数理解析研究所講究録
662巻 1988年 132-147

複素射影平面上の安定主束

広大・理　土井英雄（Hideo Doi）

0. 入門

この報告は、岡井孝行（広大・理）氏との共同研究に基づくものである。

Yang-Mills 場の理論において、一階の微分方程式によって定まる対象は、幾何学的扱いが可能であり、豊かな構造をもっている。Kähler 多様体上の、反自己双対接続の一般化である Einstein 接続の理論は、vector 束の moduli の局所的な研究には有効である。Narashimhan & Seshadri 氏による Riemann 面上の unitary vector 束の理論は、微分幾何学的に再構成されている，[D$_1$] + [AB]。高次元版として、「安定 vector 束は、Einstein 計量をもつか？」―― 小林・Hitchin 予想、が、Donaldson 氏，Uhlenbeck & Yau 氏により、肯定的に解決されている。この小論では、構造群が一般の場合でも、Einstein 接続と安定主束に対して小林・Hitchin 予想、が成立することを示す。これは Riemann 面上の安定主束に対する結果 [R], [AB] の一般化になっている。

複素二次元多様体上の安定束の理論は、SU_2・Yang-Mills 場の存在に関する Taubes 氏の一般的結果を補ってくれることが期待される。Lübke & Okonek 氏は、楕円曲面上の SU_2 束に対し成果を上げている。ここでは、別の方向 ―― 構造群を大きくすること を考える。CP^2 上の Fubini-Study 計量に関する自己双対接続は、Buchdahl 氏によって詳しく研究されているので、相補するものとして、反自己双対接続を扱ってみた。[AHS] 流の変形法 と

論文 I 写

IHESの

Goldman-Millson

伊藤光弘氏による moduli の存在定理を用いることにより、いくつかの Lie 群に対して、存在条件を決定することができた。

G を連結な compact Lie 群とする. CP^2 上の主 G 束に対し, 指数を、G が 1 連結単純群の場合には, SU_2 還元の第 2 Chern 数, $G = SO_n$ の場合には, 付随する C^n 束の第 2 Chern 数として定義する. 主 G 束上の接続に対し, その holonomy 群が G であるとき固有 G 接続ということにする.

(0.1) $\mathcal{M}_k G$:= CP^2 上の指数 k の固有反自己双対 G 接続の moduli 空間 とおく.

(0.2) $2 \leqslant n \neq 5$ に対し, $\mathcal{M}_k SU_n \neq \phi \iff k \geqslant n$

(0.3) $n \geqslant 1$ $\quad \mathcal{M}_k Sp_n \neq \phi \iff k \geqslant 2n$

(0.4) $n \geqslant 7$ $\quad \mathcal{M}_k Spin_n \neq \phi \iff 2k \geqslant n$

(0.5) $\quad \mathcal{M}_k F_4 \neq \phi \iff k \geqslant 5$

(0.6) $\quad \mathcal{M}_k E_6 \neq \phi \iff k \geqslant 5$

(0.7) $\quad \mathcal{M}_k G_2 \neq \phi \iff k \geqslant 4$

(0.8) $\quad \mathcal{M}_k SO_3 \neq \phi \iff k = 8+4n,\ 3+4n \quad n \geqslant 0$

