数理解析研究所講究録
660巻 1988年 84-103

自己双対および超ケーラー計量に対するタウ函数の類似について

京大数理解析研究所　　高崎金久
(RIMS, Kyoto Univ.)　　(TAKASAKI Kanehisa)

1．動機

4次元における自己双対計量およびその4N次元への拡張である超ケーラー計量は自己双対ヤン・ミルズ場などのゲージ場とならんで多次元の積分可能系の重要な例を与えている．ところで，”1次元”の積分可能系であるソリトン方程式の場合にはタウ（τ）函数と呼ばれるものが基本的な役割を演じており，グラスマン多様体のプリュッカー座標，広田の双線型形式，無限次元リー代数，テータ函数などとの関係はすべてタウ函数を通じて理解するのが最も自然である．当然、多次元の場合にはどうなのかが気になる．残念ながら，これまでにいろいろと試みた限りでは多次元の場合にはタウ函数の”正確な対応物”を構成することは非常に難しく，おそらくそんなものは存在しないであろうと思わせる根拠がいくつか見いだされている．これは多次元のグラスマン多様体のプリュッカー座標につきまとう諸々の病的現象と密接に絡んでいる（数理研短期共同研究「D可群と非線型可積分系」，1987年6月）．しかしながら，タウ函数と”類似した働き”をするものを作ることは出来るかも知れない．表題に掲げたテーマはこのことに関するものである．

2．超ケーラー計量

超ケーラー計量の微分幾何学的な定義や物理的な意義，twistor との関係などについては［H-K-L-R ］を参照されたい．代数解析的な分析には[Ple]，[Ple-Boy]，[Gindikin]のような枠組の方が便利であるので（4次元の場合の代数解析的な考察については[Tak1-2]参照），以下その道具立てを準備する．

まず基本的な対象は４Ｎ次元の複素多様体とその上のいわゆる ”複素計量” である．微分幾何学的な理論構成では勿論４Ｎ次元の実多様体とその上のリーマン計量を考えるのであるが，我々はこれをいったん複素領域へ解析接続したものを基本的なものと見なすのである．そのとき計量に対応するのは同次元の複素多様体の接束上の非退化な正則２次形式で，実切断面へ制限したときにもとの正定値２次形式を回復する．しかしながら一度そのような複素の世界へ視野を広げると，実は超ケーラー性は実多様体の局所座標を機械的に複素座標に置き換えることによって”複素計量”に対する複素変数の微分方程式に焼き直すことが出来て，必ずしも実切断面が無い場合でも少なくとも微分方程式論の対象にすることが出来る．そして実計量を欲しいならば，そのような複素領域での微分方程式の解のうちから適当な実切断の上で正定値２次形式になるようなものを選んでくればよい，というような二段構えの問題設定を行うことが出来る．

具体的には次のようになる．４Ｎ次元の実多様体上のリーマン計量は局所的には余接束のなかで正規直交基底$\omega^a$$(1\leq a\leq 4N)$をとることによって

$$g = \delta_{ab}\omega^a\omega^b$$

と書けるが（上下にある同じ添字はアインシュタインの規約に従って総和する），ここで $e^a := (\omega^{2a-1} + \sqrt{-1}\omega^{2a})/\sqrt{2}$，$\bar{e}^a := (\omega^{2a-1} - \sqrt{-1}\omega^{2a})/\sqrt{2}$ という複素1次結合をとると

$$g = e^1\bar{e}^1 + e^2\bar{e}^2 + \cdots + e^{2N-1}\bar{e}^{2N-1} + e^{2N}\bar{e}^{2N}.$$

e^aと$\bar{e}^a$は互いに複素共役だが，ここで複素の世界へ移るとこれらは4N次元複素多様体の上の正則1次微分形式で互いに1次独立となる．この様に最後の式を複素多様体の上で読み替えたものが"複素計量"に他ならない．この段階で実多様体から来たといういきさつを忘れてしまってもよい，というのが上で注意したことである．

以下我々は実の世界へ戻る議論は一切せずにもっぱら複素の世界で，あるいはさらに形式的変数の世界で，議論を進める．

超ケーラー性を複素計量に対する微分方程式に書き直すやり方は [Ple]，[Ple-Boy]，[Gin] が与えているので，要点のみまとめておく：

1） まず，e^a，$\bar{e}^a$ $(1 \le a \le 2N)$ に改めて次のように番号を付け直す．

$$\begin{aligned} &e^{11} := e^1,\ e^{12} := -\bar{e}^2,\ e^{33} := e^3,\ e^{34} := -\bar{e}^4,\ \ldots \\ &e^{21} := e^2,\ e^{22} := \bar{e}^1,\ e^{43} := e^4,\ e^{44} := \bar{e}^3,\ \ldots \end{aligned}$$

