数理解析研究所講究録
662巻 1988年 66-84

代数曲面の3次被覆について

京大、理　徳永浩雄 (Hiro-o Tokunaga)

§0. Introduction.

Yは代数多様体, XはY上の被覆多様体とし, $p: X \longrightarrow Y$は被覆写像とする. $\mathbb{C}(Y)$, $\mathbb{C}(X)$をそれぞれ, Y, Xの有理函数体とすると, pによるpull-backによって, $\mathbb{C}(Y)$は, $\mathbb{C}(X)$の部分体とみなされ, 拡大次数$[\mathbb{C}(X):\mathbb{C}(Y)]$は $\deg p$に等しい. このことから, 以下では, "finite morphism $p: X \longrightarrow Y$が degree nの被覆"であるとは, $\mathbb{C}(X)$が$\mathbb{C}(Y)$のn次代数拡大になっていることを意味するものとする. ここでは, 主に, $\dim X = \dim Y = 2$, $\deg p = 3$の場合を考える. よく知られているように2通りの場合に分かれる. 即ち:

(i) $\mathbb{C}(X)$は$\mathbb{C}(Y)$の Galois拡大. (即ち, 巡回拡大)

(ii) $\mathbb{C}(X)$は$\mathbb{C}(Y)$の non-Galoisな拡大.

である. (i)の場合, $p: X \longrightarrow Y$は巡回被覆になっており, その構造はよく知られている. 問題は(ii)の場合で, この場合に

ついては，まだ詳しいことは知られていない．systematic な結果としては，R. Miranda [4] があり，そこでは，Tschirnhausen module という rank 2 の vector bundle が重要な働きをしている．藤田隆夫氏は，この方法を用いて，$\mathbb{P}^n$ $(n \geq 4)$ 上の 3 次被覆に関する美しい結果を得た．([1])．同じ事実は，R. Lazarsfeld [3] においても得られている．(方法は異なる．) ここでは，3 次被覆を "3次方程式を解く" という観点から調べ，それによって得られる結果について述べる．詳しくは，徳永 [5] を参照されたい．

目次

§1. 準備.

3 次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

の解は次のようにして求めることができる．

$$x = u + v$$

とおいて代入すると,

$$(u^3 + v^3 + b) + (u+v)(3uv + a) = 0$$

従って,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = -\frac{a}{3} \end{cases}$$

を満たす u, v を求めればよい. これにより, (*)の解は

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{R}} \\ x_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{R}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{R}} \\ x_3 = \omega^2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{R}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{R}} \end{cases}$$

但し, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$, $R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$.

と求めることができる. これがいわゆる"Cardanoの公式"である.

さて, $p : X \longrightarrow Y$ は finite triple cover, X, Y は smooth projective varieties とするとき, X の有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ は Y の有理函数体 $\mathbb{C}(Y)$ の 3次代数拡大となっているから, $\mathbb{C}(X)$ は:

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(\theta)$$

但し, θ は 3次方程式

$$X^3 + aX + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}(Y)$$

の解.

という形で得られる．ここで，以下の議論のため，次のTheoremを引用する．

<u>Theorem</u>．Yは algebraic variety，$\mathbb{C}(Y)$はその有理函数体，Lは$\mathbb{C}(Y)$の有限次代数拡大とする．このとき，次の性質をみたす normal algebraic variety Xが一意的に存在する．

(i) $\mu : X \longrightarrow Y$ finite surjective morphism

(ii) Xの有理函数体$\mathbb{C}(X)$はLに等しく，$\deg\mu = [L : \mathbb{C}(Y)]$

証明は，Iitaka [2]，§2.14を参照されたい．

<u>Definition</u>．上記のXを，YのL-normalizationと呼ぶ．

さて，最初の議論と，このTheoremを合わせると，

$$D(X/Y) := Y\text{の } \mathbb{C}(Y)(\sqrt{R})\text{-normalization}$$
$$\tilde{X} := D(X/Y)\text{の } \mathbb{C}(D(X/Y))\left(\sqrt[3]{-\tfrac{b}{2}+\sqrt{R}}\right)\text{-normalization}$$

という，normal varieties が一意的に存在することがわかる．X，$\tilde{X}$，$D(X/Y)$，及びYは明らかに以下の性質を

満たす:　図式

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta_2"] \arrow[dd, "p_1"] & \\ X \arrow[dr, "p"'] & & D(X/Y) \arrow[dl, "\beta_1"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

は可換であり,

(i) p: cyclic triple cover のとき.

$$\tilde{X} \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} X, \quad D(X/Y) \underset{\beta_1}{\xrightarrow{\sim}} Y$$

(ii) p: non-Galois triple cover のとき.

