数理解析研究所講究録
660巻 1988年 123-131

Super KP 系, OSp-Super KP系

早大・理工　上野喜三雄
(Kimio UENO)

§0. SKP (Super KP)系, Osp (Ortho-Symplectic) SKP系について基本的なことが固ったので報告する。この仕事は, 山田裕史氏(琉球大学), 池田薫氏(都立大學, 大学院生)の協同によるもので, 本論文は現在(昭和63年4月の時点)執筆中である。

§1. KP, BKP, CKP系についておさらいしておく。詳しいことはDJKM (伊達, 神保, 柏原, 三輪)の一連の論文を参照して欲しい。

(x, t)を空間-時間変数, ただし, $t=(t_1, t_2, t_3, \cdots)$として, $R=\mathbb{C}[[x,t]]$ に係数をもつx変数の(擬)微分作用素環を$\mathcal{D}_R$, $\mathcal{E}_R$と記す。

$$\mathcal{D}_R := R[\tfrac{\partial}{\partial x}], \quad \mathcal{E}_R := R(((\tfrac{\partial}{\partial x})^{-1})) .$$

KP系をSato 方程式により定義する:

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

ここで, Wは波動作用素,

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j}, \quad w_j \in \mathcal{R}, \quad w_0 = 1,$$

また, $B_n := \left(W\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n W^{-1}\right)_+ \in \mathcal{D}_R$ とする。

波動函数 $w(x,t,\lambda)$ は，スペクトル変数λについての形式的函数として，次により定義される：

$$\begin{aligned} w(x,t,\lambda) &= W\left(\exp\left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n\right)\right) \qquad (1) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\lambda^{-j}\right)\exp\left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right) \end{aligned}$$

波動作用素Wの形式的随伴作用素W^*,

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j} w_j(x,t)$$

を持ち込むことで，双対波動函数

$$w^*(x,t,\lambda) = \left(W^*\right)^{-1}\left(\exp\left(-x\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right)\right) \qquad (2)$$

が定義される。

$\mathcal{E}_R$ における双線型留数公式（Bilinear Residue Formula, BRF）とは次の定理を言う。

定理１（BRF in $\mathcal{E}_R$）. $P = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$, $Q = Q(x, \frac{\partial}{\partial x}) \in \mathcal{E}_R$ とする。このとき，次の(i), (ii) は同値である。

(i) $PQ \in \mathcal{D}_R$

(ii) $^\forall x, x'$ について，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})(e^{x\lambda}) \cdot Q^*(x', \tfrac{\partial}{\partial x'})(e^{-x'\lambda})\right) = 0.$$

これを用いて，KP系の波動函数，双対波動函数を特徴付けることができる。

<u>定理2（BRF for the KP）.</u> $w(x,t,\lambda)$, $w^*(x,t,\lambda)$ は各々(1), (2)で定義される形式的函数とする。このとき，これらがKP系の波動，双対波動函数である為の必要十分条件は，

$$\mathop{Res}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ \ w(x,t,\lambda)\cdot w^*(x',t',\lambda)\right)=0$$

が任意の (x,t), (x',t') について成立することである。

定理1の証明は色々有ろうが，その中で最も本質をついたものは野海正俊氏（上智大学）による，Laplace変換の双対性を活用する証明であろう。（私は，同氏から個人的に教えて頂いた。）

次に，BKP, CKPについてまとめておく。これらの系を考えるときは，偶数番目の時間発展を凍結する； $t_{2n}=0$ $(n=1,2,\cdots)$，従って，$t=(t_1,t_3,\cdots)$。その上で，

$$(\mathrm{BKP})\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}W^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=W^{-1}$$

$$(\mathrm{CKP})\qquad W^*=W^{-1}$$

という条件を課す。BKP, CKPに関する双線型留数公式は，波動函数だけの形で与えられる。

<u>定理3（BRF for the BKP, CKP）</u> (1)の型をした形式的函数 $w(x,t,\lambda)$ が，BKP, CKP の波動函数である為の必要十分条件は

$$(\mathrm{BKP})\qquad \mathop{Res}_{\lambda=\infty}\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\ w(x,t,\lambda)\,w(x',t',-\lambda)\right)=1$$

$$(\mathrm{CKP}) \quad \mathop{\mathrm{Res}}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ w(x,t,\lambda)\,w(x',t',-\lambda)\right)=0$$