この様にして新たに番号付けられた$e^{A\alpha}$ $(A = 1, \ldots, 2N,\ \alpha = 1, 2)$を用いると計量は

$$g = \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\alpha\beta}e^{A\alpha}e^{B\beta}$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon_{34} = -\varepsilon_{43} = \ldots = 1,\ \text{他の成分は}0$$

と書き直せる．

2） ε_{AB}，$\varepsilon_{\alpha\beta}$はそれぞれ２Ｎ，２次元のシンプレクティク構造を記述する基本的な交代形式である．これを用いてA，B，Γ，．．．，α,β，γ，．．．，のような添字（”シンプレクティク添字”と呼ぶことにする）の上げ下げを

$$\xi_A := \varepsilon_{AB}\xi^B \ , \quad \eta^B := \eta_A \varepsilon^{AB} \quad (\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB})$$

というように行う．これは計量テンソル g_{ij}によって”テンソル添字”を上げ下げするテンソル解析の記号法に習うものだが，注意すべきは，g_{ij} が対称形式であるのに対して ε_{AB}，$\varepsilon_{\alpha\beta}$ が交代形式であることであって，このことから例えば，$\xi_A\eta^A = -\xi^A\eta_A$ というように，テンソル解析にはない符号が出てくるので気を付けて欲しい．

3） 計量を上の形に書く $e^{A\alpha}$の与え方は一意的ではなく，左右からシンプレクティク群に値をとる函数（$h^A{}_B$），（$k^\alpha{}_\beta$）（つまり $h^A{}_\Gamma h^B{}_\Delta \cdot \varepsilon^{\Gamma\Delta} = \varepsilon^{AB}$，$k^\alpha{}_\gamma k^\beta{}_\delta \ \varepsilon^{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta}$ を満たす）を掛けて

$$e^{A\alpha} \to h^A{}_B e^{B\beta} k^\alpha{}_\beta$$

と変換する自由度が残っている．これは一種のゲージ変換とみなせる．またこのような変換で移りあう１次微分形式の基底のみを考えるということは一つのＧ構造（G =Sp(N) ×Sp(1))を指定することにほかならない（Ｇ構造については[Gol] などを参照されたい）．

4） ２次外微分形式

$$\omega^{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\varepsilon_{AB} e^{A\alpha} \wedge e^{B\beta} \quad (\alpha, \beta \text{について対称})$$

を導入する．前述の引用文献によれば，超ケーラー計量（前述の複素計量の意味での）に対しては上の左右二種類のゲージ変換のうち右側のゲ

ージ変換をうまく選んで $e^{A\alpha}$ を取り直すことにより

$$d\omega^{\alpha\beta} = 0 \quad (d \text{ は } e^{A\alpha} \text{ が定義されている多様体 } X \text{ 上の外微分})$$

が成り立つようにでき，逆にこの外微分方程式の下で計量は超ケーラーになる．従ってこのあとの議論はこの外微分方程式を基礎にして進める．

5） [Ple] は４次元の場合にこの外微分方程式をさらに部分的に解くことによって未知函数が１個の微分方程式に帰着できることを示した．この手順は一般の超ケーラー計量へも（少し複雑になるが）拡張できるが，[Ple] のように直接に上の外微分方程式を操作するよりは[Ple-Boy] のようにその背後に隠れたある構造を利用して行う方が見通しがよい．次節ではこのことについて論じる．

３．ポテンシャル函数系

積分可能系の理論でしばしばやるように，新しい形式的変数 λ （スペクトルパラメーター）を導入して微分形式 $\omega^{\alpha\beta}$ の１次結合

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &:= \omega^{11} + \lambda\omega^{12} + \lambda\omega^{21} + \lambda^2\omega^{22} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}(e^{A1} + e^{A2}\lambda)\wedge(e^{B1} + e^{B2}\lambda)\end{aligned}$$

を作る（[Gin] で言うところの "bunch of two-forms"）．すると前節で示した外微分方程式系は

$$\hat{d}\omega(\lambda)\wedge\hat{d}\lambda = 0 \quad (\hat{d} \text{ は } X\times\mathbb{P}^1,\ \lambda\in\mathbb{P}^1, \text{ の上の外微分})$$

という１個の方程式にまとまる．以後は λ をもっぱらパラメーターと

して扱うから，

$$d\lambda = 0$$

と解釈してこの外微分方程式を単に

$$d\omega(\lambda) = 0$$

と書くことにする．

$\omega(\lambda)$は従ってパラメーター付きの閉微分形式で，しかも $\omega(\lambda)^{\wedge N} \neq 0$, $\omega(\lambda)^{\wedge(N+1)} = 0$ （ $\omega(\lambda)^{\wedge k}$ は $\omega(\lambda)$ の k重の外積をあらわす）であるから，[Tak1]で4次元の場合にやったように，Darboux の定理が使えて

