数理解析研究所講究録
662巻 1988年 41-65

$\mathbb{C}P^2$上の自己双対接続のモジュライ空間の計量について。

広島大学 理学部 小林 克洋 (Katuhiro Kobayashi)

複素射影平面$\mathbb{C}P^2$には、Fubini-Study計量が入っているとし、Eは、$\mathbb{C}P^2$上のSU(2)ベクトル束で$c_2=-1$であるものとする。

$\mathcal{M}$をE上の自己双対接続のモジュライ空間とすると、$\mathcal{M}$は、$\mathbb{C}P^2\times[0,1)/\mathbb{C}P^2\times\{0\}$と同相であることが知られている。(古田[F], Buchdahl [B])

$\mathcal{M}$に3種類の自然な計量を入れたとき、その計量は、$\mathbb{C}P^2\times[0,1)$の座標で、どのように書けているかをみて、それを用いて、断面曲率、体積などを、計算してみた。

$\mathcal{M}$に定義する3種類の計量のうち、II型とよばれるものは、広島大学の土井英雄氏、東京大学の古田幹雄氏によって、計算されたものである。

上のベクトル束として、

$$E=\mathbb{C}P^2\text{上の標準的直線束}\otimes_{\mathbb{C}}H$$
$$=\left\{\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\xi\right)\,\middle|\,\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{C}P^2,\ \xi\in H\right\}$$

を採用することにする。

§1. 写像 $\mathbb{C}P^2\times(0,1)\longrightarrow M-\{\text{singular point}\}$ の 定義

$\mathbb{C}P^2\times(0,1)$ に座標を入れ、上の写像を、表示する。まず、$\mathbb{C}P^2$に座標を、

$$\mathbb{C}^2\hookrightarrow\mathbb{C}P^2,\quad \begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}1\\W_1\\W_2\end{bmatrix},\ W_1=X_1+iX_2,\ W_2=X_3+iX_4.$$

で入れる。このとき、Fubini-Study 計量は、

$$h=\frac{1}{(1+r^2)^2}\left\{(1+|W_2|^2)\,d\overline{W_1}\otimes dW_1-W_1\overline{W_2}\,d\overline{W_1}\otimes dW_2-\overline{W_1}W_2\,dW_1\otimes d\overline{W_2}\right.$$
$$\left.+(1+|W_1|^2)\,d\overline{W_2}\otimes dW_2\right\}$$

$r^2=|W_1|^2+|W_2|^2$ と表わされる。

$E|\mathbb{C}^2$ の section u を、

$$u\begin{bmatrix}1\\W_1\\W_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix}1\\W_1\\W_2\end{pmatrix}$$

で定義し、この自明化により、接続等を表示する。

E 上の自己双対接続 $\nabla_\lambda\ (\lambda\in[0,1))$ を、∇_λ の local connection form を A_λとするとき、

$$\nabla_\lambda u=uA_\lambda$$

$$A_\lambda=\frac{1}{1+r^2-\lambda^2}\,\mathrm{Im}\{(\overline{W_1}dW_1+\overline{W_2}dW_2)+j\lambda(-W_2dW_1+W_1dW_2)\}$$

となり、更に、次のことがなりたつ。

定理(古田[F]　Buchdahl[B])

$(SU(3)/U(2))\times(0,1)$ と $M-\{\text{singular point}\}$ は、微分同相であり、

同相写像は、

$$([g],\lambda)\longmapsto[(g^{-1})^*\nabla_\lambda]\quad(\nabla_0 \text{ is reducible})$$

で与えられる。尚$SU(3)$はEに自然に作用させてある。$(g^{-1})^*\nabla_\lambda$としたのは、$SU(3)$をMに左から作用させるようにしたためである。

上の写像を、local connection formを用いて詳しくみてみる。

$g\in SU(3)$のEへの作用は、束のひきもどしと、ファイバーの同形に分解できる。詳しくかくと、

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & (g^{-1})^*E & \longrightarrow & E \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ ([x],x\xi) & & ([x],g^{-1}x\xi) & & ([g^{-1}x],g^{-1}x\xi) \end{array}$$

。

このとき、$(g^{-1})^*\nabla_\lambda$のlocal connection form A'は、

$$g^{-1}u(w)=u(g^{-1}w)c$$

$$A'=c^{-1}dc+Ad(c^{-1})\{(g^{-1})^*A_\lambda\}$$

とかける。$(g^{-1})^*A_\lambda$は、formのひきもどしである。

§2. 計量の定義

記号を、$adE=(E$の同伴主束$)\times_{Ad}su(2)$, $\mathcal{C}=\{E$の$SU(2)$ connections$\}$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}/\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$はゲージ群), $\pi:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ $\Omega^p(adE)=\Gamma(adE\otimes\Lambda^p(\mathbb{C}P^2))$で定義する。

$\Omega^p(adE)$に内積を、

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{C}P^2}(-\mathrm{Tr}\, u \wedge * v), \quad u, v \in \Omega^p(\mathrm{ad}\,E)$$

で与える。これは、ゲージ不変である。

$\nabla \in \mathcal{C}$ に対し、共変微分 $d^\nabla : \Omega^p(\mathrm{ad}\,E) \to \Omega^{p+1}(\mathrm{ad}\,E)$, 余微分作用素 $\delta^\nabla : \Omega^{p+1}(\mathrm{ad}\,E) \to \Omega^p(\mathrm{ad}\,E)$ を、∇ の local connection form A を用いて、

$$d^\nabla s = ds + [A, s].$$
$$\delta^\nabla = - * d^\nabla *$$

で定義する。このとき、次の分解がある。以下 ∇ は既約であるとする。

$$T_\nabla \mathcal{C} = \Omega^1(\mathrm{ad}\,E) = \mathrm{Im}\, d^\nabla \oplus \mathrm{Ker}\, \delta^\nabla$$

さらに、$\Omega^2(\mathrm{ad}\,E)$ を L^2 ノルムで完備化して、

$$\Omega^2(\mathrm{ad}\,E) = \overline{d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\mathrm{ad}\,E)} \oplus (d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\mathrm{ad}\,E))^\perp$$
$$(d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\mathrm{ad}\,E))^\perp \supset \mathrm{Ker}\, \delta^\nabla \delta^\nabla \quad 。$$

上の分解は、$\Omega^1(\mathrm{ad}\,E)$ については、$\mathrm{Im}\, d^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\cdot\nabla)$, $\mathrm{Ker}\, \delta^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\nabla)^\perp$, $\Omega^2(\mathrm{ad}\,E)$ については、$\overline{d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\mathrm{ad}\,E)}$ がゲージ orbit 成分となっている。

I 型の計量 $g_{(\mathrm{I})}$

$\pi_* |_{\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla} : \mathrm{Ker}\, \delta^\nabla \to T_{[\nabla]} \mathcal{B}$ は同型であるから、この同型写像により、$\mathrm{Ker}\, \delta^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\nabla)^\perp$ の内積を、$T_{[\nabla]}\mathcal{B}$ に与える。詳しく分

くと、

$v_i \in T_{[\nabla]}\mathcal{B}$ $(i=1,2)$ に対し、$v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ を、

$$\pi_* v_i^h = v_i \quad (i=1,2)$$

ととって、I 型の計量 $g_{(I)}$ を、

$$g_{(I)}(v_1, v_2) := \langle v_1^h, v_2^h \rangle$$

と定義する。この定義は、$\pi(\nabla)=[\nabla]$ なる ∇ のとり方によらない。実際、$\delta^{g^*\nabla}(g^* v) = g^*(\delta^\nabla v)$, $g \in \mathcal{G}$ であるから、$v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ ならば、$g^* v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^{g^*\nabla}$ である。よって、$\langle g^* v_1^h, g^* v_2^h \rangle = \langle v_1^h, v_2^h \rangle$ となる。