$\alpha : \tilde{X} \longrightarrow X$　finite double cover

$\beta_1 : D(X/Y) \longrightarrow Y$　finite double cover

$\beta_2 : \tilde{X} \longrightarrow D(X/Y)$　finite cyclic triple cover

$p_1 : \tilde{X} \longrightarrow Y$　finite Galois cover,

$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{X})/\mathbb{C}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_3$

従って, triple cover $p : X \longrightarrow Y$ を調べるには, $\tilde{X}$, $D(X/Y)$, 及び, β_1, β_2, α を調べることが重要となる.

<u>Remark.</u>　X, Y が smooth であっても, $\tilde{X}$, $D(X/Y)$ は smooth とは限らず, さらに, $\tilde{X}, X, Y$ が smooth であっても

$D(X/Y)$ は smooth とは限らない.

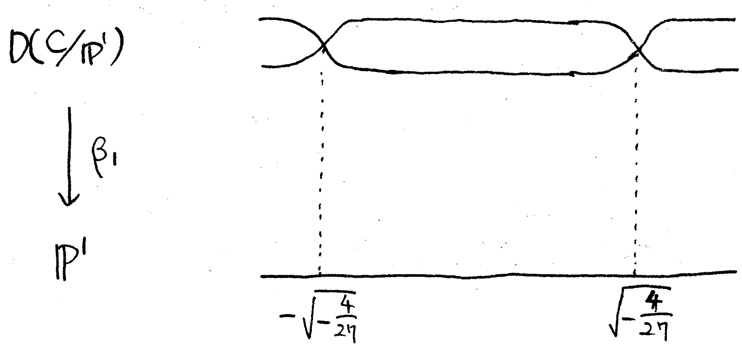
§2. 例.

ここでは, 具体的な例に対して, §1で述べた $D(X/Y)$, $\hat{X}$, α, β_1, β_2 及び Galois 群の action を調べる.

Example 1. $p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$: triple cover, C は $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\theta)$ - normalization とする. (但し, θ は3次方程式, $X^3 + X + t = 0$ (t は $\mathbb{P}^1$ の inhomogeneous coordinate) の解とする). この場合,

$$R = 27t^2 + 4$$

であり, $\mathbb{C}(D(C/\mathbb{P}^1)) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\sqrt{R})$ であるから, ramification の状況は次のようになる:



従って, $D(C/\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^1$ であり, $D(C/\mathbb{P}^1)$ の適当な affine coordinate を z とすれば, $\beta_1 : D(C/\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は

$$\beta_1 : Z \longmapsto -\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2+1}{Z^2-1} \quad (=t)$$

と表わせる．さらに，上記の座標を用いて，$\sqrt{\beta_1^* R}$，t を表わせば，

$$\begin{cases} \sqrt{\beta_1^* R} = \dfrac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \dfrac{Z}{Z^2-1} \\ \beta_1^* t = -\dfrac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \dfrac{Z^2+1}{Z^2-1} \end{cases}$$

となる．従って

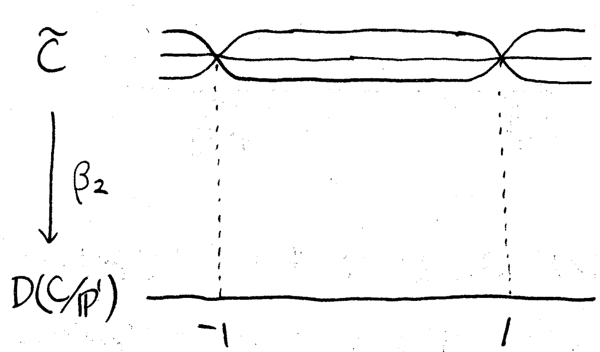
$$-\frac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R} = \frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z+1}{Z-1}$$

