

複素特異性と流体力学

東大・理 木村 芳文
Kimura Yoshifumi

次のような力学系を考える。

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = F(\vec{Y}) \quad (1)$$

$F(\vec{Y})$ が非線形の場合には、この系は初期条件によって性質の異なる特異点を複素平面に持つことが知られている。特異点の位置と位数は力学系の特徴を反映すると考えられるので、それらを知ることによってより詳細に系の性質を把握することが可能になるであろう。特に系がカオスや collapse のような特異的な振舞いを許す場合にはそれらの出現と複素特異点との関係を調べることは大変新しい問題であると言える。

ここではまず $F(\vec{Y})$ が有理式で与えられるような力学系の例として 2 次元渦系系を採り上げる。

$$\frac{dz_j}{dt} = i \sum_{m=1}^{N'} \frac{\Gamma_m}{z_j - z_m} \quad j=1,2,\dots \quad (2)$$

(2) は $t \rightarrow \alpha^{-1}t$, $z_j \rightarrow \alpha^{-\frac{1}{2}}z_j$ なる変数変換に対して形を変えないことから

$$z_j = C_j t^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} C_j = i \sum_{m=1}^{N'} \frac{\Gamma_m}{\bar{C}_j - \bar{C}_m} \quad (4)$$

なる singular な特解を持つことが予想される。この事情を詳しく見るために

$$z_j = f(t) k_j \quad (5)$$

と置いて(2)に代入すると、 f と k_j について次の方程式を得る。

$$f \bar{f} = D = A + iB \quad (6)$$

$$D k_j = i \sum_{m=1}^{N'} \frac{\Gamma_m}{k_j - \bar{k}_m} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

ここでドットは時間微分バーは複素共役を表わす。時間部分 f についての方程式(6)はたやすく積分できて次の式を得る。

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2At+1} \exp \left[i \frac{B}{2A} \log(2At+1) \right] & (A \neq 0) \\ \exp(iBt) & (A = 0) \end{cases} \quad (8)$$

(8)より $A < 0$ のとき系は $t^* = -1/2A$ においてcollapseすることがわかる。一方 k_j については(7)の代数方程式を解く必要があるが、特に3個の渦については解があらわに得られる。このうち興味あるものとして $A \neq 0$ かつ $B \neq 0$ の場合、すなわち対数ラ線を描きながらcollapseをするようなものを書き下すと、2つの渦系 k_1, k_2 を $(x_1, 0), (x_2, 0)$ に置くとして、3目の渦系 $k_3(x, y)$ の x, y の間に次の関係が成り立つことがわかる。

$$\left(x - \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2 + y^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (x_1 - x_2)^2 \quad (10)$$

ここで $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ はそれぞれ k_1, k_2, k_3 の渦の強さである。すなわち (x, y) は $\left(\frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} |x_1 - x_2|$ の円周上にあることがわかる。また(6)をハミルトニアン

$$\sum_{i > j} \Gamma_i \Gamma_j \log |z_i - z_j| = \text{const.} \quad (11)$$

に代入すると $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ は

$$\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 = 0 \quad (12)$$

を満たすことが必要であることがわかる。例として $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を $2, 2, -1$ と置いた場合として

$$k_1 = \frac{3 + \sqrt{3} \cos \theta}{6} l + i \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{6} l$$

$$k_2 = \frac{-3 + \sqrt{3} \cos \theta}{6} l + i \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{6} l$$

$$k_3 = \frac{2\sqrt{3} \cos \theta}{3} l + i \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{3} l \quad l = |x_1 - x_2| \quad (13)$$

を得る。ただし重心が原点になるように定数を引いてある。(13)

より(6)のDの表式があらわに書き下せる。(7)より

$$D = \frac{i}{k_3} \left(\frac{\Gamma_1}{k_3 - k_1} + \frac{\Gamma_2}{k_3 - k_2} \right)$$

$$= \frac{-6 \sin 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta) l^2} + i \frac{18 - 6 \cos 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta) l^2}$$

$$A = \frac{-6 \sin 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta) l^2}$$

$$B = \frac{18 - 6 \cos 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta) l^2} \quad (14)$$

Aの表式より collapse time t^* として

$$t^* = \frac{5 - 3 \cos 2\theta}{12 \sin 2\theta} \ell^2 \quad (15)$$

を得る。例えば $\theta = 4\pi/9$ $\ell = 1$ に対して t^* は 1.9051... と計算できる。図1にこれに対応する渦系の simulation の結果を掲げる。確かに原点に向って spiral を描いている様子がわかる。

このような相似解に対してその安定性の問題を議論することは意味のあることであろう。(2)の相似解に対しての攪乱として

$$z_j = f(t) (R_j + \varepsilon w_j) \quad (16)$$

の形を(2)に代入して ε についての1次の式を書くと

$$f \dot{w}_j = -i \sum_{\ell=1}^{N'} \frac{\Gamma_\ell (\bar{w}_j - \bar{w}_\ell)}{(R_j - R_\ell)^2} - f \dot{w}_j \quad (17)$$

f の表式として(8)を採用すると(17)は

$$(2At+1) \frac{dw_j}{dt} = -i \sum_{\ell=1}^{N'} \frac{\Gamma_\ell (\bar{w}_j - \bar{w}_\ell)}{(R_j - R_\ell)^2} - c w_j \quad (18)$$