I-II 型の計量 $g_{(I-II)}$

記号は I 型と同じであるとする。I-II 型の計量 $g_{(I-II)}$ は、

$$g_{(I-II)}(v_1, v_2) := \langle d^\nabla v_1^h, d^\nabla v_2^h \rangle$$

で、定義する。この定義が、$\pi(\nabla)=[\nabla]$ なる ∇ のとり方によらないのは、等式 $g^* d^\nabla v = d^{g^*\nabla} g^* v$, $v \in \mathcal{G}$ に注意すれば、I 型と同様にわかる。

II 型の計量 $g_{(II)}$

$pr : \Omega^2(\mathrm{ad}\,E) \to (d^\nabla d^\nabla \Omega^0)^\perp$ を直交射影とする。接ベクトルを、pr により、$(d^\nabla d^\nabla \Omega^0)^\perp$ に、制限して計るのが II 型計量である。詳しくかくと、

$v_i \in T_{[\nabla]}B$ $(i=1,2)$ に対し、$v_i' \in T_\nabla C$ を、$\pi_* v_i' = v_i$ $(i=1,2)$ととって、II型計量 $g_{(\mathrm{II})}$ を、

$$g_{(\mathrm{II})}(v_1, v_2) := \langle pr\, d^\nabla v_1', pr\, d^\nabla v_2' \rangle$$

と定義する。この定義は、$v_i' \in T_\nabla C$ および、$\pi(\nabla) = [\nabla]$ のとり方によらない。まず、$T_\nabla C \ni v_i', u_i'$, $\pi_*(u_i') = \pi_*(v_i') = v_i$ とすると、ある $X_i \in \Omega^0(\mathrm{ad}E)$ $(i=1,2)$ があって、$u_i' = d^\nabla X_i + v_i'$ とかける。よって、$\langle pr\, d^\nabla u_1', pr\, d^\nabla u_2' \rangle = \langle pr\, d^\nabla(d^\nabla X_1 + v_1'), pr\, d^\nabla(d^\nabla X_2 + v_2') \rangle$ $= \langle pr\, d^\nabla v_1', pr\, d^\nabla v_2' \rangle$ が成りたつ。次に、$T_{g^*\nabla}C \ni g^* v_i$ $(i=1,2)$とする。このとき、$pr\, g^* v_i = g^* pr\, v_i$ $(i=1,2)$ がいえればよい。v_i を、

$v_i = \lim_j d^\nabla d^\nabla X_{ij} + pr\, v_i$ と分解すると、$g^* v_i = \lim_j d^{g^*\nabla} d^{g^*\nabla} g^* X_{ij}$ $+ g^* pr\, v_i$ であるが、このとき、$\{X_j\}_{j\in N} \subset \Omega^0(\mathrm{ad}E)$ に対し、

$$\langle g^* pr\, v_i, \lim_j d^{g^*\nabla} d^{g^*\nabla} X_j \rangle = \lim_j \langle pr\, v_i, d^\nabla d^\nabla (g^{-1})^* X_j \rangle = 0.$$

より、$g^* pr\, v_i = pr\, g^* v_i$ である。

以上により、$C - \{\text{reducible connections}\}/\mathcal{G}$ に計量が、定義される。$\mathcal{M} - \{\text{singlar point}\}$ には、$C - \{\text{reducible connections}\}/\mathcal{G}$ の部分多様体の計量が入る。

一般に、$T_\nabla C \ni {}^\forall v' \longrightarrow v \in T_{[\nabla]}B$ のときに、

$$v^h = (v' \text{ の } \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla \text{ 成分})$$

と、とれることに、注意しておく。

§3. 計算

微分同相写像 $\mathbb{C}P^2\times(0,1)\longrightarrow M-\{\text{singular point}\}$ によって、$\mathbb{C}P^2\times(0,1)$ 上に、ひきもどされた、M の計量 $g_{(\mathrm{I})}$, $g_{(\mathrm{I}-\mathrm{II})}$, $g_{(\mathrm{II})}$ をやはり、$g_{(\mathrm{I})}$, $g_{(\mathrm{I}-\mathrm{II})}$, $g_{(\mathrm{II})}$ とかくことにする。

$u, v \in \Omega^p(\mathrm{ad}\,E)$ に対し、

$$\int_{\mathbb{C}P^2} g^*u\wedge * g^*v = \int_{\mathbb{C}P^2} g^*(u\wedge * v) = \int_{\mathbb{C}P^2} u\wedge * v \qquad (g\in SU(3))$$

がなりたつから、$g_{(A)}$ $(A=\mathrm{I}, \mathrm{I}-\mathrm{II}, \mathrm{II})$ は、$SU(3)$ 不変である。このことから、

$$g_{(A)} = \varphi_A(\lambda)\,(d\lambda)^2 + \psi_A(\lambda)\,h$$

$(A=\mathrm{I}, \mathrm{I}-\mathrm{II}, \mathrm{II},\ \lambda\in(0,1)$, h は $\mathbb{C}P^2$ の Fubini-Study 計量$)$

とかけることがわかる。実際、$\mathbb{C}P^2$ 上の $SU(3)$ 不変な計量は Fubini-Study 計量の定数倍だから、$g_{(A)}$ を $\mathbb{C}P^2\times\{\lambda\}$ に、制限したところでは、$g_{(A)}|_{\mathbb{C}P^2\times\{\lambda\}} = \psi(\lambda)\,h$ とかける。よって、

$$g_{(A)} = \varphi_A(\lambda)\,(d\lambda)^2 + \psi_A(\lambda)\,h + \sum_i c_i\, d\lambda\otimes dx_i$$

とかけるが、ここで特に、

$$k=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}\in SU(3)$$

とおいて、$k^* g_A = g_A$ を計算すれば、$c_i=0$ $(i=1\sim 4)$ がわかる。

計算は、まず、概略をのべて、詳しい計算は、あとで、まとめてかくことにする。

i) I 型の計算.

$V \in T_{\nabla} \mathcal{C}$ に対し, $\pi_* V \in T_{[\nabla]} \mathcal{B}$ を, やはり V とかくことにする。

$$\varphi_I(\lambda) = g_{(I)}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = g_{(\nabla)}(\partial_\lambda \nabla_\lambda, \partial_\lambda \nabla_\lambda)$$

$$\partial_\lambda \nabla_\lambda = 2\lambda S^{-2} \mathrm{Im}\,\beta + (2\lambda^2 S^{-2} + S^{-1}) J\gamma \quad \text{on } \mathbb{C}^2$$

$S = 1 + r^2 - \lambda^2$, $\beta = \overline{w_1} dw_1 + \overline{w_2} dw_2$, $\gamma = -w_2 dw_1 + w_1 dw_2$ であるが,

