

円管ポアズイユ流の安定性について

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

円管内のポアズイユ層流に対して線形安定計算を行ふと、微小擾乱が常に減衰し、流れの安定性を示すことは周知の事実である (Davey & Drazin 1969, Salwen & Grosch 1972)。そこで、実験的に観測される乱流への遷移は、何らかの原因で流れに有限な振幅を持つ擾乱が導入されて非線形発達をするためであろうと説明されて來る。しかし、実際に非線形安定理論を適用した結果はまだ満足すべき説明を与えていないようと思われる (Davey & Nguyen 1971, Itoh 1977, Davey 1978)。

本研究は従来の弱い非線形理論を拡張し、ある種の共鳴現象に起因する不安定の可能性を追求する。擾乱としては周方向にも変動する一般的な三次元進行波を対象とする。線形安定計算によって波の位相速度を求め、共鳴の条件をみたす二つの波動に対して非線形干渉の解析を行う。

2. 搅乱方程式

円管の半径と定常層流の最大流速を用いて諸量を無次元化する。円柱座標(r, θ, x)に対する速度成分を($w, v, \bar{U} + u$)と書き、 $\bar{U} = 1 - r^2$ が基本流、小文字の速度が搅乱を表わすものとする。搅乱としては次式で表わされる斜行波を考える。

$$w(r, \theta, x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(r, t) e^{ik(\alpha x + \beta \theta)} \quad (2.1)$$

$\beta = 0$ (軸対称)の場合には流れ函数 ψ ($u = \frac{1}{r} D\psi$, $w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$)を導入し、非軸対称の場合には v_k を消去した形に搅乱方程式を書く。 $k=1$ に対してはそれぞれつづりのようになる。

$$(D^2 - \frac{1}{r} D - \alpha^2 - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R \bar{U})(D^2 - \frac{1}{r} D - \alpha^2) \psi_1 = R(r D f_1^{(1)} - i\alpha r f_1^{(3)}), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{r^2})(D^2 + \frac{1}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R \bar{U}) + \frac{2\alpha^2}{r} D \right\} u_1 \\ & - \left\{ i\alpha (D^2 + \frac{3}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R \bar{U})(D + \frac{1}{r}) - \frac{\beta^2}{r^3} (2i\alpha + R r D \bar{U}) \right\} w_1 \\ & = \beta R \left(\frac{\beta}{r^2} f_1^{(1)} - \frac{\alpha}{r} f_1^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} & (D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R \bar{U})(D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}) w_1 \\ & + \frac{2i\alpha}{r} \left\{ 2(D^2 + \frac{1}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}) - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R \bar{U} \right\} u_1 \\ & = -R \left\{ i\alpha D f_1^{(1)} + \frac{i\beta}{r} (D + \frac{1}{r}) f_1^{(2)} + (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{r^2}) f_1^{(3)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\text{ただし, } f^{(1)} = (u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w D) u, \quad f^{(2)} = \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w (D + \frac{1}{r}) \right\} w,$$

$f^{(3)} = (u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w D) w - \frac{v^2}{r}$ とし、下添字はフーリエ展開を行ったのちの成分を示す。また、 $D \equiv \partial/\partial r$ 、 R は Re 数である。

3. 線形安定計算の結果

方程式 (2.2) または (2.3)において、右辺の非線形項を無視し、 $\partial/\partial t \leftarrow -i\omega$ に置き換えると線形常微分方程式が得られる。これを $r=0$ で $|w| < \infty$, $r=1$ で $w=0$ の境界条件のもとに解くと固有値 ω の列が α, β, R の函数として定まる。各 β (≥ 0 , 整数) と R の組合せに対して $\alpha=0$ における固有値の虚数部（增幅率）の大きい方から番号を付けることにより Salwen & Grosch (1972) の図 1 ～ 図 7 のような結果が得られる。いま、固有値の実数部と α の比 c_r (位相速度) の αR に対する変化を図示すると図 1 と図 2 の実線が得られる。図中の点線は同じ値を $\frac{1}{2}\alpha R$ の位置にプロットしたもので、点線と実線が交わる点は基本波 (α, β) と二倍の高調波 $(2\alpha, 2\beta)$ が同じ位相速度を持つことを示す。基本波とその高調波が同じ位相速度で動くときに非線形干渉が著しくなることは既によく知られている (Craik 1971, Itoh 1985)。なお、図の横座標に αR が取られているけれども、これは R 一定のときの α を表すものと考えてよい。同図は $R \geq 500$ の範囲で任意の Re 数に対して成立する。