が任意の (x,t), (x',t') に対して成立することである。

§2. SKP系とOSp-SKP系

(x,θ) を $(1|1)$ 次元 super space での座標，$t=(t_1,t_2,\cdots)$ を super time variables, x, t_{2l} が even で，θ, t_{2l-1} が odd である。A を background となる supercommutative な代数（係数体の役を担う）として，(formal regular) super field のつくる代数を

$$\mathcal{S}=\mathbb{C}[[x,\theta,t]]\otimes A$$

とおく。$\mathcal{S}$ はもちろん自然なやり方で supercommutative な代数となる。$\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\bar{0}}\oplus\mathcal{S}_{\bar{1}}$ をその $\mathbb{Z}_2$ gradation とする。$\mathcal{S}$ においては微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ の平方根が定義される；$D=\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta\frac{\partial}{\partial x}$ $D^2=\frac{\partial}{\partial x}$。$\mathcal{S}$ に係数をもつ supermicrodifferential 作用素の代数を

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}:=\mathcal{S}((D^{-1}))$$

により定義する。superdifferential 作用素の方は

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}:=\mathcal{S}[D]$$

で定義される。代数構造は言うまでもなく super Leibniz 法則で与えられ，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ は super かつ noncommutative な代数となる。$\mathcal{S}$ には，時間発展を記述する supervector

場,

$$D_{2l}=\frac{\partial}{\partial t_{2l}}, \quad D_{2l-1}=\frac{\partial}{\partial t_{2l-1}}+\sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1}\frac{\partial}{\partial t_{2l+2k-2}}$$

が作用する。これらが,

$$[D_{2l}, D_{2k}]=0=[D_{2l}, D_{2k-1}], \quad [D_{2l-1}, D_{2k-1}]_+=2D_{2l+2k-2}$$

等の交換・反交換関係をみたすことに注意せよ。

SKP系の Sato表示は次で与えられる:

$$D_n(W)=\varepsilon_n(B_n\cdot W-W\cdot D^n) \quad (n=1,2,\cdots) \quad \text{-- (3)}$$

ただし,Wは super波動作用素

$$W=\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,\theta,t)D^{-j}, \quad w_j\in \mathcal{S}_{\underline{j}}, \quad w_0=1$$

であり,

$$B_n=(W\cdot D^n W^{-1})_+\in \mathcal{D}_s(n), \quad \varepsilon_n=(-)^{n(n+1)/2}$$

である。SKP系の解をどの様に積分し,解空間がUSGM(普遍super Grassmann 多様体)になる等の事柄については上野-山田の論文を参照して頂くことにし,ここでは次のことに注意する。 USGM は UGM×UGM上の fibre空間としての構造をもっているが,それに対応して次の命題が成立する。

<u>命題4.</u> SKP系の解を,2つの独立なKP系の解に自然に射影することができる。

それを図式的に

$$\begin{array}{c}\text{SKP系}\\ \downarrow \varpi \\ (\text{KP系},\ \text{KP系})\end{array}$$

と表現することしよう。自然な射影ϖは次の様に構成される。まず，$\mathcal{S}' := \mathbb{C}[[x, t]]$，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'(((\frac{\partial}{\partial x})^{-1}))$ とおく。$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の 2-spinor表示とは次で定義される写像πのことである。

$$\pi : \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathrm{Mat}(1|1;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$$

ただし，

$$\pi(D^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \pi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(f) = diag(f, f) \quad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{0}}),$$

$$\pi(f) = diag(f, -f) \quad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{1}})$$

これにより，πは $\mathcal{S}'$- superalgebra iso. となる。SKP系の Sato方程式 (3) を 2-spinor 表現して，さらに，$\mathrm{Mat}(1|1;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$ の中で body part を取れば，ϖが得られる。

さて，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$におけるBRF を定式化する。その為に，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$における形式的随伴を定義しなければならない： $\Delta(dx/d\theta)$ を (x, θ)空間上での super volume formとする。これは odd な量で，$f(x, \theta) = p(x) + \theta q(x)$ を compact 台をもつ C^∞ super field とするとき，その積分は

$$\int \Delta(dx/d\theta)\, f(x, \theta) := \int q(x)\, dx$$

により定義される。$P=P(x,\theta,D)\in\mathcal{E}_S$ の形式的随伴は，通常の場合と同様に super 積分を経由して定義される：

$$\int\Delta(dx/d\theta)\,Pf\cdot g=\int\Delta(dx/d\theta)\,f\cdot P^*g$$

$f=f(x,\theta)$，$g=g(x,\theta)$ は even な super field とする。例えば，

$$(wD^n)^*=(-)^{a\cdot n}\varepsilon_n D^n\cdot w\qquad(w\in S_{\underline{a}},\ n\in\mathbb{Z})$$

