

ある調和写像の正則性について

東大理 小野 薫 (Kaoru Ono)

§ 1. 序

Kähler 多様体間の正則写像は調和写像であることが知られている。([L]) この逆については次のことが示されている。

A) (Eells - Wood [E-W])

$X, Y$  を閉リーマン面とし、 $f: X \rightarrow Y$  を ( $X, Y$  上のある Kähler 計量に関する) 調和写像とする。このときもしも、

$$(*) \quad e(X) + |\deg(f) \cdot e(Y)| > 0$$

(ここに、 $e(X), e(Y)$  は  $X, Y$  の Euler 数、 $\deg(f)$  は  $f$  の写像度を表わす。)

が成り立つならば、 $f$  は正則又は反正則写像である。

B) (Siu [S-1])

$M, N$  を compact Kähler 多様体とし、更に  $N$  は、Siu の意味で strongly negative curvature をもつとする。 $f: M \rightarrow N$  を調和写像で、 $M$  上のある点での differential  $df$  の rank が 4

以上であるものとすれば、 $f$  は正則又は反正則である。

ここでは、次の定理を証明する。

Theorem 1.

$M$  を  $m$  次元 compact Kähler 多様体で、第 1 Chern 類  $c_1(M)$  が negative なものとし、 $N$  を関リ-マン面が hyperbolic なものとする。もしも、調和写像  $f: M \rightarrow N$  が次の条件

$$(**) \quad m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$$

を満たすとすれば、 $f$  は正則又は反正則である。

この定理は、前出の Eells-Wood による結果 A) の一般化になっている。Siu による結果 B) は differential に関する条件がいつも満たされないため、そのまま適用することはできない。しかし [S-1] の中で用いられた Weitzenböck formula を使って示される Lemma ([S-2]) が証明の中で使われる。

Theorem 1 の応用として次のことが証明できる。

Theorem 2.

$M, N$  を、上述の通りとする。このとき、任意の連続写像  $f: M \rightarrow N$  に対して、次の不等式が成り立つ。

$$|f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq m \cdot |c_1(M)^m [M]|.$$

これは、関リ-マン面間の連続写像に関する Kneser の結果の一般化と見ることが出来る。

§ 2. Theorem 1. の証明。

証明のために、semi-stable vector bundle, Einstein-Hermitian vector bundle の定義と基本的な性質を復習する。

$M$  を  $m$  次元 compact Kähler 多様体,  $\Phi$  を  $M$  上の Kähler form とする。

Definition (2.1).

$M$  上の正則 vector bundle  $E$  が、 $\Phi$ -semi stable とは、任意の coherent subsheaf  $\mathcal{S}$  で、 $0 < \text{rank } \mathcal{S} < \text{rank } E$  であるものに対して、

$$\int_M \frac{c_1(\mathcal{S})}{\text{rank } \mathcal{S}} \wedge \Phi^{m-1} \leq \int_M \frac{c_1(E)}{\text{rank } E} \wedge \Phi^{m-1}$$

が満たされることである。

Definition (2.2).

$(E, h, \nabla)$  を  $M$  上の Hermitian vector bundle (即、 $E$  は  $M$  上の正則 vector bundle,  $h$  は  $E$  上の Hermitian metric,  $\nabla$  は Hermitian connection) とする。 $(E, h, \nabla)$  が Einstein-Hermitian vector bundle とは、Ricci curvature  $K$  (即、curvature を  $M$  上の Kähler metric に関して縮約したもの) が、 $M$  上の関数  $\phi$  を用いて、 $K = \phi \cdot \text{Id}_E$  と書けるものことである。

(注意) 上で  $\phi$  の代りに定数としても  $E$  に対する条件と

とは同値である。

Lemma (2.3).

1) 任意の Hermitian line bundle は, Einstein-Hermitian vector bundle である。

2) 2つの Einstein-Hermitian vector bundles の tensor 積は, Einstein-Hermitian vector bundle である。

3) Einstein-Hermitian vector bundle の dual は, Einstein-Hermitian vector bundle である。

4) Einstein-Hermitian vector bundle は  $\Phi$ -semi stable である。

5)  $(M, \Phi)$  を Einstein-Kähler 多様体とすると, その tangent bundle  $TM$  は, Einstein-Hermitian vector bundle となる。

以上のことについては, [K] を参照されたい。

$f: M \rightarrow N$  を Kähler 多様体間の調和写像とすると, その differential の複素化  $d^{\mathbb{C}}f$  は次の4つに分解する。

$$\partial f: T'M \rightarrow T'N \quad \bar{\partial} f: T''M \rightarrow T'N$$

$$\partial \bar{f}: T'M \rightarrow T''N \quad \bar{\partial} \bar{f}: T''M \rightarrow T''N$$

ここに  $T'M, T''M$  等は  $(1,0)$ -tangent bundle,  $(0,1)$ -tangent bundle を表わす。

Lemma (2.4). ([S-2])

$M$  を compact Kähler 多様体,  $N$  を hyperbolic なリーマン面とする。このとき、調和写像  $f: M \rightarrow N$  に対し、 $f^*TN$  は正則 line bundle となり、 $\partial f$  は  $T^*M \otimes f^*TN$  の正則  $\partial$ -section となる。(ここで  $TM, TN$  を  $T^*M, T^*N$  と同一視している。)

Proof of Theorem 1.