を得る．ゆえに，

$$\mathbb{C}(\tilde{C}) = \mathbb{C}(D(\mathbb{C}/\mathbb{P}'))\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R}}\right)$$

$$= \mathbb{C}(D(\mathbb{C}/\mathbb{P}'))\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z+1}{Z-1}}\right)$$

これより，$\tilde{C} \longrightarrow D(\mathbb{C}/\mathbb{P}')$ の ramification の状況は次のようになる．



ゆえに，$\tilde{C} \cong \mathbb{P}^1$ であって，$\tilde{C}$ の適当な affine coordinate を w とすれば，$\beta_2 : \tilde{C} \longrightarrow D(\mathcal{G}/\mathbb{P}^1)$ は

$$\beta_2 : w \longmapsto -\frac{w^3+1}{w^3-1} \ (=z)$$

と表わせる．

次に，$Gal(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ の action を w を用いて表現する．この場合，$Gal(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)) = \mathfrak{S}_3$ であるから，$\mathfrak{S}_3$ の order 2 の元と order 3 の元について調べれば十分である．

(i) order 2 の元：$D(\mathcal{G}/\mathbb{P}^1)$ 上には，$Gal(\mathbb{C}(D(\mathcal{G}/\mathbb{P}^1))/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ により induce される order 2 の automorphism σ があり，この action は上記の coordinate z により，

$$\sigma : z \longmapsto -z$$

と表わせる．$\tilde{C}$ 上で，$Gal(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ により induce される order 2 の automorphism は全て，σ により，$\tilde{C}$ に induce される automorphism $\tilde{\sigma}$ に共役であり，$\tilde{\sigma}$ は上記の coordinate w により，