ここで, 直接計算により, $\delta^{\nabla_\lambda}(\partial_\lambda \nabla_\lambda) = 0$ が, 得られ, よって

$$(\partial_\lambda \nabla_\lambda)^h = \partial_\lambda \nabla_\lambda$$

がわかる。よって,

$$g_{(I)}(\partial_\lambda \nabla_\lambda, \partial_\lambda \nabla_\lambda) = -\int_{\mathbb{C}P^2} tr(\partial_\lambda \nabla_\lambda \wedge * \partial_\lambda \nabla_\lambda)$$

$$= \frac{8\pi^2(-(\log z)z^2 - 3(\log z)z - 3z^2 + 2z + 1)}{z(z-1)^3}$$

$z = 1 - \lambda^2$, となる。

次に $\psi_I(\lambda)$ を求める。

$$g_t^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in SU(3).$$

とおくと,

$$v := \frac{d}{dt} g_t^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg|_0 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tan t \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg|_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_0 \mathbb{C}^2$$

$$h(v, v) = 1.$$

より,

$$\psi_I(\lambda) = g_{(I)}(v, v) = g_{(I)}(V, V), \quad V = \partial_t (g_t^{-1})^* \nabla_\lambda |_0.$$

$(g_t^{-1})^* \nabla_\lambda$ は §1 で示した, local connection form での表示を用

いると、

$$\begin{cases} (g_t^{-1})^* \nabla_\lambda u = u A^t \\ A^t = c^{-1}dc + Ad\, c^{-1}\{g_t^{-1*} A_\lambda\}. \end{cases}$$

$c = b/|b|$, $b = \cos t - w_1 \sin t$ とかける。

$g_t^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ W_1^t \\ W_2^t \end{bmatrix}$ とおくと、

$\partial_t W_1^t|_0 = 1 + W_1^2$, $\partial_t W_2^t|_0 = W_1 W_2$, $\partial_t dW_1^t|_0 = 2W_1 dW_1$

$\partial_t dW_2^t|_0 = W_1 dW_2 + W_2 dW_1$

となることに注意して、V を計算すると、

$$V = \partial_t A^t|_0 = -2\lambda^2 S^{-2} X_1 \, Im(\beta + j\lambda\gamma) + \lambda S^{-1} Im\{\lambda dW_1 + j dW_2\}.$$

とかける。このとき、次のことがなりたつ。((計算1)、(計算2))

補題.

$X = (S(\lambda^2-3))^{-1} Im\{\lambda^2(\lambda^2+1) W_1 + 2j\lambda^3 W_2\}$ とすると、

$\delta^\nabla d^\nabla X = \delta^\nabla V$ がなりたつ。

上の補題により、$V^h = V - d^\nabla X$ であるから、(計算3) により、

$$g_I(V,V) = -\int_{\mathbb{C}P^2} Tr\, V^h \wedge * V^h$$

$$= \frac{4\pi^2(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)}{(z^3 - 3z + 2)}, \quad z = 1 - \lambda^2$$

が得られる。

ii) II 型の計量、

φ_{II} から求める。

$$d^{\nabla}(\partial_\lambda A_\lambda) = d(\partial_\lambda A_\lambda) + A \wedge \partial_\lambda A_\lambda + \partial_\lambda A_\lambda \wedge A = \partial_\lambda F$$

であるから、

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = g_{(\mathrm{II})}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = \langle \mathrm{pr}\, d^{\nabla}(\partial_\lambda A_\lambda), \mathrm{pr}\, d^{\nabla}(\partial_\lambda A_\lambda) \rangle = \langle \mathrm{pr}(\partial_\lambda F), \mathrm{pr}(\partial_\lambda F) \rangle$$

となる。ここで、F, $\partial_\lambda F$ は $\mathbb{C}^2$ の表示を用いて、

$$F = (1-\lambda^2) S^{-2} \{ f + 2j\lambda\, dW_1 \wedge dW_2 \}.$$

$$f = (1+|W_2|^2)\, d\overline{W_1} \wedge dW_1 + (1+|W_1|^2)\, d\overline{W_2} \wedge dW_2 - \overline{W_1} W_2\, d\overline{W_2} \wedge dW_1 - W_1 \overline{W_2}\, d\overline{W_1} \wedge dW_2$$

$$\partial_\lambda F = 2\lambda(1-\lambda^2-r^2) S^{-3} f + 2\{4\lambda^2(1-\lambda^2) + (1-3\lambda^2)S\} S^{-3} j\, dW_1 \wedge dW_2$$

とかけている。このとき、$[f, j\,dW_1 \wedge dW_2] = 0$ より、

$$\delta^{\nabla} \delta^{\nabla} \partial_\lambda F = * d^{\nabla} d^{\nabla} * \partial_\lambda F = * d^{\nabla} d^{\nabla} \partial_\lambda F = * [F, \partial_\lambda F] = 0.$$

であるから、$\mathrm{pr}(\partial_\lambda F) = \partial_\lambda F$ である。よって、

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \langle \mathrm{pr}(\partial_\lambda F), \mathrm{pr}(\partial_\lambda F) \rangle = -\int_{\mathbb{C}P^2} \mathrm{tr}(\partial_\lambda F \wedge * \partial_\lambda F)$$

$$= 16\pi^2 (z^2 - 2z + 6) / (15 z^2)$$

$z = 1-\lambda^2$,が得られる。

次に、$\psi_{\mathrm{II}}(\lambda)$ を求める。$V = \partial_\lambda (g_t^{-1})^* \nabla_\lambda |_0$, $XF = \partial_t (g_t^{-1})^* F|_0$ とおくと、

$$\psi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \langle \mathrm{pr}(d^{\nabla_\lambda} V), \mathrm{pr}(d^{\nabla_\lambda} V) \rangle = \langle \mathrm{pr}(XF), \mathrm{pr}(XF) \rangle$$

となる。ここで、$(g_t^{-1})^* F$ の表示式を F' とかくと、

$$F' = Ad\, c^{-1} F_t, \quad c = b/|b|, \quad b = \cos t - W_1 \sin t$$

F_t は F の g_t^{-1} によるひきもどし，とかける。このとき、

$$\partial_t F'|_0 = \partial_t c^{-1}|_0 F + F\, dc|_0 + \partial_t F_t|_0$$

$$= \partial_t F_t|_0 - [F, \mathrm{Im}\, w_1]$$

$$\partial_t F_t|_0 = (1-\lambda^2)\,\alpha + (1-\lambda^2)k(-6 s^{-2} \lambda x_2\, dw_1 \wedge dw_2)$$

$$\alpha = -4 f s^{-3} x_1 \lambda^2 - 2 j \lambda s^{-3} x_1 (s + 4\lambda^2)\, dw_1 \wedge dw_2$$

$$\delta^\nabla \delta^\nabla \alpha = * d^\nabla d^\nabla * \alpha = * d^\nabla d^\nabla \alpha = *[F, \alpha] = 0$$

$$[F, i] = -4k(1-\lambda^2)s^{-2}\lambda\, dw_1 \wedge dw_2$$

より、

$$\mathrm{pr}\,\chi F = (1-\lambda^2)\,\alpha$$

となることがわかる。よって

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = -\int_{\mathbb{C}P^2} \mathrm{tr}(\mathrm{pr}\,\chi F \wedge * \mathrm{pr}\,\chi F)$$

$$= 8(3z^2 + 4z - 12)(z-1)\pi^2/(15z)$$

が得られる。

iii) I-II 型

まず、$\varphi_{\mathrm{I-II}}$ より求める。

$$\varphi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(\partial_\lambda \nabla_\lambda, \partial_\lambda \nabla_\lambda)$$

$$= \langle d^\nabla \partial_\lambda \nabla_\lambda, d^\nabla \partial_\lambda \nabla_\lambda \rangle = \langle \partial_\lambda F, \partial_\lambda F \rangle = \varphi_{\mathrm{II}}(\lambda)$$

