

Gevrey class での Fuchs 双曲型方程式 (2)

( Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2) )

上智大理工 田原 秀敏 (Hidetoshi Tahara)

論文 [2] の中で、報告者は或る一群の Fuchs 双曲型作用素  $P$  に対して次をみたす様な指数  $\sigma (\geq 1)$  を求めました:

もしも  $s$  が  $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$  をみたすならば  $C^\infty([0, T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$  又は  $C^\infty((0, T), E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$  の中で  $Pu=f$  がうまく扱かえる.

ここでは、小松先生によって提起された次の問題を考えてみたいと思います.

問題:  $s=\sigma/(\sigma-1)$  の所はどうなっているのか?

一般的な場合の結果は後の英文部分で述べることとして、ここでは

$$P = (t\partial_t)^2 - t^{2\kappa_1}\partial_{x_1}^2 - t^{2\kappa_2}\partial_{x_2}^2 + a(t, x)(t\partial_t) + t^{\ell_1}b_1(t, x)\partial_{x_1} + t^{\ell_2}b_2(t, x)\partial_{x_2} + c(t, x) \quad (1)$$

(但し、 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ ,  $2\kappa_1, 2\kappa_2, \ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, \dots\}$  とする) という例について少し解説しておきます.

§ 1. 既知の結果

$P$  を (1) の作用素とすると、 $P$  は [2] で扱われた作用素の典型的な例であり、 $P$  に対する指数  $\sigma$  は

$$\sigma = \max \left\{ 1, \frac{2\kappa_1 - \ell_1}{\kappa_1}, \frac{2\kappa_2 - \ell_2}{\kappa_2} \right\}$$

で与えられます。  $\rho^2 + a(0, x)\rho + c(0, x) = 0$  の根を  $\rho_1(x), \rho_2(x)$  とおきますと、論文[1][2]の結果より次が得られます。

定理 1 ([1]).  $P$  を(1)の作用素とし

- (1)  $\rho_1(x), \rho_2(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ ,
- (2)  $\sigma = 1$ ,
- (3)  $a(t, x), b_1(t, x), b_2(t, x), c(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$

を仮定する。この時、 $Pu = f$  は  $C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$  の中で一意可解である。

定理 2 ([2]).  $P$  を(1)の作用素とし

- (1)  $\rho_1(x), \rho_2(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ ,
- (2)  $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$ ,
- (3)  $a(t, x), b_1(t, x), b_2(t, x), c(t, x) \in C^\infty([0, T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$

を仮定する。この時、 $Pu = f$  は  $C^\infty([0, T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$  の中で一意可解である。(但し、 $E^{\{s\}}$  は帰納的なGevrey族関数の空間とする。)

そして、いま考えたい問題は次のとおりです。

$s = \sigma/(\sigma-1)$  の所はどうなっているのか?

## § 2. 観察

$s = \sigma/(\sigma-1)$  の所の様子を必要条件の方から観察してみることになります。但し、Fuchs型作用素に対する必要条件の研究は殆どありませんのでここでは、 $P$  に対応する次の非特性的な双曲型作用素

$$L = \partial_t^2 - t^{2\nu_1} \partial_{x_1}^2 - t^{2\nu_2} \partial_{x_2}^2 + a(t, x) \partial_t \\ + t^{P_1} b_1(t, x) \partial_{x_1} + t^{P_2} b_2(t, x) \partial_{x_2} + c(t, x)$$

(但し、 $2\nu_1, 2\nu_2, P_1, P_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $b_1(0, x) \neq 0$ ,  $b_2(0, x) \neq 0$  とする) に対する必要条件で代用することになります。

$L$  と  $P$  の関係は  $P = t^2 L$  ということなので、従って  $\kappa_i = \nu_i + 1$ ,  $\ell_i = P_i + 2$

となり、 $L$  に対する指数  $\sigma_L$  は

$$\sigma_L = \max \left\{ 1, \frac{2\nu_1 - p_1}{\nu_1 + 1}, \frac{2\nu_2 - p_2}{\nu_2 + 1} \right\}$$