$$\tilde{\sigma} : w \longmapsto \frac{1}{w}$$

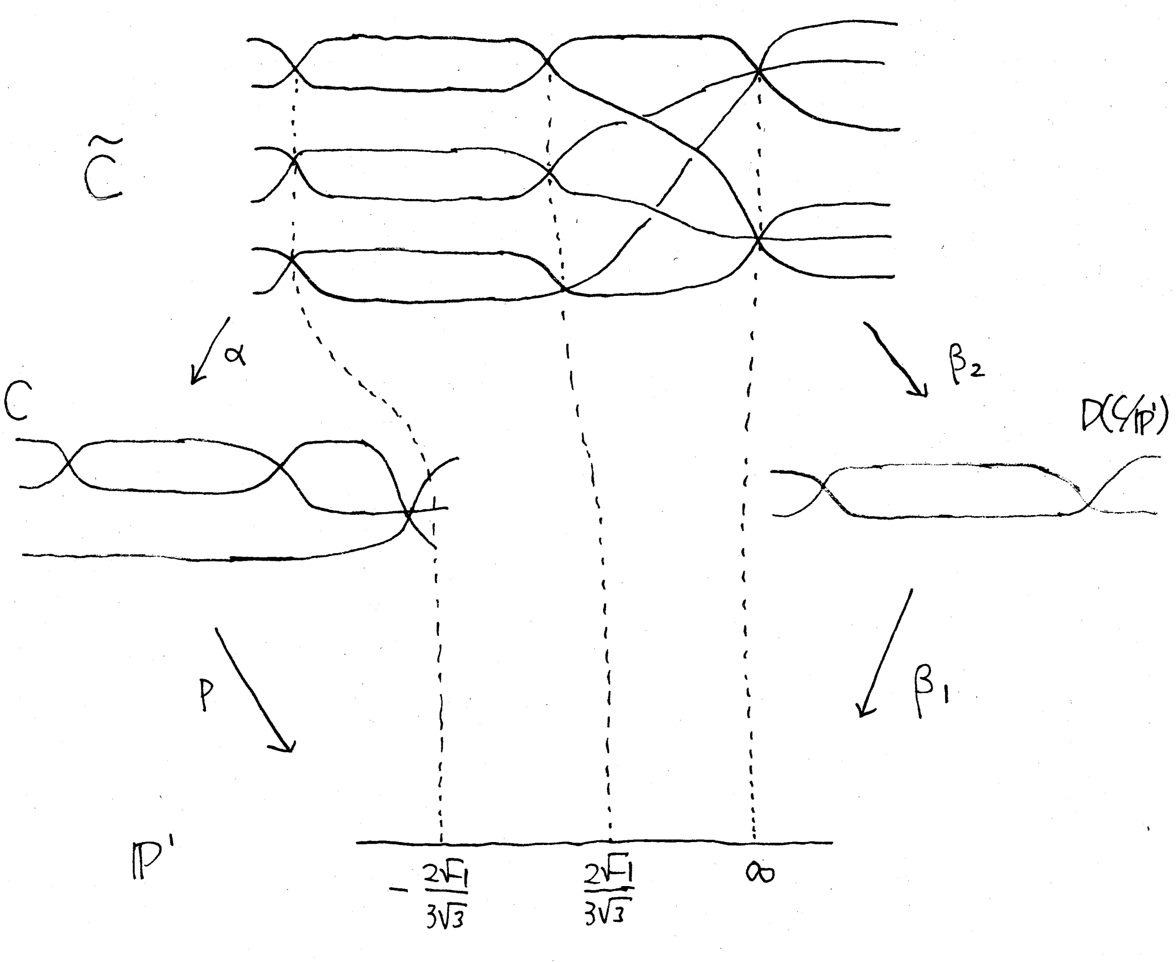
と表わされる．

(ii) order 3 の元：この automorphism を τ とする．これは $\tilde{C}$ の構成により，coordinate w を用いれば，

$$\tau : w \longmapsto \varepsilon w \qquad , \ \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$$

と表わされる．

以上により，$D(C/\mathbb{P}^1)$，$\tilde{C}$，及び $Gal(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ の action の状況が全てわかった．これを図で表わすと次のようになる．



Example 2 (Example 1 の corollary). $\mathbb{P}^2$ は complex projective plane, $[z_0 : z_1 : z_2]$ はその homogeneous coordinate とする．X は $\mathbb{P}^2$ の finite triple cover で，その有理函数体は，$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)(\theta)$，但し，$\theta$ は 3 次方程式，

$$X^3 + X + (z_1/z_0) = 0$$

の解とする．このとき，Xは，degree 3 の minimal rational ruled surface (i.e. $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$) の (-3)-section を contract として得られる normal surface で，1つの singularity をもっている．

上記の事実は，$\mathbb{P}^2$を $[0:0:1]$ で blowing-up して，問題を Example 1 に帰着させれば，容易にわかる．

次の Example は 2次元の典型的な non-Galois triple cover の例である．

Example 3.　$X=\mathbb{C}^2$，$Y=\mathbb{C}^2$ とし，$\pi : X\longrightarrow Y$を次の式で与える：

$$
\begin{array}{ccccl}
\pi : & X & \longrightarrow & Y & \\
 & \Psi & & \Psi & \\
 & (x,y) & \longmapsto & (u,v) & = (xy,\ x^3+y^3)
\end{array}
$$

明らかに，XはYの Galois cover で，その Galois 群は$\mathfrak{S}_3$に同型である．その action は，

$$\sigma : (x,y) \longmapsto (y,x)$$

$$\tau : (x,y) \longmapsto (\varepsilon x, \varepsilon y)$$

で与えられる．但し，$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$，$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$，$\sigma^2 = \tau^3 = (\sigma\tau)^2 = 1$ とする．

$X/\langle\sigma\rangle$，$X/\langle\tau\rangle$ はそれぞれ$\mathfrak{S}_3$の subgroup，$\langle\sigma\rangle$，$\langle\tau\rangle$ による quotientspace とする．このとき，次の図式は可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\varphi_{\langle\sigma\rangle}"'] \arrow[dd, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi_{\langle\tau\rangle}"] & \\
X/\langle\sigma\rangle \arrow[dr, "\pi_{\langle\sigma\rangle}"'] & & X/\langle\tau\rangle \arrow[dl, "\pi_{\langle\tau\rangle}"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}
$$