次に $\psi_{\mathrm{I-II}}$ を求める。V, v, V^h は、I型と同じであるとすると、

$$\psi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(v, v) = g_{(\mathrm{I-II})}(V, V) = \langle d^{\nabla_\lambda} V^h, d^{\nabla_\lambda} V^h \rangle$$

$$=\frac{24}{5}\pi^2\frac{(-z^5+2z^4-3z^3+2z^2-8z+8)}{z(z+2)^2}$$

を得る。

ここで、計算をI型について、少し詳しくみてみることにする。まず、次の公式をあげておく。

$$dW_1\wedge *d\bar{W}_1 = 2(1+|W_1|^2)Q^{-2}d_{1234}.$$

$$dW_1\wedge *d\bar{W}_2 = 2W_1\bar{W}_2Q^{-2}d_{1234}.$$

$$dW_2\wedge *d\bar{W}_1 = 2W_2\bar{W}_1Q^{-2}d_{1234}$$

$$dW_2\wedge *d\bar{W}_2 = 2(1+|W_2|^2)Q^{-2}d_{1234},\quad d*dW_i=0,\quad dW_i\wedge *dW_j=0$$

$$d_{1234} := dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4,\quad Q=1+r^2\ 。$$

(計算 1) $d^\nabla *V = 4\lambda^2S^{-2}Q^{-2}(\mathrm{Im}W_1+j\lambda W_2)d_{1234}.$

証明

$$\alpha_1 = S^{-2}(W_1+\bar{W}_1)(\beta-\bar{\beta}),\quad \alpha_2 = S^{-1}(dW_1-d\bar{W}_1)$$

$$\alpha_3 = S^{-2}(W_1+\bar{W}_1)\gamma,\quad \alpha_4 = S^{-1}dW_2$$

とおくと、

$$V=\frac{-\lambda^2}{2}\alpha_1+\frac{\lambda^2}{2}\alpha_2+j\{-\lambda^3\alpha_3+\lambda\alpha_4\}.$$

$$\begin{cases} d*\alpha_1 = -4S^{-2}x_2iQ^{-1}d_{1234},\quad d*\alpha_2 = -4d^{-2}x_2Q^{-1}d_{1234}\,i \\ d*\alpha_3 = -2w_2S^{-2}Q^{-2}d_{1234},\quad d*\alpha_4 = -2S^{-2}w_2Q^{-1}d_{1234}. \end{cases}$$

$B=\beta+j\lambda\gamma$ とおくと、

$$[A,*V]=\frac{1}{S}[B,*V]$$

$$\begin{cases} [B, *\beta] = [B, *j r] = 0 \\ [B, *dW_1] = 2jW_2 \lambda Q^{-2} d_{1234} \\ [B, *j dW_2] = (4\lambda \,\mathrm{Im} W_1 Q^{-2} + 2j W_2 Q^{-1}) d_{1234}. \end{cases}$$

以上により，

$$d^\nabla * V = 4\lambda^2 S^{-2} Q^{-2} (\mathrm{Im} W_1 + j\lambda W_2) d_{1234}$$

を得る。

（計算２） $d^\nabla * d^\nabla \chi = d^\nabla * V$

証明

$\beta_1 = \frac{1}{S} \mathrm{Im} W_1$ ， $\beta_2 = j\frac{W_2}{S}$ とおく．

$$\begin{cases} d*d\beta_1 = 2\{4S^{-3} r^2 Q^{-1} - 2S^{-2}(1+Q) Q^{-2} - 2S^{-2} Q^{-1}\} \mathrm{Im} W_1 d_{1234} \\ [A, *d\beta_1] = 2S^{-2} Q^{-2} (j\lambda W_2) d_{1234} \\ d*[A, \beta_1] = 2S^{-2} Q^{-2} (\lambda j W_2) d_{1234} \\ [A, *[A, \beta_1]] = -8\lambda^2 S^{-3} Q^{-2} r^2 \mathrm{Im} W_1 \; d_{1234}. \end{cases}$$

より，

$$d^\nabla * d^\nabla \beta_1 = -12 S^{-2} Q^{-2} \mathrm{Im} W_1 d_{1234} + S^{-2} Q^{-2} (4\lambda j W_2) d_{1234}$$

$$\begin{cases} d*d\beta_2 = 2\{Q^{-1} S^{-2} j W_2 + \lambda S^{-2} Q^{-2} (W_1 - \overline{W_1})\} d_{1234} \\ [A, *d\beta_2] = \{4S^{-3} r^2 Q^{-1} - 2(1+Q) Q^{-2} S^{-2} - 2S^{-2} Q^{-1}\} j W_2 d_{1234} \\ d*[A, \beta_2] = \{S^{-2} Q^{-1} j W_2 + \lambda S^{-2} Q^{-2} (W_1 - \overline{W_1})\} d_{1234} \\ [A, *[A, \beta_2]] = -4\{\lambda^2 r^2 Q^{-2} + r^2 Q^{-1}\} S^{-3} j W_2 d_{1234} \end{cases}$$

より，

$$d^\nabla * d^\nabla \beta_2 = \{-8S^{-2}Q^{-2} j W_2 + 8\lambda S^{-2} Q^{-2}\,\mathrm{Im}\, W_1\}\, d_{1234}$$

以上により,

$$d^\nabla * d^\nabla \chi = 4\lambda^2 S^{-2} Q^{-2} (\mathrm{Im}\, W_1 + j\lambda W_2)\, d_{1234} = d^\nabla * V$$

となる。

(計算3) $\langle V^h, V^h\rangle = \dfrac{4(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)\pi^2}{(z^3 - 3z + 2)}$

証明.

$$A(\alpha,\beta) := \int_{\mathbb{C}^2} r^2 S^{-\alpha} Q^{-\beta} d_{1234}, \quad B(\alpha,\beta) := \int_{\mathbb{C}^2} S^{-\alpha} Q^{-\beta} d_{1234}$$

とおくと. 次の公式がなりたつ。

$$A(\alpha,\beta) = \pi^2 \lambda^{(2-2(\alpha+\beta))} \int_{1-\lambda^2}^{1} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha+\beta-4}(y-(1-\lambda^2))^2 dy$$

$$B(\alpha,\beta) = \pi^2 \lambda^{(2-2(\alpha+\beta))} \int_{1-\lambda^2}^{1} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha+\beta-3}(y-1+\lambda^2)\, dy. \quad \circ$$

$$\langle V^h, V^h\rangle = \langle V - d^\nabla\chi, V - d^\nabla\chi\rangle = \langle V, V\rangle - \int \mathrm{tr}\, \chi \wedge d^\nabla * V$$

であるから. $\langle V, V\rangle$ から求める。

$$V = \frac{\lambda^2}{S^2}\mathrm{Im}\,\xi + j\frac{\lambda}{S^2}\eta, \quad \xi = S\, dW_1 - 2X_1\beta, \quad \eta = -2X_1\lambda^2\gamma + dW_2 S$$

とおくと,

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\, V_2 \wedge * V_2 = -2\,\mathrm{Re}\, V_2 \wedge * V_2 = \dfrac{\lambda^4}{S^4}\mathrm{Re}\, \xi\wedge *\bar{\xi} + \dfrac{2\lambda^2}{S^4}\mathrm{Re}\, \eta\wedge *\bar{\eta} \\ \xi \wedge * \bar{\xi} = 2(S^2(1+|W_1|^2) + 4X_1^2 Q(\lambda^2-1))Q^{-2} d_{1234}. \\ \eta \wedge * \bar{\eta} = 2(4X_1^2\lambda^2(\lambda^2-1)Q + S^2(1+|W_2|^2))Q^{-2} d_{1234} \end{cases}$$