Lemma (2.4) により、 $\partial f$  は  $T^*M \otimes f^*TN$  の正則  $\partial$ -section である。 $f$  が反正則でなければ  $\partial f$  は恒等的には 0 ではなく、従って任意の開集合上恒等的には 0 ではない。従って、 $\partial f$  の生成する  $\mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$  の subsheaf は  $M$  の構造層  $\mathcal{O}_M$  と同型である。これを  $\mathcal{E}$  と書くことにする。

一方、 $M$  の第 1 Chern 類が negative であるから、Aubin-Yau の定理により、 $M$  上には Einstein-Kähler metric が存在する。Lemma (2.3) 3), 5) から、 $T^*M$  は、(上述の  $M$  上の Einstein-Kähler metric に関して) Einstein-Hermitian vector bundle である。 $f^*TN$  は正則 line bundle であるから、(上述の  $M$  上の Einstein-Kähler metric に関して) Einstein-Hermitian vector bundle である。Lemma (2.3) 2), 4) から

$T^*M \otimes f^*TN$  は  $\mu$ -semi stable (ここで  $\mu$  は上述の  $M$  上の

Einstein-Kähler metric の Kähler form) とする。  $\Phi$ -semi stable vector bundle の定義と  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$  から、

i)  $0 \leq \{m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1} [M]$  が得られる。

$N$  の複素構造を逆にしたものを  $\bar{N}$  と書くことにする。 $f: M \rightarrow N$  が正則でないとする。  $f: M \rightarrow \bar{N}$  は反正則ではなく、従って先の議論により、

ii)  $0 \leq \{-m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1} [M]$  が得られる。

$f$  が、正則でも反正則でもないとする。 i), ii) から、

$$m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq |c_1(M)^m [M]|$$

となるが、一方、仮定から、

$$m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$$

であるからこれは矛盾である。従って  $f$  は正則又は反正則である。 (終)

### § 3. 正則写像の energy の評価。

smooth な写像  $f: M \rightarrow N$  に対し energy  $E(f)$  を次式で定義する。

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 dV_M$$

Proposition (3.1).

$M$  を compact Kähler 多様体で、その Ricci curvature が  
 下から  $\frac{k}{\dim_{\mathbb{R}} M}$  ( $k$  は 負の定数) で抑えられているもの  
 とし、 $N$  を non-positively curved Kähler 多様体で、その  
 holomorphic sectional curvature が 上から (負の定数)  $K$   
 で抑えられているものとする。このとき 正則写像

$f: M \rightarrow N$  の energy は、

$$E(f) \leq \frac{|k| \cdot \text{vol}(M)}{2 |K|}$$

を満たす。

証明には、次の Weitzenböck formula が用いられる。

(Weitzenböck formula for harmonic maps, [E-L], [E-S])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|df\|^2 &= - \|\nabla df\|^2 + \sum_{s,t} \langle R^N(df(e_s), df(e_t)) df(e_t), df(e_s) \rangle \\ &\quad - \sum_s \langle df(\text{Ric}^M(e_s)), df(e_s) \rangle \end{aligned}$$

ここに  $\{e_s\}$  は  $TM$  の orthonormal frame,  $R^N$  は  
 $N$  の curvature tensor,  $\text{Ric}^M$  は  $M$  の Ricci curvature  
 tensor を 線型写像  $TM \rightarrow TM$  と見たものを表わす。

## § 4. Theorem 2. の証明。

$$f \text{ が } m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leq |c_1(M)^m[M]|$$

を満たしているときは何も示さないのでよいから。

$m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$   
 であるとして、Eells-Sampson [E-S] により、 $f$  と  
 homotopic な harmonic map が存在することがわかるので、  
 $f$  は harmonic map であるとしてよい。すると Theorem 1.  
 から  $f$  は正則又は反正則となる。 $f$  が正則として証明すれば  
 十分である。

正則写像  $f: M \rightarrow N$  に Proposition (3.1) を適用す  
 ると

$$E(f) \leq \frac{|k| \cdot \text{vol}(M)}{2 \cdot |K|}$$

ここで、 $K = -1$ 、 $k = -2m$  ( $M$  上の Kähler  
 form  $\omega_N$  の Ricci form の  $-1$  倍 となるようにとれば  
 よい。) を代入して、

$$E(f) \leq \frac{m}{(2\pi)^m} \cdot \frac{(2\pi)^m}{m!} \cdot |c_1(M)^m [M]|.$$

一方、

$$\frac{1}{m!} |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| = \frac{E(f)}{(2\pi)^m}$$

従って、

$$|f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq m \cdot |c_1(M)^m [M]|$$

を得る。(終)



REFERENCES.

- [E-L] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, CBMS Regional Conf., 1981
- [E-S] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. Joun. Math. 86 (1964), 109-160
- [E-W] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976), 263-266
- [K] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Iwanami Shoten and Princeton University Press 1987
- [L] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés kählériennes, Symp. Math. III . (Bologna) 1970, 341-402
- [O] K. Ono, On the holomorphicity of harmonic maps from compact Kähler manifolds to hyperbolic Riemann surfaces, Preprint, 1986
- [S-1] Y. T. Siu, The complex analyticity of harmonic maps and strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. Math. 112 (1980), 73-111
- [S-2] Y. T. Siu, Some Recent Results in Complex Manifold Theory related to Vanishing Theorems for semi-positive case, Springer Lecture Notes in Math. 1111 (1985), 169-192