次に，$\varphi_{\langle\sigma\rangle}$，$\varphi_{\langle\tau\rangle}$，$\pi_{\langle\sigma\rangle}$，及び $\pi_{\langle\tau\rangle}$ の ramification の状況調べるために，$\varphi_{\langle\sigma\rangle}$，$\varphi_{\langle\tau\rangle}$，$\pi_{\langle\sigma\rangle}$ 及び $\pi_{\langle\tau\rangle}$ を具体的に表わすと，

$$
\begin{array}{cccccc}
\varphi_{\langle\sigma\rangle} : & X & \longrightarrow & X/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{C}^2 \\
 & \psi & & \psi \\
 & (x, y) & \longmapsto & (z, w) = (x+y,\ xy
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\pi_{\langle\sigma\rangle} : & X/\langle\sigma\rangle & \longrightarrow & Y \\
 & \psi & & \psi \\
 & (z, w) & \longmapsto & (u, v) = (w,\ z^3 - 3zw)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccc}\varphi_{\langle\tau\rangle} : X & \longrightarrow & X/\langle\tau\rangle & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]/(t_3^2 - t_1 t_2)\right) \\ \Psi & & \Psi & & \\ (x, y) & \longmapsto & (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) = (x^3, y^3, xy) & & \end{array}$$

($\bar{t}_i$ は $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]/(t_3^2 - t_1 t_2)$ での equivalence classを表わす.)

$$\begin{array}{ccc}\pi_{\langle\tau\rangle} : X/\langle\tau\rangle & \longrightarrow & Y \\ \Psi & & \Psi \\ (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) & \longmapsto & (u, v) = (\bar{t}_3, \bar{t}_1 + \bar{t}_2)\end{array}$$

<u>Remark.</u> 上記の $X/\langle\tau\rangle$ は, smoothではなく, A_2-singularityを1つもつ.

まず, π の ramification の状況を調べる. 簡単な計算により, π の ramification locus は, X 上, 方程式:

$$(y-x)(y-\varepsilon x)(y-\varepsilon^2 x) = 0 \quad , \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$$

を満たす点であることがわかる. これを R_π で表す. また, R_π の π による image は 方程式:

$$\frac{v^2}{4} - u^3 = 0$$

を満たす. これを B_π で表わす.

次に, $\varphi_{\langle\sigma\rangle}$ と $\pi_{\langle\sigma\rangle}$ の ramificationの状況を調べる. 簡単な計算により, $\varphi_{\langle\sigma\rangle}$ の ramification locus は方程式:

$$y - x = 0$$

を満たす．この $\varphi_{\langle\sigma\rangle}$ による image は，$X/\langle\sigma\rangle$ 上，方程式

$$w - \frac{1}{4}z^2 = 0$$

で与えられる．同様に，$\pi_{\langle\sigma\rangle}$ の ramification locus は $X/\langle\sigma\rangle$ 上，方程式，