がなりたつ。ここで. $\displaystyle\int \frac{X_i^2}{S^\alpha Q^\beta} d_{1234} = \frac{1}{4}\int \frac{r^2}{S^\alpha Q^\beta} d_{1234}$ $(i = 1 \sim 4)$ に注意すると,

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{Re}\,\frac{\xi\wedge *\bar{\xi}}{S^4} = 2\left(B(2,2)+\frac{1}{2}A(2,2)+(\lambda^2-1)A(4,1)\right)$$

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{Re}\,\frac{\eta\wedge *\bar{\eta}}{S^4} = 2\lambda^2(\lambda^2-1)A(4,1)+2B(2,2)+A(2,2)$$

次に、$\int_{\mathbb{C}P^2} \mathrm{tr}\,X\wedge d*V$ を求める。(計算1),(計算2)より、

$$\mathrm{tr}\,X\wedge d^{\nabla}*X = \frac{-8}{\lambda^2-3}S^{-3}Q^{-2}\left[\lambda^4(\lambda^2+1)x_2^2+2\lambda^6|W_2|^2\right]d_{1234}$$

であるから、

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{tr}\,X\wedge d^{\nabla}*V = -\frac{10\lambda^6+2\lambda^4}{\lambda^2-3}A(3,2)$$

となる。以上をまとめて、

$$\langle V^h, V^h\rangle = \frac{4(-6(\log z)z^2+z^3+6z^2-9z+2)\pi^2}{(z^3-3z+2)}$$

$z=1-\lambda^2$ となる。

§ 曲率

$\mathbb{C}P^2\times(0,1)$ に座標 $x_0=z, x_1,\cdots,x_4$ を入れると、

$$g(A) = \hat{\varphi}_A(x_0)\,(dx_0)^2+\hat{\psi}_A(x_0)\,h.$$

$A=\mathrm{I},\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II},\mathrm{II}$ とかける。ここで用いた；$\hat{\varphi}_A$, $\hat{\psi}_A$ は、変数を λ から x_0 に変えているので、先に書いた、φ_A, ψ_A とは、$\hat{\varphi}_A(x_0)=\varphi(\lambda)/(4(1-x_0))$, $\hat{\psi}_A(x_0)=\psi_A(\lambda)$ という関係にある。具体的にかくと、

$$\begin{cases} g(\mathrm{I}) = \hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(x_0)\,dx_0^2+\hat{\psi}_{\mathrm{I}}(x_0)\,h. \\ \hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(x_0) = 2((x_0+3)(\log x_0)x_0-3x_0^2+2x_0+1)\pi^2)/((x_0-1)^4x_0) \\ \hat{\psi}_{\mathrm{I}}(x_0) = (-4(6(\log x_0)x_0^2-x_0^3-6x_0^2+9x_0-2)\pi^2)/((x_0+2)(x_0-1)^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}) = \hat{\varphi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0)\,dx_0^2+\hat{\psi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0)\,h \\ \hat{\varphi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0) = (-4(x_0^2-2x_0+6)\pi^2)/(15(x_0-1)x_0^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{I-II}(x_0) = -24(x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 + 8)(x_0-1)\pi^2/(5(x_0+2)^2 x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{(II)} = \tilde{\varphi}_{II}(x_0)dx_0^2 + \tilde{\psi}_{II}(x_0)h \\ \tilde{\varphi}_{II}(x_0) = -4(x_0^2 - 2x_0 + 6)\pi^2/(15(x_0-1)x_0^2) \\ \tilde{\psi}_{II}(x_0) = 8(3x_0^2 + 4x_0 - 12)(x_0-1)\pi^2/(15x_0) \end{cases}$$

である。

$SU(3)$が、$\mathbb{C}P^2 \times \{x_0\} \hookrightarrow M$に、推移的でかつ、等長的に作用しているから、$M$の断面曲率$K_A$は、$(0,x_0) \in \mathbb{C}^2 \times (0,1) \hookrightarrow \mathbb{C}P^2 \times (0,1)$においてて、$v_1, v_2 \in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2 \times (0,1)$を、$v_1 = a_0 e_0 + a_1 e_1$, $v_2 = \sum_{i=0}^{3} b_i e_i$
$a_0^2 + a_1^2 = 1$, $\sum_i b_i^2 = 1$, $a_0 b_0 + a_1 b_1 = 0$, $e_0 = \varphi_A^{-1/2}\partial_0$, $e_i = \psi_A^{-1/2}\partial_i$
で定義するとき、v_1, v_2方向についてみれば十分である。このとき次のことがなりたつ。

$$\begin{cases} K_A(v_1, v_2) = K_{A0101}(a_0^2 + b_0^2) + K_{A1212}\, a_1^2 b_2^2 + K_{A1313}\, a_1^2 b_3^2 \\ K_{A0101} = K_{A0i0i} = \tilde{\varphi}_A^{-1}\tilde{\psi}_A^{-1}\{-\frac{1}{2}\tilde{\psi}_A'' + \frac{1}{4\tilde{\psi}_A}(\tilde{\psi}_A')^2 + \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A}\tilde{\varphi}_A'\tilde{\psi}_A'\}. \\ K_{A1i1i} = \tilde{\psi}_A^{-1}\{H_{1i1i} - \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A\tilde{\psi}_A}(\tilde{\psi}_A')^2\}.\ (i=2,3)\quad H_{1212} = 4,\ H_{1313} = 1 \end{cases}$$

特に、次の不等式がなりたつ。

$$\min\{K_{A1i1i} \mid i = 0,2,3\} \le K_A \le \max\{K_{A1i1i} \mid i = 0,2,3\}$$

ここで、K_{A1i1i}のグラフをあげておく。

K_{A1212} $(A = I, I\text{-}II, II)$ および、K_{II1313}は、singular pointに向かうにつれ、$+\infty$に発散している。$K_{I-II\,1010}$, $K_{I-II\,1313}$, K_{II1010}は全て、

$x_0=1$で定義されているが、K_{I1010}, K_{I1313}は$x_0=1$では、定義されておらず、ロピタルの定理を用いて、分母・分子をそれぞれ、12回と9回微分することにより、

$$\lim_{x_0\to 1} K_{I1010} = \lim_{x_0\to 1} K_{I1313} = -3/8\pi^2$$

を得る。

最後に、双曲空間との比較について、みてみる。双曲空間として、$\left(\mathrm{Int}\, D^6 = \{x\in\mathbb{R}^6 \mid |x|<2\},\ \dfrac{dx_1^2+\cdots+dx_6^2}{(1-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^6 x_i^2)}\right)$を採用する。

この計量を、微分同相写像

$$S^5\times(0,2)\longrightarrow \mathrm{Int}\, D^6-\{中心\}\ \left((x,\lambda)\longmapsto x\lambda\right)$$

でひきもどすと、$S^5\times(0,2)$の計量は、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2\ (S^5の標準的計量) + 16/(\lambda^2-4)^2\, d\lambda^2$$

となる。$S^5\times(0,2)$に、S^1をS^5の部分のみに作用させて、$\mathbb{C}P^2\times(0,2)$が得られるが、このとき、$\mathbb{C}P^2\times(0,2)$には、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2\ h + 16/(\lambda^2-4)^2\, d\lambda^2$$

なる計量が入る。このとき、

$$\begin{cases} K_{1010}=K_{1313}=-1 \\ K_{1212}=(3x-4)(x-12)/16x. \end{cases}$$

$x=\lambda^2$となっている。K_{1212}のグラフも、参考までに、あげておく。ここでは、グラフの右側に、singular pointにあたる部分がくるように、左側が$x=2$、右側が$x=0$と、しておいた。