(0.9) $\quad \mathcal{M}_k SO_4 \neq \phi \iff k = 5,\ k \geqslant 7$

(0.10) $\quad \mathcal{M}_k SO_5 \neq \phi \iff k = 5,\ k \geqslant 7$

(0.11) $\quad \mathcal{M}_k SO_6 \neq \phi \iff k \geqslant 7$

(0.12) $n \geqslant 7$ $\quad \mathcal{M}_k SO_n \neq \phi \iff k \geqslant n$

なお，SU_5, E_7, E_8 に対しては，素朴な変形法は非力なようである。

1. Einstein 還元

G_c を連結・簡約・線形代数群，$E \to M$ を複素多様体上の正則主 G_c 束とする。G_c の閉部分群 S に対し M 上の主 S 束 $E_S \hookrightarrow E$ を E の S 還元という。fiber 束 $Y \to X$ の C^∞ 切断全体を $\Gamma(X, Y)$ と表す。E の S 還元 と $\Gamma(M, E/S)$ の元を自然な対応で同一視する。G を G_c の compact な実形とすると，E の G 還元が存在する。また G 還元 E_G 上の接続形式で，E の接続形式に拡張すると，$(1,0)$ 形式になるものが，一意的に存在する。これを G 還元の定める Hermitian 接続と呼ぶ。埋め込み $\nu : G_c \hookrightarrow GL_N$ を固定し，$E \times_\nu \mathbb{C}^N$ に誘導される共変微分と E_G, E 上の接続を同一視する。M を n 次元 Kähler 多様体，Φ をその Kähler 形式 —— 計量 $g_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$ に対し，$\Phi = i g_{\alpha\beta}\, dz_\alpha d\bar{z}_\beta$ とする。(p,q) 形式 $\Lambda^{p,q} = \Lambda^{p,q}M$ 上の Hermite 計量は，$\theta_1, \cdots, \theta_n$ を $\Lambda^{1,0}$ の正規直交基底とするとき，$\theta_{\alpha_1} \cdots \theta_{\alpha_p} \bar{\theta}_{\beta_1} \cdots \bar{\theta}_{\beta_q}$ が正規直交基底になるように定める。$\Lambda : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p-1,q-1}$ を $\Phi \wedge \cdot : \Lambda^{p-1,q-1} \to \Lambda^{p,q}$ の adjoint とする。例えば $\Lambda(\theta_\alpha \bar{\theta}_\beta) = -i\,\delta_{\alpha\beta}$ である。

$E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続 D に対し，$R = D \circ D$ 曲率，$K = i \Lambda R$ 平均曲率 とおく。G の Lie 環を $\mathfrak{g}$，G の中心 Z の Lie 環を $\mathfrak{z}$，Z_c, $\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{z}_c$ を複素化とする。$M \times \mathfrak{z}_c \hookrightarrow E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c$ に注意して，$K \in \Gamma(M, M \times \mathfrak{z}_c)$ であるとき，D を弱 Einstein 接続，さらに K が定値 $\in \mathfrak{z}_c$ であるとき，D を Einstein 接続と呼ぶ。これに応じて E_G は，（弱）Einstein 還元と言われる。

接続全体は，基準点を設けることにより線形空間とみなすことができた。同様にして，G 還元全体は，対称空間とみなすことができる。$E_G \hookrightarrow E$ を固定すると，$E/G = E(G_c/G) =$

$E_G(G_c/G) \xrightarrow{\sim} E_G \times_{Ad} \exp i\mathfrak{g}$．ここで最後の同型は，$G_c$ の G に関する共役 τ を用いて $G_c/G \xrightarrow{\sim} \exp i\mathfrak{g}$，$gG \longrightarrow (\tau g)\cdot g^{-1}$ により誘導されるものである。また主束からの誘導束 $Q \times_\rho V$ は，作用 ρ が明白であるとき，$Q(V)$ と書く。

(1.1)　D を $E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続とする．共変微分を $\Lambda^1_{\mathbb{C}} M = \Lambda^{1,0} + \Lambda^{0,1}$ に応じて $D = D' + D''$ と分けるとき，$h \in \Gamma(M, E_G \times_{Ad} \exp i\mathfrak{g}) = \Gamma(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続は，$D_h = D + h^{-1} D' h$ で与えられる。

$\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続を D_σ とする。$a \in \Gamma(M, M \times i\mathfrak{z})$ に対し，$e^{-a/2}\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続は，$D_\sigma + d'a$，$d = d' + d''$ M 上の外微分，平均曲率は，$K_\sigma + \square a$，K_σ は D_σ の平均曲率，$\square = \delta' d' + d' \delta' = \delta'' d'' + d'' \delta''$ となる。したがって，M を compact Kähler 多様体，以下常に仮定する，とするとき，