が成立し，より一般的には，

$$(PQ)^*=(-)^{ab}Q^*\cdot P^*\qquad(P\in\mathcal{E}_{S,\underline{a}},\ Q\in\mathcal{E}_{S,\underline{b}})$$

が成立する。従って super 波動作用素 W に対して，

$$W^*=\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\varepsilon_{-j}D^{-j}\cdot w_j(x,\theta,t)$$

となっている。super 波動函数（field と言うべきか？）及びその双対は

$$w(x,\theta,t,\lambda,\xi)=W(e^H)$$
$$w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi)=(W^*)^{-1}(e^{-H})\qquad(4)$$

と与えられる。ただし，

$$H=H(x,\theta,t,\lambda,\xi)=x\lambda+\sum_{l=1}^{\infty}(-)^l t_{2l}\lambda^l+(\xi+h)(\theta+\lambda^{-1}h)$$

$$h=\sum_{l=1}^{\infty}(-)^l t_{2l-1}\lambda^l$$

である。(λ,ξ) は super spectral parameter である。また，

$$D^2(e^H)=\lambda e^H,\quad D_n(e^H)=\varepsilon_n D^n(e^H)$$

$$D^{-2j}(e^H)=\lambda^{-j}e^H,\quad D^{-2j+1}(e^H)=\lambda^{-j}(\lambda\theta-\xi-h)e^H$$

に注意する。Super Laplace 変換の duality を考察すること

により定理1, 2 の super 版が得られる。

定理5 (BRF in $\mathcal{E}_s$). $P=P(x,\theta,D)$, $Q=Q(x,\theta,D)$ $\in(\mathcal{E}_s)_0$ とする。次の(i), (ii)は同値である。

(i). $PQ\in\mathcal{D}_s$

(ii). $\underset{\lambda=\infty}{\mathrm{Res}}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\ P(x,\theta,D)(e^{x\lambda+\xi\theta})\cdot Q^*(x',\theta',D')(e^{x'\lambda+\xi\theta'})\right)=0$

が任意の (x,θ), (x',θ') について成立する。

Remark. $e^{x\lambda+\xi\theta}$ が super Laplace 変換の核である。

定理6 (BRF for the SKP). $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$, $w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ を(4)の型をした super fields とする。これらが SKP 系の super 波動函数及びその双対である為の必要十分条件は,

$$\underset{\lambda=\infty}{\mathrm{Res}}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\ w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\,w^*(x',\theta',t',\lambda,\xi)\right)=0$$

が任意の (x,θ,t), (x',θ',t') に対して成立することである。

次に OSp-SKP 系について述べよう。BKPのときと同様に, $t_{4n}=t_{4n+1}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ として時間発展のセクターを限定する; $t=(t_{4n+2},\ t_{4n+3})_{n=0,1,\cdots}$. その上で, super 波動作用素に対して次の symmetry を課す

$$D^{-1}W^*D=W^{-1}\qquad(5)$$

次の命題はこの系の名前の由来を明らかにする。

命題7.

$$\begin{array}{c}\text{OSp - SKP系}\\ \downarrow \varpi \\ (\text{BKP系}, \text{CKP系})\end{array}$$

図式の意味は明らかであろう。BKP系は $o(\infty)$ を無限小変換群にもち，CKP 系のそれは $sp(\infty)$ である。そして OSp-SKP系は super Lie algebra $osp(\infty|\infty)$ を無限小変換群にもつのである。

最後に OSp-SKP 系に対する定理5の拡張を述べてこの報告をしめくくる。

定理8（BRF for the OSp-SKP） (4)の型をした super field $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ が OSp-SKP系の super 波動函数である為の必要十分条件は，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta\,(d\lambda/d\xi)\; w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\, v(x',\theta',t,\lambda,\xi)\right)=1$$

が任意の (x,θ,t), (x',θ',t') に対して成立することである。ただし，$v(x,\theta,t,\lambda,\xi)=(W\cdot D^{-1})(e^{-H})$ である。