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2}\varepsilon_{AB} du^A(\lambda) \wedge du^B(\lambda)$$

というような X 上の函数 $u^A(\lambda)$（パラメーター λ に依存する）の存在が判る．但し，Darboux の定理は局所的存在に関するものであるから，$u^A(\lambda)$ の存在域は $X \times \mathbb{P}^1$ のなかの一般には小さい領域である．$X \times \mathbb{P}^1$ の各点毎にその近傍でこのような函数系が存在する．

我々はおもに $\mathbb{P}^1$ 上での局所性を考える．特に $\lambda = \infty$ の近くで存在する $u^A(\lambda)$は次のようにローラン展開される．

$$u^A(\lambda) = \Sigma_{-\infty<n\leq 1}\ u^A{}_n \lambda^n \quad , \quad u^A{}_n \text{は X 上の函数．}$$

ここで λ についての巾指数が 1 までであるのは $\omega(\lambda)$が $\lambda = \infty$ で2位の極を持つことによる．$u^A(\lambda)$ は当然方程式

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{AB} du^A(\lambda) \wedge du^B(\lambda)\right)_- = 0$$

を満たす．ここで $(\ \ )_-$ は λ のローラン級数から負巾の部分を取り出すことをあらわす．同様にして $(\ \ )_+$ で正巾の部分をあらわすことにする．

$$(\Sigma\ a_n\lambda^n)_+ := \Sigma_{n\geq 0}\ a_n\lambda^n,\quad (\Sigma\ a_n\lambda^n)_- := \Sigma_{n<0}\ a_n\lambda^n\ .$$

4次元の場合に[Tak1]で詳しく論じたように，この最後の方程式は元の外微分方程式と実質的にはおなじ内容の情報を持っている．つまり，$u^A(\lambda)$ がこの方程式を満たす上の形のローラン級数であれば，逆に

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{AB}du^A(\lambda)\wedge du^B(\lambda) = \omega(\lambda)$$

となるような1次微分形式系 $e^{A\alpha}$が存在する．それ等は一意的ではないが，不定性は前節で注意した一種の”ゲージ”変換のうち左側から作用するもので尽くされる．このゲージをうまく選ぶと

$$e^{A1} = du^A_0 + \frac{\partial u_{B,-1}}{\partial u_{A,0}}\,du^B{}_1\ ,\quad e^{A2} = du^{A1}$$

となる（前述のシンプレクティク添字の上げ下げの記法を使っている）．但しここで $u^A{}_0$, $u^A{}_1$ を独立変数に，$u^A{}_{-1}$, $u^A{}_{-2}$, ... を従属変数に選んでいる．これが許されるのは $u^A(\lambda)$に対する方程式を λ について展開したもの

$$\Sigma_{i+j=n}\varepsilon_{AB}du^A_i \wedge du^B_j = 0 \qquad (n<0)$$

から特に $(\wedge^{2N}_{A=1}du^A_0)\wedge(\wedge^{2N}_{A=1}du^A_1) = (\wedge^{2N}_{A=1}e^{A1})\wedge(\wedge^{2N}_{A=1}e^{A2})$が従うが，仮定の1次独立性によって右辺は消ず，従って u^A_0, u^A_1 を独立変数（局所座標）に選べるからである．

こうして我々の考察の対象は最終的に上の $u^A(\lambda)$あるいはそのローラン係数 u^A_n に対する外微分方程式系に帰着する．これらの独立・従属変数は本来の幾何学的変数である計量やそれをあらわすのに余接束内にとった1次微分形式の基底から見れば ”隠れた” 変数であって，微分方程式を解くこと（Darboux の定理）によって初めて姿をあらわす．その意味でこれらを ”ポテンシャル” と呼ぶことが出来る．積分可能

系の理論ではこの様な量を見つけることが非常に大切な作業になっている．[Ple-Boy] は（4次元に於て）この様に問題を書き換えた後，さらにこの背後に新しいポテンシャルの無限列が存在することを示し，そのうちいくつかは既に[Ple] がもっと直接的な議論で見いだしていたものに他ならないことを注意した．その一つ，[Ple] の記号で Θ と書かれるものが我々があとで ”タウ函数” の類似物として議論するものの原型である．ここまでの設定に即して言えば，Θ は次のような関係式で定義される．

$$d\Theta = \varepsilon_{AB}u^{A}_{-2}du^{B}_{1} + \varepsilon_{AB}u^{A}_{-1}du^{B}_{0}$$