(1.2)　$\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ が弱 Einstein 還元 $\Rightarrow$ $\exists a \in \Gamma(M, M \times i\mathfrak{z})$ s.t. $e^{-a/2}\sigma$ が Einstein 還元。

系として

(1.3)　E が Einstein G 還元をもつ $\Longleftrightarrow$ E/Z_c が Einstein G/Z 還元をもつ。

$\mathfrak{g}$ 上に，負定値 G 不変対称形式 $(\ ,\ )$ で，$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上では Killing 形式に一致するものを固定し，$\mathfrak{g}_c$ 上に，複素線形に延長する。$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle := -(\ ,\tau\ )$ とおくと $\mathfrak{g}_c$ 上の正定値 Hermite 形式であり，$i\mathfrak{g}$ 上では，$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle = (\ ,\ )$ となっている。$(\ ,\ )$ は，$E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c$ 上

の対称双線形形式を，《，》は $E_G \times_{Ad} \mathfrak{g}_c = E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c$ 上の Hermite 計量を自然に定めるので，それぞれ同じ記号で表す．ただし《，》は G 還元の取り方に依存することに注意しておく。 $\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ に対し，

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\int_M |K(\sigma)|^2 \Phi^n \quad = \frac{1}{2}\int_M \|K(\sigma)\|^2 \Phi^n$$

とおく．ここで $|K(\sigma)|^2 = (K(\sigma), K(\sigma))$ ， $\|K(\sigma)\|^2 = \langle\langle K(\sigma), K(\sigma)\rangle\rangle$ … σ に対応する G 還元を用いる。 $E(\mathfrak{g}_c) := E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c = M \times \mathfrak{z}_c + E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c'$ に応じて，$E(\mathfrak{g}_c)$ 値の微分形式 ϕ を $\phi = \phi_{\mathfrak{z}} + \phi_s$ と分解する。

(1.4) $\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ に対し $\zeta = \int_M K(\sigma)_{\mathfrak{z}} \Phi^n \in \mathfrak{z}_c$ とおくと，

$$J(\sigma) \geqq |\zeta|^2 \left(2 \cdot \int_M \Phi^n\right)^{-1}$$

であり、等号が成立するのは σ が Einstein 還元のときに限る。

E の Hermitian 接続の曲率 R に対し，$R_{\mathfrak{z}}$ は、代数的 torus を fiber とする主束 E/G_c'，$G_c' = [G_c, G_c]$ 交換子群，の vector 値の第 1 Chern 類、のようなものであり $R_{\mathfrak{z}} \Phi^{n-1} = \Lambda R_{\mathfrak{z}} \cdot \Phi^n/n$ であるから，(1.4) の不等式の右辺は E の位相同型類、と，対称形式 (,) と Φ^n の cohomology 類、だけに依存する定数である。

(1.5) $E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続を D，平均曲率を K とする。E_G を通る G 還元の C^∞族 が　$h_t \in \Gamma(M, E_G \times_{Ad} \exp i\mathfrak{g})$，$h_0 = 1$ により与えられているとする。このとき

$$\partial_t J(h_t)|_{t=0} = \int_M \langle\!\langle D' v_0, D'K \rangle\!\rangle \Phi^n, \quad v_t := h_t^{-1}\partial_t h_t .$$

ここで，$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ は，$E_G \times_{Ad} \mathfrak{g}_c$ 上の内積と，M の計量によって定義される Hermite 形式 $\Lambda^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_c) \times \Lambda^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_c) \longrightarrow \mathbb{C}$ である。したがって，

(1.6) E の G 還元 E_G が　$J(\ )$ の臨界点 $\Longleftrightarrow$ $DK = 0$.