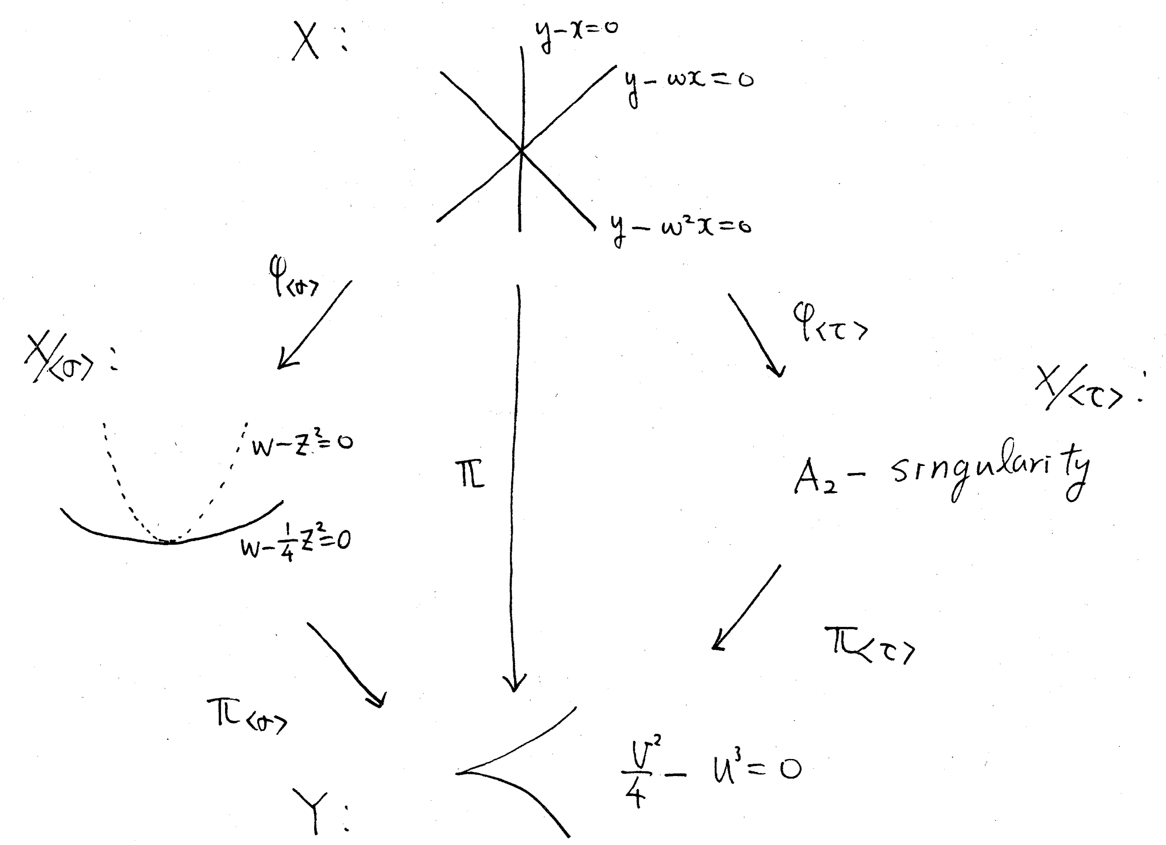
$$w - z^2 = 0$$

で与えられることがわかる．さらに，$w - z^2 = 0$ と $w - \frac{1}{4}z^2 = 0$ の $\pi_{\langle\sigma\rangle}$ による image は，共に方程式

$$\frac{v^2}{4} - u^3 = 0$$

で与えられる．

最後に，$\varphi_{\langle\tau\rangle}$ と $\pi_{\langle\tau\rangle}$ の ramification locus を調べる．$\varphi_{\langle\tau\rangle}$ の ramification locus は明らかに，$(0,0)$ のみで，その $\varphi_{\langle\tau\rangle}$ による image は $X/\langle\tau\rangle$ の A_2-singularity である．また，$\pi_{\langle\tau\rangle}$ の ramification locus は $(\pi^*(B_\pi))_{red}$ である．以上の考察を図示すると，次ページのようになり，$X/\langle\sigma\rangle \longrightarrow Y$ が典型的な non-Galois triple cover の例となる．



§3. 代数曲面の3次被覆.

この§では, smooth な代数曲面の間の finite triple cover $p: S \longrightarrow \Sigma$ について考える. $\hat{S}$, $D(S/\Sigma)$ はそれぞれ §1で定義されたものとする. まず, §2, Example 3 を少し一般化したものとして次の事実が成立する.

<u>Proposition 3.1.</u> $p: S \longrightarrow \Sigma$ は smooth な代数曲面の間の finite triple cover とする. $\Delta(S/\Sigma)$ は p の branch locus とし, $\Delta(S/\Sigma)$ は既約で, 次のような type の singularities を

いくつかもっているものとする：$\Delta(S/\Sigma)$ の特異点のまわりでの局所方程式は

$$x^2 + y^{3k} = 0, \quad k \text{は自然数}.$$

により与えられる．（相異なる singularity に対しては，k は異なってもよいものとする．）

このとき，finite triple cover $p: S \longrightarrow \Sigma$ の structure は次のとおりである．

(i) $D(S/\Sigma)$ は，$\Delta(S/\Sigma)$ 上で branch している Σ の double cover.