この式の右辺はローラン係数 u^{A}_{n} に対する前述の方程式の下では閉形式になっているので，このような Θ は確かに（局所的にだが）積分定数の不定性をもって存在する．u^{A}_{0}, u^{A}_{1}を独立変数にとっていることからこの関係式は

$$u^{A}_{-1} = \frac{\partial\Theta}{\partial u_{A,0}} = \varepsilon^{AB}\frac{\partial\Theta}{\partial u^{B}_{0}}, \quad u^{A}_{-2} = \frac{\partial\Theta}{\partial u_{A,1}} = \varepsilon^{AB}\frac{\partial\Theta}{\partial u^{B}_{1}}$$

とも書ける．この表示式を使うことで[Ple] が4次元の場合に Θ に対して導いたのと同様の方程式を引き出せる．そのためには[Tak1]でやったように $u^{A}(\lambda)$に対する方程式を別の形に変形しておくと見通しがよくなるのだが，本題から外れるばかりであるし，実質的にはおなじことをあとでもう少し系統的に扱うので，ここではこれ以上の説明を省く．

4．ヒエラルヒーの導入

ソリトン方程式の場合を思い出してみると([Sat-Sat], [Jim-Miw])，タウ函数の導入のためには ”ヒエラルヒー”，つまり元の微分方程式

と矛盾無く連立させられる無限個の補助方程式の系（それは元の方程式にはなかった独立・従属変数を含む）の存在が必須であった．4次元の自己双対計量の場合にはそのようなヒエラルヒーは既に見いだされている[Tak2]．それを超ケーラー計量に拡張することはたやすい．

前節で見たように，我々の考察の対象は結局 $u^A(\lambda)$ に対する微分方程式

$$(\varepsilon_{AB} du^A(\lambda) \wedge du^B(\lambda))_- = 0$$

に帰するわけだが（$\frac{1}{2}$ はどうでもよろしい），ここで改めて $u^A(\lambda)$ を

$$u^A(\lambda) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} u_n^A \lambda^n$$

という形式的ローラン級数に置き換えて，

u_n^A，$n \geq 0$，を独立変数，u_n^A，$n < 0$，を従属変数

とみなして上の方程式を考える．これはローラン係数について展開して

$$\Sigma_{i+j=n} \varepsilon_{AB} du_i^A \wedge du_j^B = 0 \quad (n < 0)$$

という無限連立外微分方程式系を考えると言ってもおなじことである．我々はこれを元の方程式に対するヒエラルヒーとして採用する．

この方程式系は確かに元の方程式にない独立変数 u_2^A，u_3^A，...を持ち（従属変数は変わらない），これらを0に置いた所では元の方程式を回復する．元の方程式と矛盾無く連立させられるということは u_0^A，u_1^A に関する微分だけを含む新たな方程式がこのヒエラルヒーからは出てこないという意味だが，これも確かめられる．そういうことを調べるには上の外微分方程式の形から普通の偏微分方程式の形に書き直しておく方が都合がよい．

外微分方程式から偏微分方程式への書き換えは４次元の自己双対の場合の議論[Tak2]に習って実行することが出来る．実際にはいろいろ見かけの異なる形に書き換えることが出来，それぞれに面白い解釈を与えられるのだが[Tak1-2]，ここでは結果のみ記しておく．以下では

$$\{f,\ g\} := \varepsilon^{AB}\frac{\partial f}{\partial u_0^A}\frac{\partial g}{\partial u_0^B} \qquad \text{（ポアソン括弧）}$$

$$H(f) := \varepsilon^{AB}\frac{\partial f}{\partial u_0^A}\frac{\partial}{\partial u_0^B} \qquad \text{（ハミルトンヴェクトル場）}$$

という記号を積極的に用いる（その意義については[Tak1]参照）．

<u>命題</u>．次の方程式 i)-iiv) は互いに同値である：

i)　$\left(\varepsilon_{AB}\, du^A(\lambda) \wedge du^B(\lambda) \right)_- = 0$;

ii)　$\left(\dfrac{\partial u_A(\lambda)}{\partial u_{B,0}}\, du^A(\lambda) \right)_- = 0$, $\{u^A(\lambda),\ u^B(\lambda)\} = \varepsilon^{AB}$;

iii)　$du^A(\lambda) = \dfrac{\partial u^A(\lambda)}{\partial u^B{}_0}\, e^B(\lambda)$, $\{u^A(\lambda),\ u^B(\lambda)\} = \varepsilon^{AB}$,