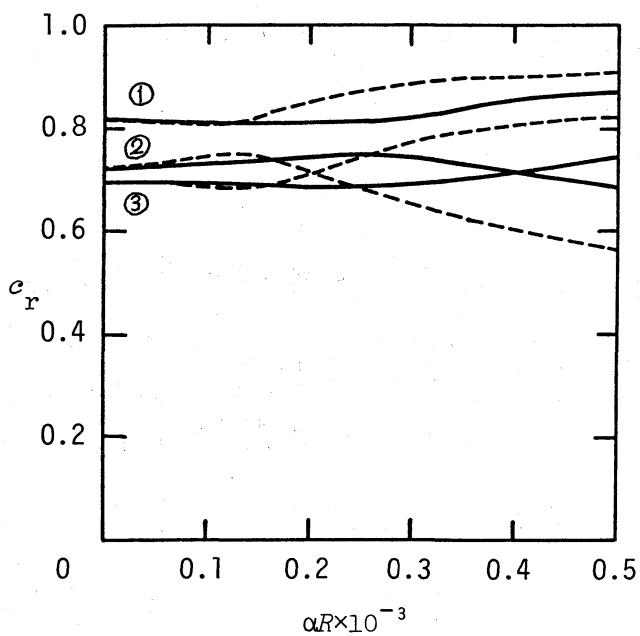


図1 軸対称搅乱の
位相速度

実線は横座標を $\frac{1}{2}$ に
縮尺したもの、①は
固有値の番号。

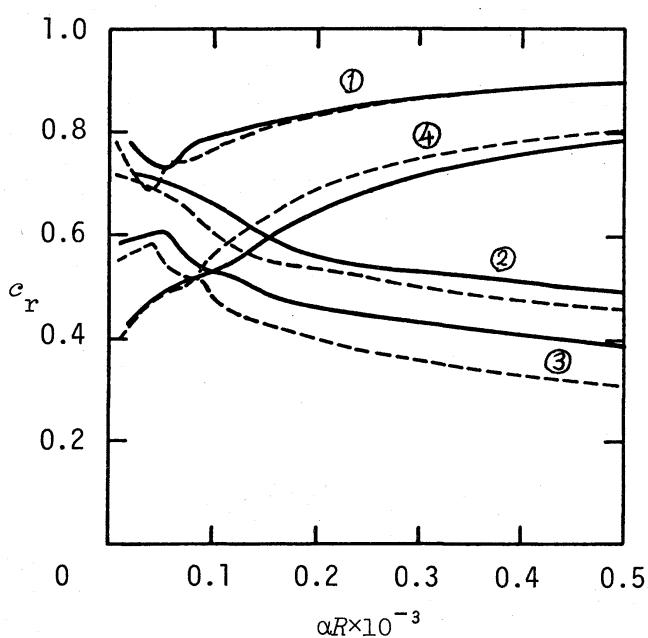


図2 非軸対称搅乱
の位相速度

実線は $\beta = 1$ 、実線は
 $\beta = 2$ で横座標を $\frac{1}{2}$ に
縮尺したもの。

4. 基本波と平均流ゆがみの干渉

波動成分同志の非線形干渉を考える前に、一つの波動と平均流ゆがみ成分の干渉を調べておく。平均流のゆがみは位相速度を持たないので、どのような波動とも常に一定の相互作用を行う。