さらに詳しく，

(1.7) 定理　E_G を $J(\ )$ の臨界 G 還元とすると，G の subtorus の中心化群 L と，E の正則 L_c 還元 E' と，E' の Einstein L 還元 E'_L で，$\Gamma(M, E/L) \longrightarrow \Gamma(M, E/G)$ により，$E'_L \longrightarrow E_G$ となっているものが存在する。

$(\ ,\ ) : \mathfrak{g}_c \times \mathfrak{g}_c \to \mathbb{C}$ は，自然に双線形写像 $\Lambda^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_c) \times \Lambda^{r,s} \otimes E(\mathfrak{g}_c) \longrightarrow \Lambda^{p+r, q+s}$ を定義するので，これも $(\ ,\ )$ と書く。E_G 上の Hermitian 接続 D の曲率 R，平均曲率 K に対し，

(1.8) $8\pi^2 n(n-1)\ c_2(E(\mathfrak{g}_c)) \cdot \Phi^{n-2} = (\|R_S\|^2 - \|K_S\|^2) \cdot \Phi^n$,

(1.9) $n(n-1)\ (R_{\mathfrak{z}}, R_{\mathfrak{z}}) \cdot \Phi^{n-2} = (\|R_{\mathfrak{z}}\|^2 - \|K_{\mathfrak{z}}\|^2) \cdot \Phi^n$.

$\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ に対して, $I(\sigma) = \frac{1}{2}\int_M \|R(\sigma)\|^2 \Phi^n$ とおく, σ に対応する G 還元を E_G と考えている, このとき (1.8-9) より,

(1.10) $$I(\sigma) - J(\sigma) = n(n-1)/2 \cdot \int_M \left(8\pi^2 c_2(E(\mathfrak{g}_c)) - (R(\sigma)_{\mathfrak{z}}, R(\sigma)_{\mathfrak{z}}) \right) \Phi^{n-2}.$$

したがって $I(\ ) - J(\ )$ は G 還元に依らない。ここでの扱いと立場を異にするが, Einstein 接続は Yang-Mills 接続であり, $I(\ ), J(\ )$ を固定された主 G 束の Hermitian 接続達に対する汎関数として定義すれば, $I(\ ) - J(\ )$ は定値である。また (1.8) より次も容易にわかる。

(1.11) Lübke の不等式. E が弱 Einstein G 還元をもつならば, $\int_M c_2(E(\mathfrak{g}_c))\Phi^{n-2} \geq 0$. 等号が成立する $\Longleftrightarrow$ E/Z_c が平坦。

E の G 還元の族 h_t を, $E_G \hookrightarrow E$ を固定し $E/G \xrightarrow{\sim} E_G \times_{Ad} \exp i\mathfrak{g}$ を通して, $h_t \in \Gamma(M, E \times_{Ad} G_c)$ と考えて, $h_t^{-1}\partial_t h_t \in \Gamma(M, E \times_{Ad} \mathfrak{g}_c)$ を計算すると, $h_t^{-1}\partial_t h_t$ は基準点 E_G の取り方に依らないことがわかる。 φ を $\mathfrak{g}_c$ 上の G_c 不変な, 対称, p-線形形式とする。 $h, k \in \Gamma(M, E/G)$ に対し, $h_t \in \Gamma(M, E/G)$ を t について区分的に滑らかで $h_0 = k$, $h_1 = h$ であるようにとる. [D_2] に従い,

(1.12) $$F(h, k) := -i p \int_0^1 \varphi(h_t^{-1}\partial_t h_t, R_t, \cdots, R_t)\, dt,\ R_t = h_t \text{ の曲率},$$

とおくと，$F(h,k)$ は、$\Gamma(M,\Lambda^{p-1,p-1})/(\mathrm{Im}\,d'+\mathrm{Im}\,d'')$ の元とみるとき，h_t の取り方には依らず、$\partial_t F(h_t,k)=-ip\varphi(h_t^{-1}\partial_t h_t, R_t,\cdots R_t)$ である．また $id''d'F(h,k)=\varphi(R_h,\cdots,R_h)-\varphi(R_k,\cdots,R_k)$，$R_h, R_k$ は h,k の曲率，となっている。