ここで　$e^A(\lambda) := (\partial u_B(\lambda)/\partial u_{A,0} \cdot du^B(\lambda))_+$;

iv)　$\partial_A^n(\lambda)(\ u^B(\lambda)\ ) = 0$, $\{u^A(\lambda),\ u^B(\lambda)\} = \varepsilon^{AB}$,

ここで　$\partial_A^n(\lambda) := \partial/\partial u_n^A - \lambda\partial/\partial u_{n-1}^A + H(u_{A,-n})$;

v)　$\tilde{\partial}_A^n(\lambda)(\ u^B(\lambda)\ ) = 0$, $\{u^A(\lambda),\ u^B(\lambda)\} = \varepsilon^{AB}$,

ここで　$\tilde{\partial}_A^n(\lambda) := \partial/\partial u_n^A + H(\lambda^n u_{A,0} + \lambda^{n-1} u_{A,1} + \ldots + u_{A,-n})$;

vi)　$\left(\dfrac{\partial}{\partial u_m^A} - \lambda\dfrac{\partial}{\partial u_{m-1}^A}\right)(u_{B,-n}) - \left(\dfrac{\partial}{\partial u_n^B} - \lambda\dfrac{\partial}{\partial u_{n-1}^B}\right)(u_{A,-m})$
$+ \{\ u_{A,-m},\ u_{B,-n}\ \} = 0$;

vii)　$\partial(\lambda^n u_B)_+/\partial u_m^A - \partial(\lambda^m u_A)_+/\partial u_n^B$

$$+ \{ (\lambda^m u_A)_+, (\lambda^n u_B)_+ \} + \lambda^{n+m}\varepsilon_{AB} = 0 .$$

少しだけ注釈を加えておくならば，ii）とiii)はただの言い替えである．iv）とv)，vi）とvii)はそこに出てくる方程式を適当に1次変換することによって移りあう．それ以外の関係の検証には多少の技巧を要する．

5．ヒエラルヒーにおける Θ ポテンシャル

ヒエラルヒーのレベルでの Θ の導入の仕方は基本的には第3節と同様で，次の関係式による．

$$d\Theta = \Sigma_{n\geq 0}\varepsilon_{AB} u^A_{-n-1} du^B_n$$

右辺が閉微分形式であることはヒエラルヒーの λ^{-1}項から出てくる方程式によって保証されるので，Θ は（少なくとも局所的には）存在するが，積分定数分の不定性がある．偏微分方程式の形で書けばこの関係式は

$$u^A_{-n-1} = \partial\Theta/\partial u_{A,n} \quad (n \geq 0)$$

となる．

この式を前節で与えた $u^A(\lambda)$あるいは u^A_n に対する方程式系に代入すれば Θ によるヒエラルヒーの書き換えが出来る．このために一番便利なのは方程式 vi)である．この方程式系は具体的には

$$\partial u_{B,-n}/\partial u^A_{m-1} - \partial u_{A,-m}/\partial u^B_{n-1} = 0 ,$$

$$\partial u_{B,-n}/\partial u^A_m - \partial u_{A,-m}/\partial u^B_n + \{u_{A,-m}, u_{B,-n}\} = 0,$$

という２つの部分に分かれるが，最初の方は Θ の定義によって既に満たされている．（というよりも，これは偏微分方程式の形での Θ の定義関係式の積分可能条件に他ならない．）あとの方の方程式から

$$\Theta_{u^A_{m-1}u^B_n} - \Theta_{u^A_m u^B_{n-1}} + \{\Theta_{u^A_{m-1}}, \Theta_{u^B_{n-1}}\} = 0$$

（但し $\Theta_{vw} := \partial^2\Theta/\partial v\partial w$ ）を得る．これが Θ によるヒエラルヒーの記述である．特に $m = n = 1$ から本来の 4N 次元空間での微分方程式を得るが，これが[Ple] が与えた方程式の超ケーラーの場合への拡張になっている．

この様に，Θ は元の方程式の従属変数（未知函数） u^A_{-n-1} を全てその導関数として与えるという意味で言わば ”母函数” の役割を演じる．これはソリトン方程式に於てタウ函数が果たす役割と良く似ている．この意味で ”タウ函数の類似” と呼ぶわけである．

しかしながら正確にはむしろ相違点の方が多いと言えなくもない．そもそもタウ函数は本来の従属変数を分子分母が正則な（つまり極などない）有理式として表そうとする目的で導入されたもので，分母にタウ函数が現れる．今の場合はそういう感じにはなっていない．その点だけならば log Θ をタウ函数の対応物とみなせば改善されるが，後に示すように（第８節），タウ函数とは表現論的な性質がかなり違っていることが決定的で，今のところ ”類似” 以上のものとは言い難い．