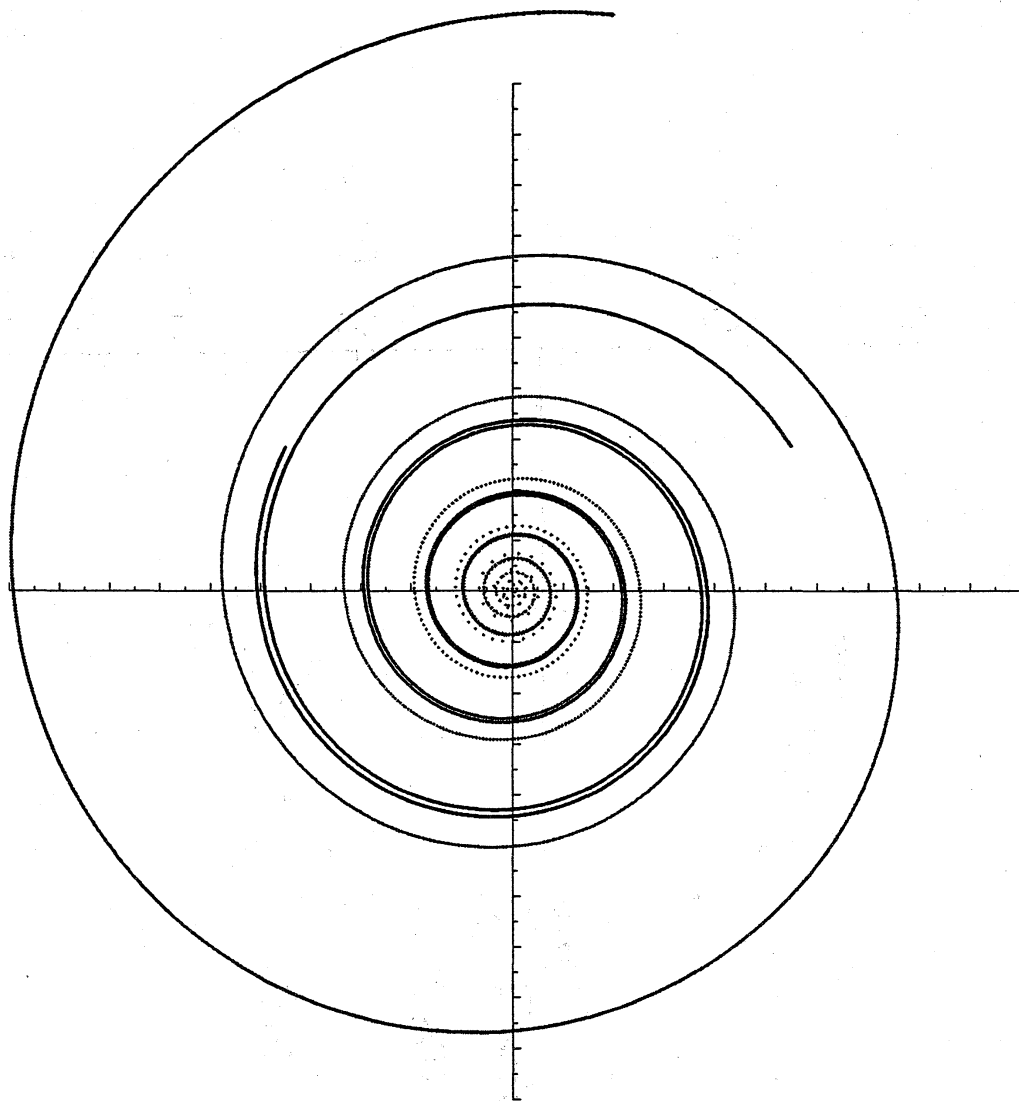
時間 t のスケールを $\frac{1}{2} \log(2At+1) \equiv \tau$ と変換すると(18)の左辺の時間の1次式の係数は消すことができる。結局、基本の解は時間と共に大きくなるかまたは小さくなるが安定性

は基本解の時間依存に対する相対的なものとなる。

相似解の存在はとりもなおさず、特異点を実時間軸上に現われることを意味しているが、複素時間を考えた時に特異点がどのように実軸上に近づいていくかを見るのは興味あることだと思う。(collapseをおこすようにパラメータの値を変化させた場合) ここでは3番目の渦の強さを小さい方から1にしたいに近づけた場合に(他の2つ Γ_1, Γ_2 は2のまま、また初期条件もcollapseを起こす時のままにしておく。)特異点がどのように実軸上に現われるかを数値計算によって求めたものを示す。(2図) 近づくルートは単調でなく、またcollapseに対応する点付近ではカスプを作っていることがわかる。

冒頭の(1)について主に $F(\bar{y})$ が代数方程式の場合、すなわち力学系の場合について話をしてきたが $F(\bar{y})$ がその他の場合例えば微分を含む時や積分を含む時、複素時間平面上的の特異点はいったいどのような物になるのであろうか。(微分の時は偏微分方程式の特異点の問題、積分の時は微分積分方程式でどちらも流体力学にとって縁の深いものである。) これらを調べることによって流体の特異性についてより深い洞察が可能になることであらう。

图 1



(2.000, 2.000, -1.000)