$\varphi_1=-(\ ,2ic/n)$，$c\in i\mathfrak{z}$，　$\varphi_2=-(\ ,\ )$ から (1.12) によって F_1, F_2 を定義する。$h,k\in\Gamma(M,E/G)$ に対して，

$$\mathcal{L}(h,k)=\int_M F_1(h,k)\Phi^n+F_2(h,k)\Phi^{n-1},$$

とおく．$h_t\in\Gamma(M,E/G)$ が t について滑らかであるとし，$v_t:=h_t^{-1}\partial_t h_t$ とおくと

$$\partial_t\mathcal{L}(h_t,k)=\int_M (v_t, K_t-c)\,2\Phi^n/n\ .$$

したがって，G還元が、$\mathcal{L}(\ ,k)$ の臨界点、$\Longleftrightarrow$ Einstein還元。また、

$$\partial_t^2\mathcal{L}(h_t,k)=\int_M(\partial_t v_t, K_t-c)\,2\Phi^n/n+\int_M\|D_t' v_t\|_t^2\,2\Phi^n/n,$$

ここに，D_t' は、h_t の定める共変微分の (1,0) 成分，$\|\ \|_t^2$ は．h_t の定める $E\times_{Ad}\mathfrak{g}_c$ 上の Hermite 形式である。これより，

(1.13) 正則構造を固定するとき，Eの Einstein G還元の個数は、0か1である。

汎関数 $\mathcal{L}(\ ,k)$ の勾配流を考える。 $c \in i\mathfrak{z}$ に対し、$h_t \in \Gamma(M, E/G)$, $t \geq 0$ が $h_t^{-1}\partial_t h_t = -(K(h_t) - c)$ を満たすとき Einstein flow と呼ぶ。 h_t, k_t を同じ c に対する Einstein flow とする。 $f = f(t,s) \in \Gamma(M, E/G)$ を $f(t,0) = h_t$, $f(t,1) = k_t$, $\partial_s(f^{-1}\partial_s f) = 0$ であるようにとる。 D_f, $\|\ \|_f^2$ を f に対応する G 還元の定める共変微分, $\Lambda^{1,0} \otimes E(\mathfrak{g}_c)$ 上の Hermite 計量とする。 $e = e(t) = \|f^{-1}\partial_s f\|_f^2$ に対して、 $\partial_t e + \Box e = -\|D_f'(f^{-1}\partial_s f)\|_f^2$ である。したがって最大値原理により、

(1.14) $h_0 = k_0 \Rightarrow h_t = k_t$, $t \geq 0$

Einstein flow の存在は、[D_2, D_3] の論法において、1つの鍵である。

(1.15) G_c を半単純とする。Einstein flow h_t, $h_t^{-1}\partial_t h_t = -K(h_t)$ が任意の初期値 $h_0 \in \Gamma(M, E/G)$ に対して、 $0 \leq t < \infty$ で存在する。

これは、 $G_c \hookrightarrow GL_N$ Zariski 閉部分群とするとき, GL_N のある表現 $\rho: GL_N \to GL_m$ を用いて, $G_c = \{g \in GL_N \ ;\ \rho(g) \in 1 \times GL_{m-1} \subset GL_m\}$ と表されることと, (1.14) と GL_N 束について確立している存在定理 [D_2], [小林] を用いればただちにわかる。

2. 安定主束

M を n次元射影多様体とし, Fubini-Study 計量の制限により定義される Kähler 計

量を固定する。P を G_c の放物部分群とする。$\lambda \in Hom(P, \mathbb{C}^\times)$ は、(i) $\lambda | Z_c^0 = 1$,
(ii) P のある Borel 部分群 B と 極大torus $T_c \subset B$ に対し、$\langle \lambda | t_c, \alpha \rangle \geqq 0$, $\forall \alpha$
B の root であるとき、P の優指標、と呼ばれる。ここで t_c は T_c の Lie 環, $\langle , \rangle$
は Killing 形式から定義される $Hom(t_c, \mathbb{C})$ 上の双線形形式である。代数的主束 E
$\to M$ に対し、$M' \subset M$, Zariski 開, $codim(M \setminus M') \geqq 2$ 上で定義された E の還元
を 有理還元 と呼ぶ。M 上の直線束 S に対し、$deg(S) := \int_M c_1(S) \Phi^{n-1}$
とおく。[RR] に従い、