なお，[Ple-Boy] が注意しているように，実際にはヒエラルヒーの方程式からはもっといろいろな閉微分形式が作れて，それに伴うポテンシャルも得られるが，今の設定ではそれ等はあまり重要ではない．

6．Legendre変換と特殊解

Θ はヒエラルヒーの解に関する全ての情報を含んでいるが，ソリトン方程式のタウ函数の場合[Sat-Sat]，[Jim-Mil]と比べるとその構造はまだ全然判っていないと言ってよい．タウ函数の場合にはグラスマン多様体のプリュッカー座標の言葉によって完全な記述が得られているが，それにあたることが果たしてあるのか今の所何も言えない．従って具体的に構造が書き下せるような例を探すことが重要になる．

ここではその様な例をある種の離散的変換を利用して作ってみる．以後話を簡単にするために $N = 1$ （本来の計量で言えば4次元）の場合を考える．このとき $u^1(\lambda)$，$u^2(\lambda)$ を $u(\lambda)$，$v(\lambda)$ と略記する．ローラン係数についても然り．このとき $u(\lambda)$，$u(\lambda)$ に対する方程式は

$$(du(\lambda)\wedge dv(\lambda))_- = 0$$

と書ける．Θ の定義方程式は

$$d\Theta = \Sigma_{n=0}^{\infty}(u_{-n-1}dv_n - v_{-n-1}du_n)$$

となる．

さて，与えられた $u(\lambda)$，$v(\lambda)$ と正整数 ℓ に対して $u'(\lambda)$，$v'(\lambda)$ を

$$u'(\lambda) := \lambda^{\ell}u(\lambda) , \quad v'(\lambda) := \lambda^{-\ell}v(\lambda)$$

と置くと，これは明らかに再び上の方程式を満たす．しかし $u(\lambda)$，$v(\lambda)$ に於て u_n，v_n，$n \geq 0$，は独立変数，その他は従属変数と解釈されていたことを思い出さねばならない．$u'(\lambda)$，$v'(\lambda)$ に於てもおなじ状況にす

るために，次の条件を置く．

$$\partial(u_{-1}, \ldots, u_{-\ell})/\partial(v_0, \ldots, v_{\ell-1}) \neq 0$$

これによって，$u'_n = u_{n-\ell}$, $v'_n = v_{n+\ell}$, $n \geq 0$, を改めて独立変数に採ることが出来る．ℓ が負整数の場合も同様である．こうして解の変換の一つの離散系列が作れる．これは自己双対 Yang-Mills 場の場合のいわゆる Atiyah-Ward Ansatz [Ati-War]（解の変換としての解釈は [Uen-Nak]によって与えられた）の類似になっている．Ward[War] はその様なものの存在を予想していたが，具体的な形は与えていなかった．ここで我々が導いたものが本当にWardの期待していたものなのか判らないが，無限個の独立変数の導入は本質的な要素のように思われる．

この変換で Θ がどう変わるかもすぐに判る．変換後を Θ' と書くと，

$$\begin{aligned} d\Theta &= \Sigma_{n\geq 0}(u_{-n-1}dv_n - v_{-n-1}du_n) \\ &= \Sigma_{n\geq 0}(u'_{-n-1}dv'_n - v'_{-n-1}du'_n) + d(\Sigma_{n=0}^{\ell-1}u_{-n-1}v_n) \\ &= d(\Theta + \Sigma_{n=0}^{\ell-1}u_{-n-1}v_n) \end{aligned}$$

だから

$$\Theta' = \Theta - \Sigma_{n=0}^{\ell-1}u_{-n-1}v_n \qquad \text{（積分定数を除いて）}$$

となる．これは丁度 Legendre 変換の形をしている．従ってこの変換をLegendre変換と呼んでもよいだろう．

この様にして，何か一つ解が在ると，それに対して上のような変換を行うことによって新しい解を作ることが出来る．例えばいわゆる”ｐｐ波”から出発して $\ell = 1$ の変換を行うと（これは超ケーラーの場合へも容易に拡張されるのだが）[H-K-L-R]が与えた Legendre 変換型の解を得ることが出来る．”ｐｐ波”に対する Θ は $N = 1$ のときには

$$\Theta = \frac{1}{2\pi i}\oint \Phi(v_0 + v_1\lambda + v_2\lambda^2 + \dots, \lambda)d\lambda$$

（$\Phi(v, \lambda)$ は２変数任意函数）

という形をしている．ここで積分は $\lambda = \infty$ のまわりを一周する径路で行うが，要するにローラン展開して λ^{-1} の係数を取り出すことと思えばよい．このようにして[H-K-L-R] の与えたいくつかの計量構成法のうち彼等の呼ぶ”Legendre変換”の方法は我々のより一般的な視点から理解することが出来る．