フーリエ級数(2.1)において U_0 と U_1 および U_{-1} ($= \tilde{U}_1$, \sim は複素共役を表す) に ω が卓越した大きさを持ち、他は無視できる場合を考える。線形解に一次の相互干渉で生じる項を加え、振幅の3乗以上の微小項を無視すると、

$$U_0 = B(t) U_0^{(0)}(r) + |A(t)|^2 U_0^{(1)}(r), \quad (4.1a)$$

$$U_1 = A(t) U_1^{(0)}(r) + A(t) B(t) U_0^{(1)}(r) \quad (4.1b)$$

のように書ける。ここで振幅函数 A , B は次式に支配される。

$$\frac{dB}{dt} = -i(\omega_0 B + \lambda_0 |A|^2), \quad \frac{dA}{dt} = -i(\omega_1 A + \lambda_1 AB) \quad (4.2)$$

ω_0 と ω_1 は線形解の固有値、 λ_0 と λ_1 は $U_0^{(1)}$ と $U_1^{(1)}$ を支配する非同次方程式の可解条件から定まるランダウ型定数である。

平均流に關係する量は純虚数 $\omega_0 = i\omega_{0i}$, $\lambda_0 = i\lambda_{0i}$ になると B は実数としてよいが、基本波に關係する量は複素数 ($\omega_1 = \omega_{1r} + i\omega_{1i}$, $\lambda_1 = \lambda_{1r} + i\lambda_{1i}$) となるため、 A も複素数である。

以上を考慮し、 $\lambda_{1i}B = \mathcal{R}B$ (実数) と置いて、(4.2) を

つぎのように書き直す。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{0i}\theta + \lambda_{0i}\lambda_{ii}|A|^2, \quad \frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2(\omega_{ii} + \theta) \quad (4.3)$$

上式は $|A|^2 \times \theta$ を座標軸とする位相平面上に解曲線群を定義する。オイラー式の右辺を 0 に等しいと置いた式は原点を通る直線を表わし、その上で解曲線の勾配は $d\theta/d|A|^2 = 0$ である。またオイラー式の右辺から $d|A|^2/d\theta = 0$ をみたす直線が定まる。円管流では $\omega_{0i} < 0, \omega_{ii} < 0$ であるから、解曲線の形状を支配する量は $\lambda_{0i}\lambda_{ii}$ の符号だけになる。図 3 に示すように、 $\lambda_{0i}\lambda_{ii} < 0$ ならば解曲線は原点に収束し、 $\lambda_{0i}\lambda_{ii} > 0$ ならば初期振幅が十分大きさになると解の発散が現われる。後者は敷居型不安定の条件を与えていく。

実際にランダウ型定数を計算した結果が図 4 に示されている。軸対称搅乱の場合には αR のほんとの領域で $\lambda_{0i}\lambda_{ii} < 0, \alpha R \times 10^{-3} = 0.4$ の近傍だけで値が正になる。非軸対称の場合には $\alpha R \times 10^{-3} > 0.2$ で $\lambda_{0i}\lambda_{ii} > 0$ になり、そこでは敷居型不安定の起こりうることを示している。しかし、不安定が起こる領域では $|\lambda_{ii}|$ または $|\lambda_{0i}|$ が比較的小さな値を取ることに注意すべしである。搅乱が発散的成長をするために必要な敷居振幅はこれに逆比例して大きくなるから、図 4 の結果は不安定の可能性を示すとともに、それが起こりにくくなることを意味する。