(2.1) 定義 代数的主 G_c 束 $E \to M$ は、任意の 放物部分群 P と優指標、$\lambda \neq 1$ と有理還元 E_P に対し、$deg(E_P \times_\lambda \mathbb{C}) \leqq 0$ であるとき半安定, $deg(E_P \times_\lambda \mathbb{C}) < 0$ であるとき 安定 といわれる。$E_P \times_\lambda \mathbb{C}$ は、元来 余次元2以上 の部分集合を除いたところで定義された直線束であるが、M 上に拡張してあると考える。

$\pi : E/P \to M$ の fiber に沿う接空間を $T_{G_c/P} := \ker \pi_*$, $\pi_* \, T(E/P) \to TM$, 正則接空間, により定義する。任意の極大放物部分群 P と E/P の有理切断 σ に対して $deg(\sigma^* \det T_{G_c/P}) \geqq 0$, > 0 であることと E が 半安定, 安定 であることとは 同値になる。また Borel 部分群 B を固定して, B を含む放物部分群について, "条件" が満たされていれば、明らかに 半安定、安定 となる。

G_c の放物部分群 P で Levi 分解 $P = L_c N$ において、L_c が $L \subset G$ の複素化になっているものをとる。E の G 還元 E_G と 正則 P 還元 E_P が与えられたとする。$E/P = E(G_c/P) = E_G(G_c/P) = E_G(G/L) = E_G/L$ であるから、E_G の L 還元 E_L が

自然に得られる。$E_L \hookrightarrow E_P/N = E_P(P/N) = E_P(L_c)$ により、E_L 上に Hermitian 接続が定義される。これの接続形式 ω_L は、$E_G \hookrightarrow E$ の定める接続形式 ω_G を $E_L \hookrightarrow E_G$ により 1-形式として引き戻し、$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{l}_c + \mathfrak{n} + \tau\mathfrak{n}$ に応じて $\mathfrak{l}_c$ 成分をとったものに一致する。ここで $\mathfrak{l}_c, \mathfrak{n}$ は、L_c, N の Lie 環，τ は、G に関する共役である。ω_L を $E_L(G_c) = E$ 上に拡張した接続形式も ω_L で表すとき，

(2.2) 命題、$\omega_G - \omega_L = \beta + \tau\beta$，$\beta \in \Gamma(M, \Lambda^{0,1} \otimes (E_L \times_{Ad} \mathfrak{n}))$ という形である。τ は、$\Lambda^1_c M \otimes (E_G \times_{Ad} \mathfrak{g}_c)$ へ共役線形に拡張したものである。

(2.3) 定理．$E \to M$ が Einstein G 還元をもつならば、放物部分群の Levi 部分群 L_c と E の正則 L_c 還元 E_{L_c} で，安定主 L_c 束であるものが存在する。

証明： 放物部分群 P を上のようにとり，$T_c \subset L_c$ を G の極大 torus の複素化とする。P の優指標 $\lambda \neq 1$，有理還元 E_P に対し，$S_\lambda := E_P \times_\lambda \mathbb{C}$ とおく。(2.2) の β を $\beta = \sum \beta_\alpha$; $\beta_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $\alpha \cdots N$ の root と分解すれば、

$$c_1(S_\lambda)\Phi^{n-1} = -\sum \|\beta_\alpha\|^2 \langle \lambda, \alpha \rangle \Phi^n / 2\pi n \ .$$

したがって E は半安定である．P を極大放物部分群とすれば、「$\deg S_\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0$」。"$\beta = 0$" は、余次元 $\geqq 2$ の集合の外で E_G の Hermitian 接続は、L 接続に還元できることを意味する。このとき E_G の holonomy 還元から誘導される E の L_c 還元は、明らかに正則還元である。ゆえに $\dim G_c$ に関する帰納法

により主張が従う。

小林・Hitchin予想、は、(2.3)の逆を問うわけである。

(2.4) $E \to M$ が安定ならば、Eは、Einstein G還元をもつ。

(1.3)より G_c は、半単純として良い。(1.15)が確立しているので [D_1, D_3] [MR] [RR] より「$\dim M = 1$ のとき $E(\mathfrak{g}_c)$ が Einstein接続をもつとき Eは、Einstein G還元をもつか?」ということになる。これは、[AB]において証明されている。