７．Gindikin の特殊解

Gindikin [Gin]は彼独自の視点からいくつかの計量を構成している．その内の一つはソリトン方程式に於ける特殊解の構成を思わせる興味深いものなので我々の立場から見直してみる．記号を簡単にするために，$u^A(\lambda)$, $A = 1, \dots, 2N$, の奇数番をまとめて $u^a(\lambda)$, $a = 1, \dots, N$, 奇数番をまとめて $v^a(\lambda)$, $a = 1, \dots, N$, と書く．基本となるシンプレクティック形式は

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{AB}du^A\wedge du^B = du^1\wedge du^2 + \dots + du^{2N-1}\wedge du^{2N}$$

となる．

このときGindikinの解は次のようなものである．

$$u^a(\lambda) = \Sigma_{n\geq 0}u^a_n\lambda^n + \Sigma^I_{i=1}f^a_i/(\lambda - \alpha_i)$$

$$v^b(\lambda) = \Sigma_{n\geq 0}v^a_n\lambda^n + \Sigma^J_{j=1}g^a_j/(\lambda - \beta_j)$$

ここで I, J は任意の正整数．f_i^a, g_j^b は u_n^a, v_n^a の函数だが次の方程式（ I + J 個の N 変数任意函数 $F_i(v^1, \ldots, v^N)$, $G_j(u^1, \ldots, u^N)$ を含む）によって陰函数的に定義される．

$$f_i^a = F_{i,v^a}(v^1(\alpha_i), \ldots, v^N(\alpha_i)), \quad F_{i,v^a} := \partial F_i/\partial v^a$$

$$g_j^a = G_{j,u^a}(u^1(\beta_j), \ldots, u^N(\beta_j)), \quad G_{j,u^a} := \partial G_j/\partial u^a$$

Gindikinはこの方程式が具体的に解ける場合に固執しているようだが．我々は一般的には陰函数のままで扱うしかないという考え方を採る．同様な事情は前節で Legendre 変換を考えたときにも，独立変数の取り替えと言う形で現れた（新しい独立変数は陰函数を解かないと具体的には得られない）．いずれの場合にも従来の積分可能系に対応物があるがそれ等は線型代数で解けるものである．我々がいま問題にしている重力場型の積分可能系（いわゆる定常軸対称重力場はこれとは異質）では線型代数方程式のかわりに常に陰函数が現れるのである．

この解に対する Θ も具体的に計算できる．u_{-n-1}^a, v_{-n-1}^a, $n \geq 0$, の形を求めてみると

$$u_{-n-1}^a = \Sigma_i \, \alpha_i^{\,n} f_i^a, \quad v_{-n-1}^a = \Sigma_j \, \beta_j^{\,n} g_j^a$$

これと Θ の定義関係式

$$u_{-n-1}^a = \Theta_{v_n^a}, \quad v_{-n-1}^a = -\Theta_{u_n^a}$$

とを見比べて少し計算すると

$$\Theta = \Sigma_i F_i(v^1(\alpha_i), \ldots, v^N(\alpha_i)) - \Sigma_j G_j(u^1(\beta_j), \ldots, u^N(\beta_j))$$
$$- \Sigma_{a=1}^N \Sigma_{i,j} \, f_i^a g^a{}_j/(\alpha_i - \beta_j)$$

となることが判る．これも何か非常に意味ありげな形をしている．

この節の内容は α_i, β_j で高位の極をもつ場合にも拡張できる．

8．無限小変換の表現

4次元の自己双対計量の場合に[Ple-Boy] が”非線型重ね合わせ”のために導入した群構造は自己双対Yang-Mills場に対する [Uen-Nak]の変換群（Riemann-Hilbert 変換）に対応する．[Tak1-2]で論じたように，これはなかなか複雑なものでRiemann-Hilbert 変換ほど明解な記述を与えることがまだ出来ていない．無限小変換を考えることは作用の構造の複雑さを多少は軽減してくれるので，今問題にしている場合に対しても無限小変換を実際に書き下してみることは重要である．

大雑把に言って，超ケーラー計量に対して現れる群構造はパラメーター λ（リーマン球面で無限遠点の廻りを1周する径路の上を動く）に依存する 2N 次元の正準変換（擬）群である．但しここで考えるシンプレクティック構造は座標 $x = (x^A)_{A=1}^{2N}$ を持つ 2N 次元空間に $\varepsilon_{AB}dx^A \wedge dx^B$ を基本２次外微分形式として導入されるものである．我々は x^A と u_0^A とを同一視する．そのリー代数はハミルトンヴェクトル場 $H(f)$, $f = f(x, \lambda)$, よりなる．代数的なモデルとしては $f \in C[[x]] \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]$（ C は任意の可換体）と考えてもよい．