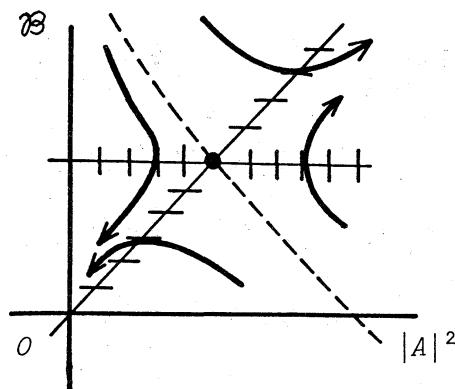
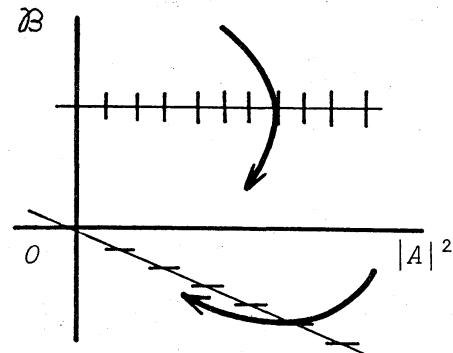
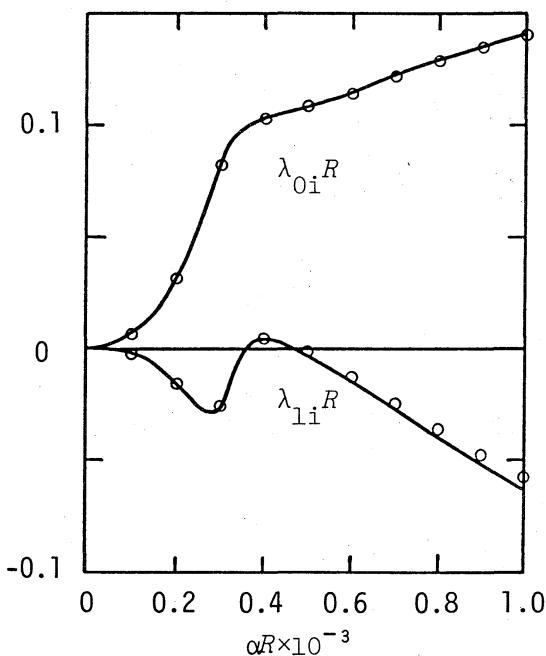
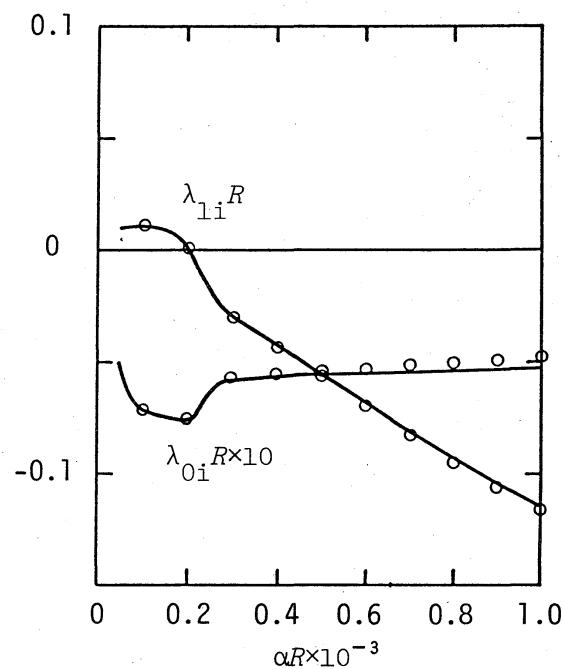
i) $\lambda_{0i}\lambda_{1i} > 0$ のときii) $\lambda_{0i}\lambda_{1i} < 0$ のとき図3. $|A|^2-B$ 平面における線曲線の形状a) $\beta = 0$ b) $\beta = 1$

図4. 基本波-平均流干涉のランダウ定数

— : $R = 1000$, ○ : $R = 2000$.