3. CP^2 上の反自己双対接続

Gの部分群Kは、その中心化群がGの中心と等しいとき既約であるといわれる。主G束上の接続は、そのholonomy群が既約であるとき、既約ということにする。反自己双対接続の研究において、伊藤光弘氏の結果は、基本的である。

(3、1) [I_1, I_3]. Mを正のscalar曲率をもつKähler曲面とする。compact半単純Lie群Gをfiberとする主束 $Q \to M$ 上に、既約反自己双対接続Dが存在すると仮定する。このとき複素次元が $c_2(Q \times_{Ad} \mathfrak{g}_c) - \dim G \cdot (\chi + \tau)/4$ の既約反自己双対接続のmoduliが存在する。ここで χ は、MのEuler数、τ は符号である。

Q_k を CP^2上の指数kの主G束として. $\mu_k G = c_2(Q_k \times_{Ad} \mathfrak{g}_c) - \dim G$ とおく。

$$(3.2)\quad \begin{aligned} \mu_k SU_n &= 2nk - n^2 + 1 \\ \mu_k Sp_n &= 2(n+1)k - n(2n+1) \\ \mu_k Spin_n &= 2(n-2)k - n(n-1)/2, \quad n \geqq 7 \\ \mu_k SO_n &= (n-2)k - n(n-1)/2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_k E_6 &= 24k - 78 \\ \mu_k E_7 &= 36k - 133 \\ \mu_k E_8 &= 60k - 248 \\ \mu_k F_4 &= 18k - 52 \\ \mu_k G_2 &= 8k - 14 \end{aligned}$$

変形理論を適用する初期値は、

$$(3.3)\quad \mathcal{M}_k SU_2 \neq \phi \iff k \geqq 2, \qquad \mathcal{M}_k SU_3 \neq \phi \iff k \geqq 3$$

$$\mathcal{M}_k SO_3 \neq \phi \iff k = 8+4n,\ 3+4n \quad n \geqq 0.$$

SU_n $n=2,3$ については、安定SL_n束の存在 [cf. H] より容易に導かれる。CP^2上の反自己双対2形式の空間 Λ^2_- は、$\mathcal{M}_3 SO_3$ の元を定める。したがって $[I_2]$ により $n \geqq 0$ に対し $\mathcal{M}_{3+4n} SO_3 \neq \phi$。 また $SU_2/\{\pm 1\} = SO_3$ により, $\mathcal{M}_k SU_2 = \mathcal{M}_{4k} SO_3$ である。

(3.4) CP^2 上の安定SL_n束に対し $c_2 \geqq n$。

(3.5) G_i $i=1,2$ 連結単純Lie群, $Q_i \to M$ 主G_i束, D_i Q_i上の固有接続に対し $Q = Q_1 \times_M Q_2$, $D = D_1 \times D_2$, K を D の holonomy 群とする。 次の三つ

の場合には．$K = G_1 \times G_2$ ．(i) G_1, G_2 の Lie環が異なる。(ii) G_i の中心 $=\{1\}$ で $D_1 \neq D_2$ 。(iii) M, G_i が 1連結で $D_1 \neq D_2$ 。

以上の準備の下に．"変形" の実際について述べる。

Sp_n　(3.4)より $\mathcal{M}_k Sp_n \neq \phi \Rightarrow k \geqq 2n$．$Sp_1 = SU_2$ に注意して帰納的に存在を示す。$Q_2 \in \mathcal{M}_2 Sp_1$，$Q_{k-2} \in \mathcal{M}_{k-2} Sp_{n-1}$ の fiber積を Q とおけば (3.5) より．Q 上には固有 $Sp_1 \times Sp_{n-1}$ 反自己双対接続 D が存在し．moduli の次元は $\mu = 2nk + 4 - 2n^2 - n$ 。Q の fiber を Sp_n に拡張すれば、指数 k の主束が得られる。このとき D は既約な Sp_n 接続に拡張されるので $\mu_k Sp_n - \mu > 0$ より $\mathcal{M}_k Sp_n \neq \phi$ 。