一方，ハミルトンヴェクトル場の母函数 f そのものもポアソン括弧に関してリー代数をなす．これはハミルトンヴェクトル場のリー代数から見れば中心拡大であって，中心は x に依らない母函数達 $f = f(\lambda)$ よりなる．

この様に無限小変換と言っても二通りの可能性が考えられる．実はこれは $u^A(\lambda)$ で考えるか Θ まで含めて考えるか，と言うことと丁度対応しているのである．具体的には母函数 $f = f(x, \lambda)$ の引き起こす無限小変換 $\delta(f)$ はそれぞれに対して次のように作用することが判る．

$$\delta(f)u^A(\lambda) = \{u^A(\lambda), (f(u(\lambda), \lambda))_-\}$$

$$\delta(f)\Theta = \frac{1}{2\pi i}\oint f(u(\lambda), \lambda)d\lambda$$

特に $u^A(\lambda)$ に対する無限小作用はそれ自身で閉じている．二つの無限小変換 $\delta(f)$, $\delta(g)$ の交換子も計算できて

$$[\delta(f), \delta(g)] = \delta(\{g, f\})$$

となる．つまりポアソンリー代数の”反表現”を与える．反表現になるのは別に深刻なことではなく，ポアソン括弧の定義を逆符号で行えば済むことである（そちらの方が普通の定義かも知れない）．

この結果は非常に美しい．同時に，些か驚くべきことを示している．つまり我々は Θ をタウ函数の類似物と思ってきたわけで，そもそも定義の段階で Θ には積分定数を加える分の不定性があったが，それがあとで変換を定義するときに効いてきて，無限小変換の交換関係に異常を招くものとひそかに期待していたはずだ．実際タウ函数の場合には定数を掛ける分の不定性があって，それが交換関係に中心拡大項を引き起こすのであった[Sat-Sat], [Jim-Miw]．ところが，確かにハミルトンヴェクトル場から母函数へ移行するときに一種の中心拡大が現れたが（しかしそこでの中心元は定数に限らず，一般に $f(\lambda)$ というパラメーターの函数だった），それも考慮に入れてリー代数を採りその無限小作用を作ってみると，最終的な結果にはどこにも交換関係の異常が無いというので

ある．

このことの表現論的な意義についてはまだ良く判らない．表現論的に何か面白い題材を提供しているのかも知れない．我々の最初の問題であった”これがタウ函数の類似物を与えるか”と言うことについては，とにかくいろいろな点で違い過ぎることから考えて，やはり正確な対応物ではないというのが結論ではある．ただ，その分かえって興味ある対象ではないかと思われる．

超ケーラー計量は，[Tak1]で論じたように，もっと一般的な積分可能系の一族（”計量族”あるいは”重力場族”というべき）の中に位置付けることが出来る．G構造の視点 [Go1]によってこの一族の効率的な分類が出来る．超ケーラー族はその中でも取り分けよい性質を持つ系統に属する．他の系統で，例えばΘ にあたる量を導入して同じような議論が出来るかどうかは今後の研究に待たねばならない．

引用文献

[H-K-L-R] N. J. Hitchin, A. Kahlhede, U. Lindström, M. Roček, Commun. Math. Phys. 108 (1987), 535-589.

[Ple] J. F. Plebanski, J. Math. Phys. 16 (1975), 2395-2402.

[Ple-Boy] J. F. Plebanski, C. P. Boyer, J. Math. Phys. 26 (1985), 229-234.

[Gin1] S. G. Gindikin, Funct. Anal. Apll. 19 (1984), 278-298.

[Gin2] ——————, Funct. Anal. Appl. 20 (1986), 238-

240.

[Gol] H. Goldschmidt, Bul. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 531-546.

[Tak1] K. Takasaki, Publ. RIMS 22 (1986), 949-990.

[Tak2] ———————, 数理研講究録558 " 超局所解析と大域解析" １９８５年４月.

[Sat-Sat] M. Sato, Y. Sato, in Proc. U.S.-Japan seminor "Non-linear PDE in Applied Science," Tokyu1982, ed. P.D. Lax, H. Fujita, North-Holland/Kinokuniya 1982.

[Jim-Miw] M. Jimbo, T. Miwa, Publ. RIMS 19 (1983), 943-1101.

[Ati-War] M. F. Atiyah, R. S. Ward, Commun. Math. Phys. 55 (1977), 117-124.

[Uen-Nak] K. Ueno, Y. Nakamura, Publ. RIMS. 19 (1983), 519-547.

[War] R. S. Ward, in "Complex Manifold Techniques in Theoretical Physics," ed. D. E. Lerner, P. D. Sommes, Pitmann 1978.