int_{S[r]}\overline{P_{n,d}(z\cdot\alpha)}\,P_{k,d}(z\cdot s)\,dz$$

$$=P_{n,d}(2r^2-1)\,P_{n,d}(\alpha\cdot s)\,\delta_{n,k}.$$

証明. $s,\alpha\in S$ について

$$(3.4)\qquad F(s,\alpha)=N(n,d)\int_{S[r]}P_{k,d}(z\cdot s)\overline{P_{n,d}(z\cdot\alpha)}\,dz$$

とおくと [6] Lemma 1.3と同様の方法で

$$(3.5)\qquad F(s,\alpha)=C_n(r)\,P_{n,d}(s\cdot\alpha)\,\delta_{n,k},$$

$$(3.6)\qquad C_n(r)=N(n,d)\int_{S[r]}|P_{n,d}(z\cdot s)|^2\,dz$$

がわかる ((3.6)の右辺は $s\in S$ によらない). (3.6)より

$$(3.7)\qquad C_n(r)=\int_S C_n(r)\,ds$$

$$= N(n, d) \int_{S[r]} \int_S |P_{n,d}(z \cdot s)|^2 ds\, dz .$$

$z \in \tilde{S}$ のとき $P_{n,d}(\ \cdot z) \in H_{n,d}$, $\tilde{P}_{n,d}(s \cdot z) = P_{n,d}(z \cdot s)$ であるから

$$(3.8) \qquad N(n, d) \int_S |P_{n,d}(z \cdot s)|^2 ds = P_{n,d}(\|z\|^2).$$

$z \in S[r]$ のとき $L^*(z)^2 = \frac{1}{2}(\|z\|^2 + 1) = r^2$ より $\|z\|^2 = 2r^2 - 1$ となる. このことと (3.5)～(3.8) より (3.3) が得られる.

(証明終)

補題3.3. $f \in \mathcal{O}(\tilde{S})$ のとき f の n 次球面調和成分は次式で表わされる.

$$(3.9) \qquad S_n(f : s) = \frac{N(n, d)}{P_{n,d}(2r^2 - 1)} \int_{S[r]} f(z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)}\, dz \qquad (s \in S)$$

証明. $\sum_{k=0}^{\infty} S_k(f : z)$ は $S[r]$ 上 f に一様収束するので

$$(3.10) \qquad \int_{S[r]} f(z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)}\, dz$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S[r]} \tilde{S}_k(f : z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)}\, dz .$$

$\{P_{k,d}(\alpha_j \cdot\ )\}_{1 \le j \le N(k,d)}$ が $H_{k,d}$ の基底になるような

$\alpha_1, \cdots, \alpha_{N(k,d)} \in S$ が存在するので，このことと，(3.10), (3.3) から (3.9) がわかる． (証明終)

補題 3.4. $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$, $\tilde{S}_{k,k} = \tilde{S}_{k,k}(F: \ )$ とする時

$$(3.11) \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} (k! \| \tilde{S}_{k,k} \|_{L^*})^{1/k} \leq A \qquad (|\lambda| \leq A < \infty)$$

(resp.

$$(3.11') \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} (k! \| \tilde{S}_{k,k} \|_{L^*})^{1/k} < A \qquad (|\lambda| < A \leq \infty))$$

ならば $F \in Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (A : L^*))$ (resp. $Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [A : L^*])$) である．ここで $\|g\|_{L^*} = \sup\{|g(z)| ; L^*(z) \leq 1\}$ とする．

証明. $\lambda = 0$ の場合は [4] Lemma 4.2 よりあきらか．

$\lambda \neq 0$, $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ かつ $\{\tilde{S}_{k,k}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ が (3.11) をみたすとすると $^\forall A' > A$ について ある $C_{A'} > 0$ が存在して

$$(3.12) \quad |\tilde{S}_{k,k}(z)| \leq C_{A'} (k!)^{-1} A'^k \qquad (L^*(z) \leq 1)$$

となる．(1.7) と (3.12) より $z \in M_0$ のとき

$$(3.13) \quad |F(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{S}_{k,k}(z)| \leq C_{A'} \exp(A' L^*(z)).$$

(3.13) と [6] Corollary 3.4 より $F \in Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (A : L^*))$ が