$Spin_5 = Sp_2$ に注意すれば，$Spin_6 = SU_4$ について，$\mathcal{M}_k SU_4 \neq \phi \Longleftrightarrow k \geqq 4$ がわかる。$Spin_n$　$n \geqq 7$ については．$Spin_{n-1} \hookrightarrow Spin_n$ により帰納的にわかる。

F_4 の 26次元既約表現 λ に対し $c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^{26}) = 6k$，$Spin_9 \hookrightarrow F_4$ は最大次元の真部分群であり，π_3 の同型を誘導する。$\mu_k F_4 - \mu_k Spin_9 = 4(k-4)$ であるから (0.5) がわかる。E_6 の 27次元既約表現 λ に対し，$c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^{27}) = 6k$，$F_4 \hookrightarrow E_6$，$G_2$ の 7次元既約表現 λ に対し $c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^7) = 2k$，$SU_3 \hookrightarrow G_2$ を用いれば．(0.6)，(0.7) が従う。

SO_4 束については．$SO_3 \times SO_3$ 束からの持ち上げを調べれば良い。SO_n　$n \geqq 5$ については．$SO_{n-1} \hookrightarrow SO_n$ により．帰納法が働く。(0.10)，(0.11) における $k=6$ の欠落は．$Sp_2 \longrightarrow SO_5$，$SU_4 \longrightarrow SO_6$ に由来するものである。

SU_n　$n \geqq 6$ については．次のよく知られた事実からただちにわかる。

(3.6) SU_n の既約部分群で最大次元のものは，n＝偶数のとき $Sp_{n/2}$，n＝奇数のとき SO_n．

参考文献

[AB] M.F. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 308, 1982, 523-615.

[AHS] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin & I.M. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Roy. Soc. London A 362, 1978, 425-461.

[B] N.P. Buchdahl, *Instantons on CP_2*, J. Diff. Geometry, 24, 1986, 19-52.

[D_1] S.K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narashimhan and Seshadri*, J. Diff. Geometry, 18, 1983, 269-278.

[D_2] S.K. Donaldson, *Anti self dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. 50, 1985, 1-26.

[D_3] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, preprint.

[H] K. Hulek, *On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane* in Vector Bundles and Differential Equations, edited by A. Hirschowitz, PM 7, Birkhäuser, 1980.

[I_1] M. Itoh, *On the moduli space of anti self dual Yang-Mills connections on Kähler surfaces*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19, 1983, 15-32.

[I_2] M. Itoh, *Self-dual Yang-Mills equations and Taubes' Theorem*, Tsukuba J. Math. 8, 1984, 1-29.

[I_3] M. Itoh, The moduli space of Yang-Mills connections over Kähler surfaces is a complex manifold. Osaka J. Math. 22, 1985, 845-862.

[小林] S. Kobayashi, Differential geometry of complex vector bundles. 岩波書店, 1987.

[小磯] N. Koiso, Yang-Mills connections and moduli space, Osaka J. Math. 24, 1987, 147-171.

[LO] M. Lübke & C. Okonek, Stable bundles on regular elliptic surfaces, J. reine angew. Math. 378, 1987, 32-45.

[MR] V.B. Metha & A. Ramanathan, Restrictions of stable sheaves and representation of the fundamental group, Invent. math. 77, 1984, 163-172.

[R] A. Ramanathan, Stable principal bundles on a compact Riemann surface, Math. Ann. 213, 1975, 129-152.

[RR] S. Ramanan & A. Ramanathan, Some remarks on the instability flag, Tôhoku Math. J. 36, 1984, 269-291.

[UY] K. Uhlenbeck & S.T. Yau, On the existence of Hermitian Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Appl. Math. 39, Number S., 1986, 257-293.

[T] C.H. Taubes, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, J. Diff. Geometry, 19, 1984, 517-560.