§　体積など、

V_Aを(M, g_A) ($A = \mathrm{I}, \mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}, \mathrm{II}$) の体積とすると、

$$V_A = \int_{\mathbb{C}P^2\times(0,1)} (g_A \text{ の volume form})$$
$$= \int_0^1 \sqrt{\hat{\varphi}_A(x_0)}\ \hat{\psi}_A(x_0)^2 dx_0 \times (\mathbb{C}P^2 \text{ の体積})$$

がなりたつ。また、L_Aを(M, g_A)の端から、singular point までの長さとすると、

$$L_A = \int_0^1 \sqrt{\hat{\varphi}_A(x_0)}\, dx_0$$

がなりたつ。

i) $V_\mathrm{I}, L_\mathrm{I}$について、

L_Iの有限性は、$\hat{\varphi}_\mathrm{I}(x_0) = 2\left(\frac{3(x_0+1)}{(x_0-1)^3 x_0} - \frac{(x_0+3)\log x_0}{(x_0-1)^4}\right)\pi^2$ が、$x_0 = 0, 1$ のときに$+\infty$に発散しているので、$x_0 = 0, 1$の近くで、問題になる。ところで、$x_0 = 0$ の附近では、

$$\varphi_\mathrm{I}(x_0) = 2\frac{1}{x_0}\pi^2$$

としてよいから、

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{\hat{\varphi}_\mathrm{I}(x_0)}\, dx_0 = \sqrt{2}\,\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{x_0}} dx_0 < \infty$$

となる。また、$\lim_{x_0\to 1} \hat{\varphi}_\mathrm{I}(x_0) \times 4(1-x_0) = 4\pi^2/3$ であるから、$x_0 = 1$ の附近では、

$$\varphi_\mathrm{I}(x_0) = (\pi^2/3)\left(\frac{1}{1-x_0}\right)$$

としてよい。よって、$x_0 = 0$ のときと同様に、$\int_\varepsilon^1 \sqrt{\hat{\varphi}_\mathrm{I}(x_0)} < \infty$ がわかる。V_Iについては、$\hat{\psi}_\mathrm{I}(x_0)$が、$0 \le \hat{\varphi}_\mathrm{I} \le 4\pi^2$ をみたしてい

るから，明らかに有限となる。

ii) V_A, L_A ($A = \mathrm{II}, \mathrm{I}-\mathrm{II}$) について，

$\hat{\varphi}_{\mathrm{II}}(x_0) = 4((x_0^2-2x_0+6)/15x_0^2(1-x_0))\pi^2 \geq 4\pi^2(x_0-1)^2/15x_0^2$

であるから，

$L_{\mathrm{II}} = \int_0^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\,dx_0 > \int_0^1 \sqrt{2(x_0-1)^2/15x_0^2}\,\pi\,dx_0 = \sqrt{2/15}\,\pi \int_0^1 \frac{1-x_0}{x_0}\,dx_0 = +\infty$

となり，L_{II} は $+\infty$。また，$\hat{\psi}_{\mathrm{II}}$ は単調減少関数だから，

$$V_{\mathrm{II}} = \int_0^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{II}}^2\,dx_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{II}}^2\,dx_0 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{II}}^2\,dx_0$$
$$> \int_0^{1/2} \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\,\hat{\psi}_{\mathrm{II}}^2(1/2)\,dx > \hat{\psi}(1/2)^2\pi\sqrt{\frac{2}{15}}\int_0^{1/2} \frac{1-x_0}{x_0}\,dx_0 = +\infty$$

より V_{II} は $+\infty$ である。$L_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$, $V_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$ も同様にして $+\infty$ であることがわかる。

ここで，

$L_A(x_0) = \{(0,1)$ から $(0,x_0)$ までの長さ$\}$，
$V_A(x_0) = \{\mathbb{C}P^2 \times (1, x_0)$ の体積$\}$

として，計算した結果をグラフで表しておく。

§ まとめ．

i) $d\lambda^2$, h の係数（すなわち φ_A, ψ_A について）．

singular point 側すなわち，$\lambda=0$ の φ_A, ψ_A を Taylor 展開すると，

$\varphi_{\mathrm{I}}(\lambda) = 2\pi^2(27\lambda^4+20\lambda^2+10)/15$

$$\psi_{\mathrm{I}}(\lambda) = 2\pi^2(5\lambda^4+6\lambda^2)/9$$

$$\varphi_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(\lambda) = 16\pi^2(16\lambda^4+10\lambda^2+5)/15$$

$$\psi_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(\lambda) = \pi^2(48\lambda^4+56\lambda^2)/9$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \varphi_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(\lambda).$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \pi^2(24\lambda^4+8\lambda^2)/3.$$

また、H^6/S^1の計量を、$\varphi(\lambda)d\lambda^2+\psi(\lambda)h$とおいて、$\lambda=0$のちかくで、Taylor展開すると、

$$\varphi(\lambda) = (3\lambda^4+8\lambda^2+16)/16$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda^4+2\lambda^2)/2$$

となる。境界の附近、すなわち、$\lambda=1$ (φ,ψにおいては$\lambda=2$)の近くでは、

$$\psi_{\mathrm{I}}(\lambda) \longrightarrow 4\pi^2 \text{, それ以外は} +\infty$$

となっている。また、ψ_A, φ_Aはみな単調減少関数である。

ii) 曲率など.

曲率は、$SU(3)$が$\mathbb{C}P^2\times\{x_0\}$に推移的かつ等長的に作用しているので、本文で用いた座標に関し、$T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2\times(0,1)$でみれば、十分であるが、このとき、singular pointの近くでは、

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}}(\partial_0, v) \to -3/8\pi^2 & , v\in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2\times\{x_0\}. \\ K_{\mathrm{I}}(\partial_1,\partial_3) \to -3/8\pi^2 & \\ K_{\mathrm{I}}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2+\sin\theta\,\partial_3) \to +\infty & (\theta\neq 90^\circ) \end{cases}$$

$$\{ K_{\mathrm{II}}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2+\sin\theta\,\partial_3) \to +\infty$$

$$\left\{ K_{II}(\partial_0, v) \to -21/16\pi^2 \right.$$

$$\begin{cases} K_{I\text{-}II}(\partial_0, v) \to -9/32\pi^2 \\ K_{I\text{-}II}(\partial_1, \partial_3) \longrightarrow -9/32\pi^2 \\ K_{I\text{-}II}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2 + \sin\theta\,\partial_3) \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

となっている。また、境界の附近では、

$$\begin{cases} K_I(\partial_1, \cos\theta\,\partial_1 + \sin\theta\,\partial_3) \longrightarrow \cos^2\theta/\pi^2 + \sin^2\theta/4\pi^2 \\ K_I(\partial_0, v) \longrightarrow 3/8\pi^2 \end{cases}$$

$$K_{I\text{-}II}(\partial_1, X) \to -5/32\pi^2$$

$$K_{II}(\partial_1, X) \to -5/32\pi^2$$

$X \in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2 \times (0,1)$，となっている。他の場合については、P16の公式と、グラフを参照されたい。