で与えられます。いま、 $L$  の係数が解析的であると仮定しておきますと Ivrii の条件 ([3]) を適用することができて次が得られます。

命題  $L$  に対するコーシー問題

$$(E) \quad Lu = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi$$

に対して次が得られる。

- 1) (E) は  $E^{\{s\}}$ -well-posed  $\implies 1 < s < \sigma/(\sigma-1)$ .
- 2) (E) は locally- $E^{\{s\}}$ -well-posed  $\implies 1 < s < \sigma/(\sigma-1)$ .
- 3) (E) は  $E^{(s)}$ -well-posed  $\implies 1 < s \leq \sigma/(\sigma-1)$ .

(但し、 $\sigma = \sigma_L$ ,  $E^{(s)}$  は射影的な Gevrey 族関数の空間とする.)

上の命題より、

$s = \sigma/(\sigma-1)$  が扱えそうなのは、方程式を

射影的な  $E^{(s)}$  の中で考えたときに限る

ということがわかります。

注意 多重度一定など多くの場合は " $s = \sigma/(\sigma-1)$  の時でも local には  $E^{\{s\}}$  の中で解ける" となっているのですが、今の場合は " $s = \sigma/(\sigma-1)$  の時は  $E^{\{s\}}$  では local にも解けない" となっています。この点が、かなり誤解されているようです。

### § 3. 結果

というわけで、 $s = \sigma/(\sigma-1)$  を扱おうとするならば  $E^{\{s\}}$  を放棄して  $E^{(s)}$  の方で考えざるをえません。次がこの報告の基本結果です。

定理 3.  $P$  を (1) の作用素とし

- (1)  $\rho_1(x), \rho_2(x) \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,
- (2)  $1 < s \leq \sigma/(\sigma-1)$ ,

$$(3) a(t,x), b_1(t,x), b_2(t,x), c(t,x) \in C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$$

を仮定する. この時,  $Pu=f$  は  $C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$  の中で一意可解である.

### 文献表

- [1] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equation J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 27 (1980), 465-507.  
 [2] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, VI. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes. J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 551-580.  
 [3] V. Ja. Ivrii : Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes. Sibirsk. Mat. Zh., 17 (1976), 1256-1270.

### Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2)

H. Tahara

Department of Mathematics  
 Sophia University  
 Tokyo, 102 Japan

Let us consider

$$P = (t\partial_t)^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|\leq m \\ j < m}} t^{\varrho(j,\alpha)} a_{j,\alpha}(t,x) (t\partial_t)^j \partial_x^\alpha,$$

where  $(t,x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  ( $T > 0$ ),  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ( $=\{1, 2, \dots\}$ ),  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  ( $=\{0, 1, 2, \dots\}^n$ ).

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  and  $\partial_x^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ . Assume the following conditions.

$$(A_\kappa) \quad \ell(j, \alpha) \in \mathbb{Z}_+ \quad (j + |\alpha| \leq m \text{ and } j < m) \text{ satisfy}$$

$\ell(j, \alpha) = \kappa_1 \alpha_1 + \dots + \kappa_n \alpha_n,$	when $j +  \alpha  = m$ and $j < m,$
$\ell(j, \alpha) > 0,$	when $j +  \alpha  < m$ and $ \alpha  > 0,$
$\ell(j, \alpha) \geq 0,$	when $j +  \alpha  < m$ and $ \alpha  = 0$

for some  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n$ .

(B) All the roots  $\lambda_i(t, x, \xi)$  ( $i=1, \dots, m$ ) of

$$\lambda^{m+} + \sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ j < m}} a_{j, \alpha}(t, x) \lambda^j \xi^\alpha = 0$$

are real, simple and bounded on  $\{(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\}$ .