(ii) $\hat{S}$ は $D(S/\Sigma)$ の normal cyclic triple cover で，$\mathrm{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上でのみ，ramify しており，$\hat{S}$ の singularities は，A_{k-1} type である．

(iii) $\hat{S}$ 上に，involution τ が存在し，S は $\hat{S}$ の τ による quotient surface として得られる．

証明の point は，次の3つの事実を用いる：

① $p_1: \hat{S} \longrightarrow \Sigma$ の branch locus $\Delta(\hat{S}/\Sigma)$ と $\Delta(S/\Sigma)$ は一致する．

② A_{3k-1} − singularity の局所基本群は $\mathbb{Z}/3k\mathbb{Z}$ に同型である.

③ normal surface $\hat{S}$ の singularities は, hypersurface singularity である.

詳しくは, Tokunaga [5] を参照されたい.

次に, S, Σ のみならず, $\hat{S}$ も smooth となるときを考える. これについては部分的な結果であるが次の事実が成立する.

<u>*Theorem 3.2.*</u> $p: S \longrightarrow \Sigma$ は smooth な代数曲面の間の finite triple cover で, 次の条件 1)〜3) を満たしているものとする:

1) $\hat{S}$ は smooth な代数曲面.

2) Σ は minimal rational surface または, minimal abelian surface

3) $\kappa(S) = 2$ (κ は Kodaira 次元)

このとき, $p: S \longrightarrow \Sigma$ は, 次のうちのいずれかである.

(i) $p: S \longrightarrow \Sigma$ は cyclic cover.

(ii) $p: S \longrightarrow \Sigma$ は non-Galois, (ii−a) $\Sigma :=$ abelian surface, $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$

$\Delta(S/\Sigma)$は Σ 上の irreducible divisorで，その singularitiesは全て (2, 3) cusp. また，cusp の neighborhoodでの triple cover の structure は §2, Example 3 と同型にである.

(ii−b) $\Sigma := F_n\ (n \geqq 2)$ ($\mathbb{P}^1$上の$\mathbb{P}^1$−bundleで minimalなもの).

$\Delta(S/\Sigma)$ が irreducible な時.

この時は，(ii−a) と同じである.

$\Delta(S/\Sigma)$ が reducibleの時.

$$\Delta(S/\Sigma) = S_0 + D$$

ただし，S_0 は Σ_n の $(-n)$−section であり，

D は aS_∞ (S_∞ は Σ_nの (n)−section, a は自然数)に linear equivalent な irreducible divisorで その singularitiesは全て (2, 3) cusp.

(α) $n = 2k$, k は 自然数.

$\beta_1 : D(S/\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ は $\Delta(S/\Sigma)$ 上 branch した double cover.

$\beta_2 : \hat{S} \longrightarrow D(S/\Sigma)$ は，$\mathrm{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上で

のみ branchした cyclic triple cover. ($D(S/\Sigma)$ の singularity は全て A_2-type.)

(β) $n=3k$, kは自然数.

$\beta_1 : D(S/\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ は D 上 branchした double cover.

$\beta_2 : \hat{S} \longrightarrow D(S/\Sigma)$ は, $\beta_1^{-1}(S_0)$ と $\mathrm{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上 branchした cyclic triple cover.

証明の要点は次の3つである.

① $\hat{S}$ 上の ramification point の neighborhood (tangent space) での $\mathfrak{S}_3$ の action を調べ, 起こりうる ramification を全て分類する.

② $\kappa(S)=2$ という仮定より, $\Delta(S/\Sigma)$ は positive な divisor である.

③ Theorem 3.2. の仮定 2) に出てくる曲面上の disconnected な positive divisor を全て分類する.

詳しくは, Tokunaga [5] を参照されたい.

<u>Remark</u>. 講演のときの結果では, Theorem (ii−b) の場合が落ちているので, 注意されたい.

References :

[1] T. Fujita : Triple covers by smooth manifold, Preprint.

[2] S. Iitaka : Algebraic Geometry, Springer, G.T.M. 76, 1982.

[3] R. Lazarsfeld : A Barth-type Theorem for branched coverings of projective space, Math. ann. 249 (1980) 153−162

[4] R. Miranda : Triple covers in algebraic geometry, Amer. J. Math. 107 (1985), 1123−1158

[5] H. Tokunaga : Triple covering of algebraic surface according to Cardano formula, Preprint.