わかる．後半の証明も同様にできる。　　　　　（証明終）

定理3.1の証明．$|\lambda| \leq A < \infty$ とせよ．$\alpha_\lambda(\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (A : L^*))) \subset \mathrm{Exp}(\tilde{S} : (A : L^*))$ はあきらか．また定理2.1より α_λ は単射である．

$f \in \mathrm{Exp}(\tilde{S} : (A : L^*))$ とすると $\forall A' > A$ についてある $C_{A'} > 0$ が存在して

$$(3.14) \quad |f(z)| \leq C_{A'} \exp(A' L^*(z)) \quad \text{on } \tilde{S}$$

となる．定理2.1より $\alpha_\lambda(F) = f$ なる $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ が一意的に決まり (2.7) より

$$(3.15) \quad \tilde{S}_{k,k}(F : z) = \frac{(\lambda/2)^{k+\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{d-1}{2}) J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)} \tilde{S}_k(f : z)$$

となる．$t \geq 1$ について

$$(3.16) \quad P_{n,d}(t) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (t + \sqrt{t^2-1}\, x)^n (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx$$

であるので (3.16) より $\forall r > 1$ について

$$(3.17) \quad P_{n,d}(2r^2-1) \geq 2^{2n} C_d (n+d)^{-d} (r-1)^{2n}$$

(C_d は定数) がいえる. (3.6)−(3.9), (3.14), (3.17) と Schwarz の不等式より

$$(3.18)\qquad \|S_n(f:\ )\|_\infty \leqq \left\{\frac{N(n,d)}{I_{n,d}(2r^2-1)}\right\}^{1/2} \sup_{z\in S[r]}|f(z)|$$

$$\leqq C_d' \frac{\sqrt{N(n,d)(n+d)^d}}{2^n(r-1)^n} e^{A'(r-1)} \qquad (\forall r>1)$$

(C_d' は定数).
(3.18) で $r=\frac{n}{A'}+1$ おき Stirling の公式を使うと

$$(3.19)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|S_n(f:\ )\|_\infty)^{1/n} \leqq A'/2 \qquad (\forall A'>A).$$

(3.15), (3.19), (2.9) より

$$(3.20)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|S_{n,n}(F:\ )\|_\infty)^{1/n} \leqq A/2.$$

[7] (2.21) および Remark 2.2 から

$$(3.21)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|\tilde{S}_{n,n}(F;\ )\|_{L^*})^{1/n} = 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|S_{n,n}(F;\ )\|_\infty)^{1/n}$$

がいえるので (3.20), (3.21) より

$$(3.22)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|\tilde{S}_{n,n}(F:\ )\|_{L^*})^{1/n} \leqq A.$$

補題3.4と (3.22) より $F\in \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:(A:L^*))$ となるので, α_λ は全射である.

あきらかに α_λ は連続で，$Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:(A:L^*))$，$Exp(\widetilde{S}:(A:L^*))$ は FS 空間であるから 閉グラフ定理より α_λ^{-1} も連続である．よって (3.1) が示せた．(3.2) も同様に証明できる．（証明終）

注意．$Exp(\widetilde{S}:(A:L)) = Exp(\widetilde{S}:(2A:L^*))$ かつ $Exp_0(\mathbb{C}^{d+1}:(A:L)) = Exp_0(\mathbb{C}^{d+1}:(2A:L^*))$ がいえるので 定理3.1より 次の制限写像は 線型位相同型である．

$$\alpha_0 : Exp_0(\mathbb{C}^{d+1}:(A:L)) \xrightarrow{\sim} Exp(\widetilde{S}:(A:L)) \quad (0 \leq A < \infty),$$

$$\alpha_0 : Exp_0(\mathbb{C}^{d+1}:[A:L]) \xrightarrow{\sim} Exp(\widetilde{S}:[A:L]) \quad (0 < A \leq \infty),$$

(cf. [8] Corollary 3.5).

References

[1] L. Drużkowski, Effective formula for the cross norm in the complexified unitary spaces, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń., Prace Mat. 16 (1974), 47-53.

[2] M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, Tokyo J. Math. 3 (1980), 1-35.

[3] M. Morimoto, hyperfunctions on the sphere, Sophia

Kokyuroku in Mathematics, 12, Sophia University, Department of Math., Tokyo, 1982 (in Japanese).

[4] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

[5] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math., 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[6] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, Tôhoku Math. J., 38 (1986), 93-105.

[7] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math. 10 (1987), 93-105.

[8] R. Wada, Holomorphic functions on the complex sphere, preprint.