Then,  $P$  is a typical model of Fuchsian hyperbolic operators in  $t$ . The characteristic exponents  $\rho_1(x), \dots, \rho_m(x)$  of  $P$  are defined by the roots of

$$\rho^m + \sum_{j < m} a_j(x) \rho^j = 0,$$

where  $a_j(x) = [t^{\ell(j, (0, \dots, 0))} a_{j, (0, \dots, 0)}(t, x)]|_{t=0}$  ( $j < m$ ).

Under  $(A_\kappa)$  and (B), we define indices  $\sigma$  ( $\geq 1$ ) and  $\sigma_{j, \alpha}$  ( $\geq 1$ ) by

$$\sigma_{j, \alpha} = \max \left[ 1, \min_{\tau \in S_n} \left( \max_{1 \leq r \leq n} M_{j, \alpha}(\tau, r) \right) \right],$$

$$\sigma = \max_{\substack{j+|\alpha| < m \\ |\alpha| > 0}} \{ \sigma_{j, \alpha} \},$$

where  $S_n$  is the permutation group of  $n$ -numbers and

$$M_{j, \alpha}(\tau, r) = \frac{\sum_{i=1}^r (\kappa_{\tau(i)} - \kappa_{\tau(r)}) \alpha_{\tau(i)} + (m-j) \kappa_{\tau(r)} - \ell(j, \alpha)}{(m-j-|\alpha|) \kappa_{\tau(r)}}.$$

Then, for  $P$  satisfying  $(A_\kappa)$  and (B) we define  $\Delta_P$  by

$$\Delta_P = \{(j, \alpha); \sigma_{j, \alpha} = \sigma\}.$$

For  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n$  and  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ , we denote by  $S_\kappa(\alpha)$  the set of all  $\ell \in \mathbb{R}$  satisfying the following (i) and (ii):  
 (i)  $0 < \ell < \kappa_1 \alpha_1 + \dots + \kappa_n \alpha_n$ , and (ii) there are  $\tau \in S_n$  and  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  such that

$$\begin{cases} \ell = \kappa_{\tau(1)} \alpha_{\tau(1)} + \dots + \kappa_{\tau(p)} \alpha_{\tau(p)}, \\ \{\kappa_{\tau(1)}, \dots, \kappa_{\tau(p)}\} \ll \{\kappa_{\tau(p+1)}, \dots, \kappa_{\tau(n)}\}. \end{cases}$$

Here,  $\{a_1, \dots, a_p\} \ll \{b_1, \dots, b_q\}$  means that  $a_i < b_j$  for any  $i$  and  $j$ . Then, for  $P$  satisfying  $(A_\kappa)$  and (B) we define  $S_P$  by

$$S_P = \{(j, \alpha); \ell(j, \alpha) \in S_\kappa(\alpha)\}.$$

By  $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$  we denote the set of all functions  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  satisfying the following: for any  $h > 0$  and any compact subset  $K$  of  $\mathbb{R}^n$  there is a  $C > 0$  such that

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} (|\alpha|!)^s \quad \text{for any } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

and by  $C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$  we denote the set of all infinitely differentiable functions on  $[0, T]$  with values in  $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$  equipped with the usual Frechet topology.

In addition to  $(A_\kappa)$  and (B), assume the following:

(C)  $s$  satisfies (C-i) or (C-ii):

(C-i)  $1 < s < (\sigma/(\sigma-1))$ .

(C-ii)  $s = (\sigma/(\sigma-1))$  and  $\Delta_P \cap S_P = \emptyset$ .

(D)  $a_{j, \alpha}(t, x) \in C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$  ( $j + |\alpha| \leq m$  and  $j < m$ ).

Then, we have the following theorem.

**THEOREM.** Let  $P$  be as above. Assume that  $(A_\kappa)$ , (B), (C), (D) hold and that  $\rho_i(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$  holds for any  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $1 \leq i \leq m$ .

Then, the equation  $Pu=f$  is uniquely solvable in  $C^\infty([0,T],E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$ . Moreover, the solution has a dependence domain.

---

野海正俊氏(上智大)作成のワープロ(ZED)を使用しました。