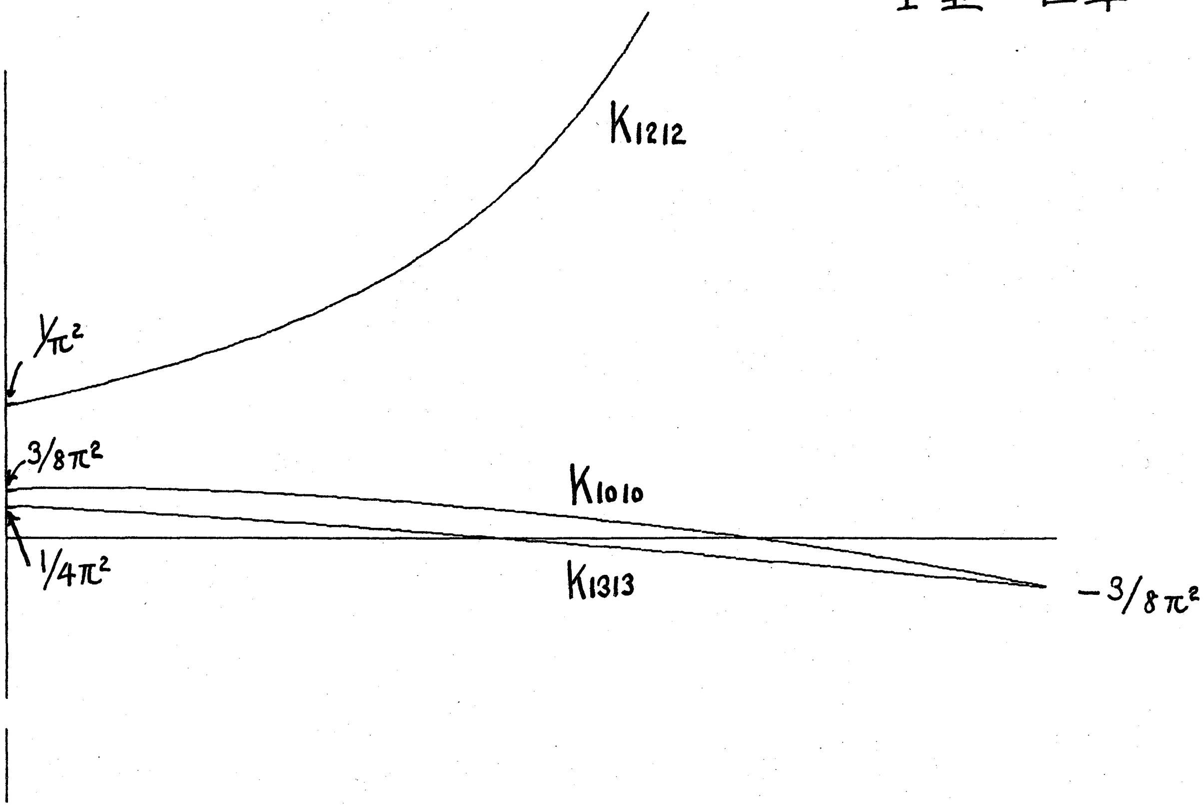
また、体積と、Mの端から singular point までの長さは、

I型に関しては両方とも有限

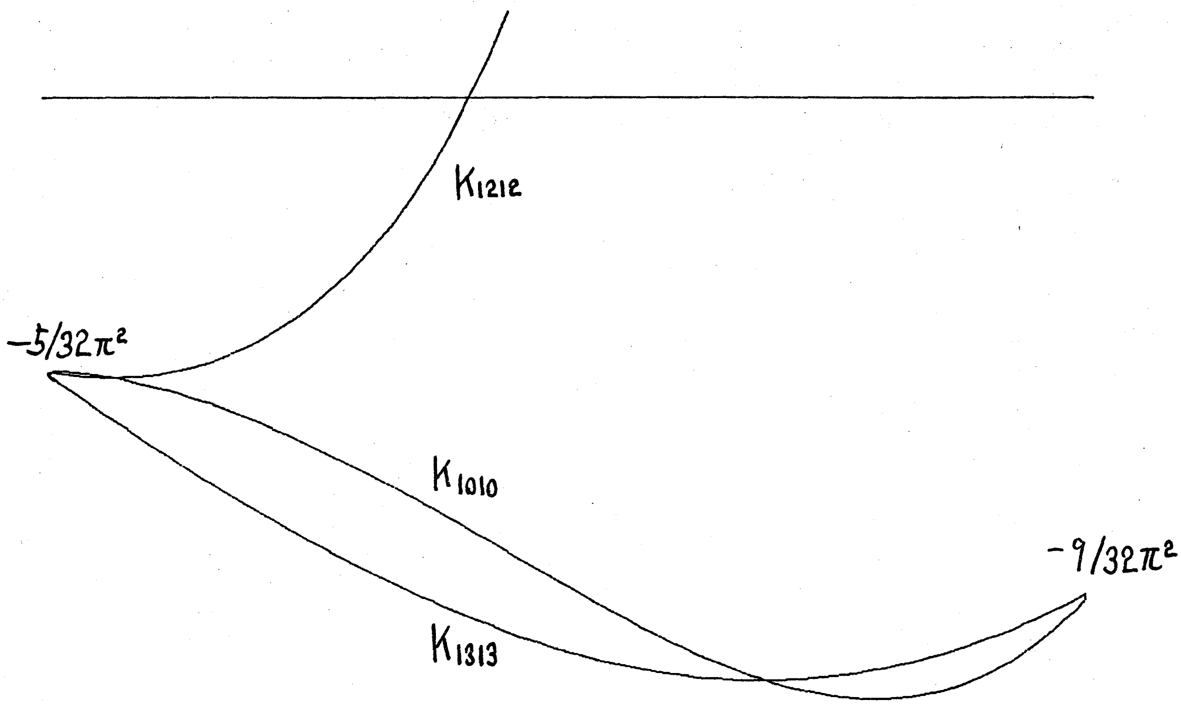
II型，I-II型に関しては、両方とも無限

となっている。

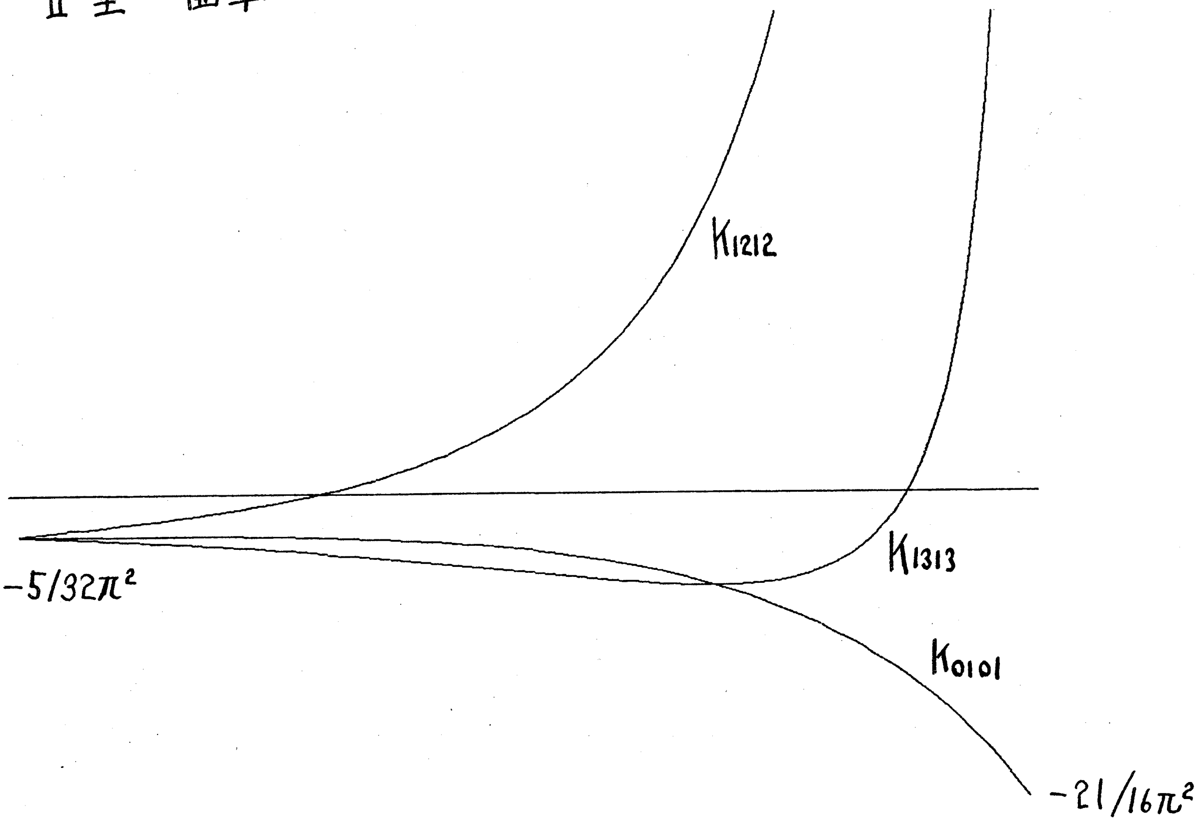
I型　曲率