5. 共鳴不安定理論

基本波を適当に選ぶと、その高調波が同じ位相速度を持ちうることは既に述べた。そこで、フーリエ級数(2.1)において v_1 と v_2 およびそれらの複素共役成分のみが卓越した大振幅を持つ場合を考元、その一次干渉による効果を調べる。

二つの波の振幅 $|A|$ と $|B|$ が十分小さいものと仮定し、振幅の2乗項まで残すとき、(4)と同じように

$$v_1 = A v_1^{(0)}(r) + \tilde{A} B v_1^{(1)}(r), \quad v_2 = B v_2^{(0)}(r) + A^2 v_2^{(1)}(r), \quad (5.1)$$

$$\frac{dA}{dt} = -i(\omega_1 A + \lambda_1 \tilde{A} B), \quad \frac{dB}{dt} = -i(\omega_2 B + \lambda_2 A^2) \quad (5.2)$$

と書くことができる。ここで線形固有値 ω_1 , ω_2 やびランダム型定数 λ_1 , λ_2 はいずれも複素数である。そこで、

$$A = |A|e^{i\theta_1}, \quad B = |B|e^{i\theta_2}, \quad \theta_2 - 2\theta_1 = \Theta, \quad \lambda_n = |\lambda_n|e^{i\sigma_n} \quad (n=1, 2) \quad (5.3)$$

と置き、(5.2)の実数部と虚数部を分離する、次式を得る。

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2 \{ \omega_{1r} + |\lambda_1| |B| \sin(\Theta + \sigma_1) \}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d|B|}{dt} = \omega_{2r} |B| - |\lambda_2| |A|^2 \sin(\Theta - \sigma_2), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} = & -(\omega_{2r} - 2\omega_{1r}) - |\lambda_2| \frac{|A|^2}{|B|} \cos(\Theta - \sigma_2) \\ & + 2|\lambda_1| |B| \cos(\Theta + \sigma_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

いま、(5.4) × (5.5) の右辺を 0 にする $|B| \times |B|/|A|^2$ の値を
(5.6) に代入すると、

$$\frac{d\Theta}{dt} = -(\omega_{2r} - 2\omega_{1r}) + \frac{|\lambda_1\lambda_2||A|^2}{\omega_{2i}} \left\{ \left(1 + \frac{2\omega_{1i}}{\omega_{2i}}\right) \sin(2\Theta + \sigma_1 - \sigma_2) + \left(1 - \frac{2\omega_{1i}}{\omega_{2i}}\right) \sin(\sigma_1 + \sigma_2) \right\} \quad (5.7)$$

に変形される。位相差 Θ が振幅の大きさに依らずに平衡状態 $d\Theta/dt = 0$ をみたすための条件は

$$\omega_{2r} = 2\omega_{1r}, \quad \Theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1 + \delta) \quad (5.8)$$

である。ただし、 $\sin \delta = -\{(\omega_{2i} - 2\omega_{1i})/(\omega_{2i} + 2\omega_{1i})\} \sin(\sigma_1 + \sigma_2)$ 、
 $-\pi/2 < \delta < \pi/2$ であり、このときの Θ は (5.7) の安定平衡点
になる。もし Θ がこの一定値に保たれると仮定すれば、 $|A|^2$ と
 $|B|$ の時間的発達を、(5.5) × (5.6) の解曲線として位相平面上
に描くことができる。その結果は図 3 と同様になり、散居型
不安定が起るための条件は $\sin(\Theta + \sigma_1) \sin(\Theta - \sigma_2) < 0$ 、即ち

$$|\delta| < \sigma_1 + \sigma_2 < 2\pi - |\delta| \quad (5.9)$$

で与えられる。 $|\delta|$ は通常小さな値を持ち、 $\delta < 0$ に $\omega_{2i} = 2\omega_{1i}$
のときに 0 であるから、(5.9) はほとんどの場合に成り立つ
と考えてよい。すなわち (5.5) × (5.6) の解曲線は図 3 (i)
の形態を取ることになり、散居型不安定の可能性を示唆する。

なお、 $d|A|^2/dt = d|B|^2/dt = 0$ をみたす点（平衡点）は次式で与えられる。

$$|A|^2 = \frac{2\omega_{1i}\omega_{2i}}{|\lambda_1\lambda_2|\{\cos\delta - \cos(\sigma_i + \sigma_2)\}}, \quad |B| = -\frac{\omega_{1i}}{|\lambda_1|\sin\left(\frac{\sigma_i + \sigma_2 + \delta}{2}\right)}. \quad (5.10)$$

6. むすび

前節の解析によって、基本波とその二倍の波数を持つ高調波が同じ位相速度を持つときには条件(5.8)がみたされ、敷居型不安定の起こりうることは判った。しかし、実際に敷居振幅の値を計算したとき、それが極端に大きくなつたのでは意味がない。そこで、平衡点の振幅(5.10)によって敷居値を代表をせることにし、 $R \rightarrow \infty$ における漸近解を用いてその大きさの程度を評価しておく。

円管流における搅乱は‘centre mode’と‘wall mode’に別けられるが、ここでは前者を例に取る。（後者についても同様な議論ができる。） αR が十分大きいときに、線形搅乱の位相速度は次式で与えられる(Pekeris 1948, Gill 1965)。

$$C = 1 + 4m^{-\frac{3}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}(\alpha R)^{-\frac{1}{2}} + \dots \quad (6.1)$$

そこで、微小パラメタ $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/4}$ を導入し、 $\alpha \lesssim \varepsilon^{-1}$ を仮定する。そうに、 r 座標の‘critical layer’における拡大を

考慮すると、擾乱方程式の係数に含まれる諸量はつきの程度とみなせる。

$$D \sim O(\frac{1}{\epsilon}), \quad \beta \sim O(1), \quad \omega R \sim O(\frac{1}{\epsilon^4}), \quad T - c \sim O(\epsilon^2). \quad (6.2)$$

以上を (2.3) に代入し、各項を比較すると、

$$\begin{aligned} u &\sim O(1), \quad v \sim O(\frac{1}{\epsilon^3 R}), \quad w \sim O(\frac{1}{\epsilon^3 R}), \\ f^{(1)} &\sim O(\frac{1}{\epsilon^4 R}), \quad f^{(2)} \sim O(\frac{1}{\epsilon^7 R^2}), \quad f^{(3)} \sim O(\frac{1}{\epsilon^7 R^2}), \\ \omega_r &\sim O(\frac{1}{\epsilon^4 R}), \quad \omega_i \sim O(\frac{1}{\epsilon^2 R}), \quad \lambda \sim O(\frac{1}{\epsilon^4 R}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

の評価を得た。したがって、(5.10) で与えられる擾乱振幅は $R \rightarrow \infty$ に対して、 $|A|, |B| \sim O(\epsilon^2)$ となる。この結果は、Re 数が大きいほど数値が低くなり、流れが不安定になりやすいことを示している。

本研究は、円管ポアズイ工流の有限擾乱に対する不安定性について一つの可能性を示したものである。理論を進める段階で採用したいいくつかの仮定についてはまだ十分な検討が済んでいない。とくに、振幅展開における高次微小項の省略が妥当かどうかは非常に重要な問題であり、今後の研究が必要である。

REFERENCES

- Craik, A.D.D. 1971 J. Fluid Mech. 50, 393.
- Davey, A. 1978 J. Fluid Mech. 86, 695.
- Davey, A. & Drazin, P.G. 1969 J. Fluid Mech. 36, 209.
- Davey, A. & Nguyen, H.P.F. 1971 J. Fluid Mech. 45, 701.
- Gill, A.E. 1965 J. Fluid Mech. 21, 145.
- Itoh, N. 1977 J. Fluid Mech. 82, 469.
- Itoh, N. 1985 Laminar-Turbulent Transition (ed. V.V. Kozlov), p. 463. Berlin: Springer-Verlag.
- Pekeris, C.L. 1948 Proc. U.S.Natn. Acad. Sci., Wash. 34, 285.
- Salwen, H. & Grosch, C.E. 1972 J. Fluid Mech. 54, 93.