K_{1212}
$1/\pi^2$
$3/8\pi^2$
K_{1010}
$1/4\pi^2$
K_{1313}
$-3/8\pi^2$

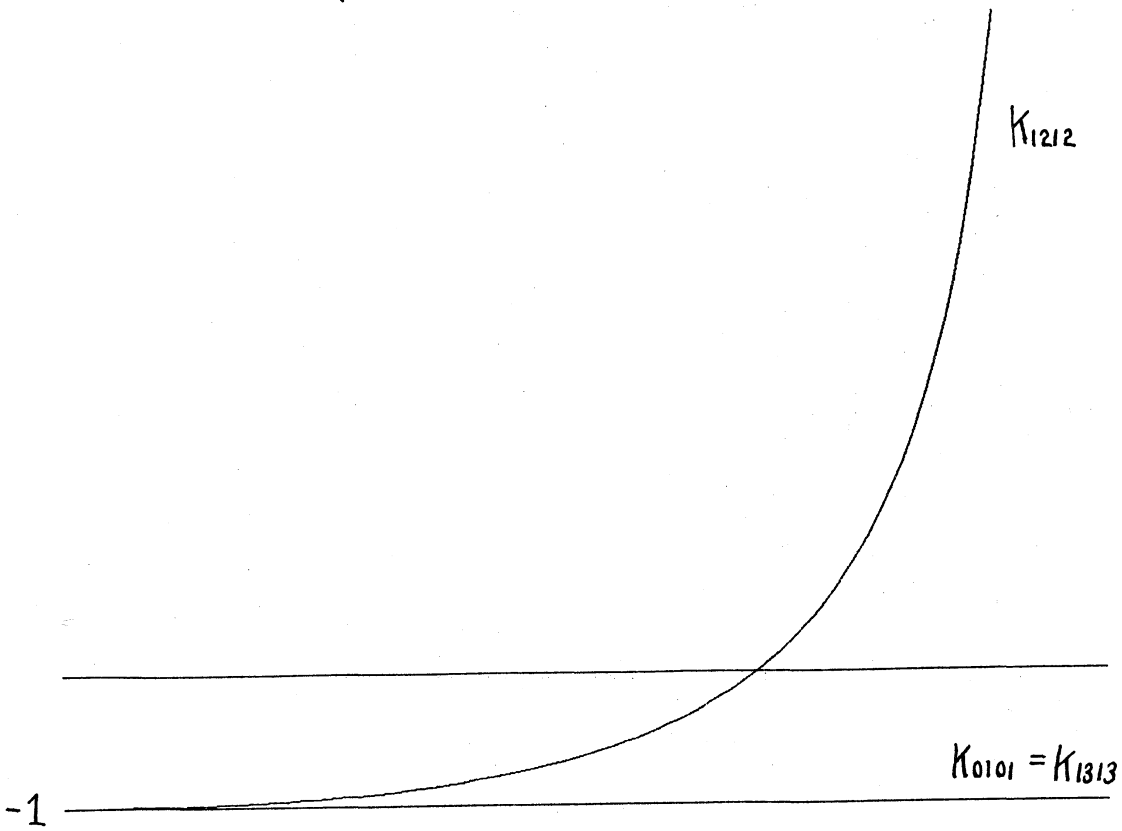
I-II型　曲率

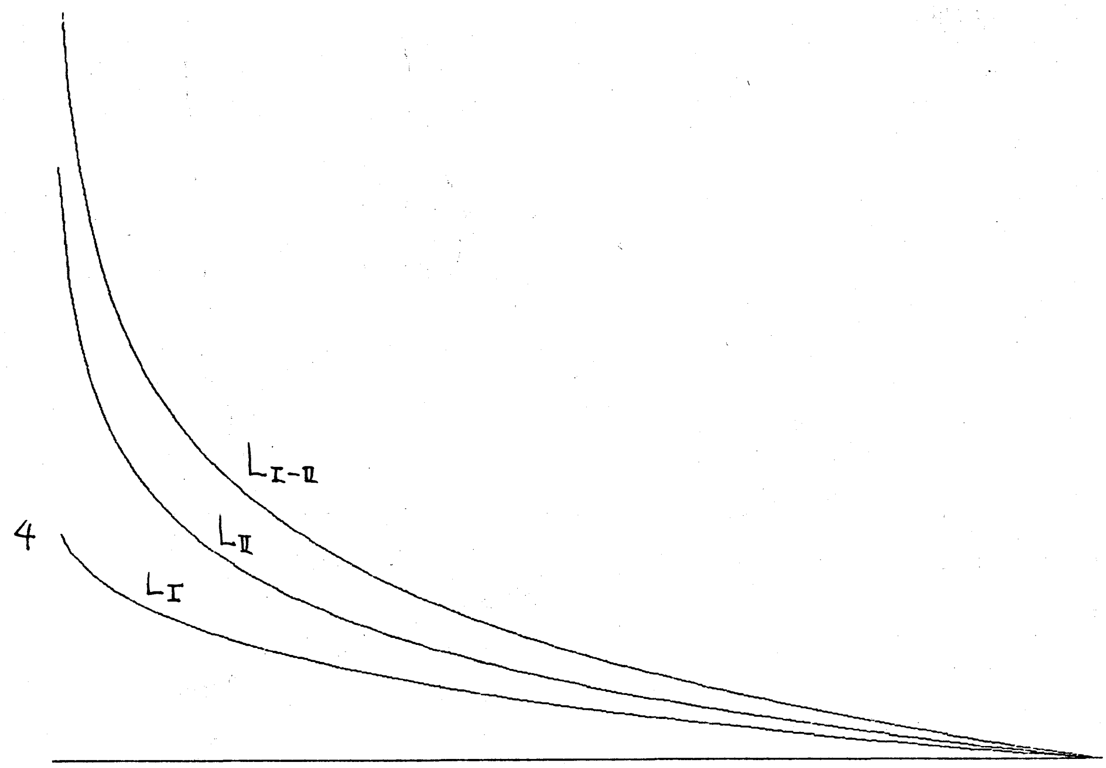

K_{1212}
$-5/32\pi^2$
K_{1010}
$-9/32\pi^2$
K_{1313}

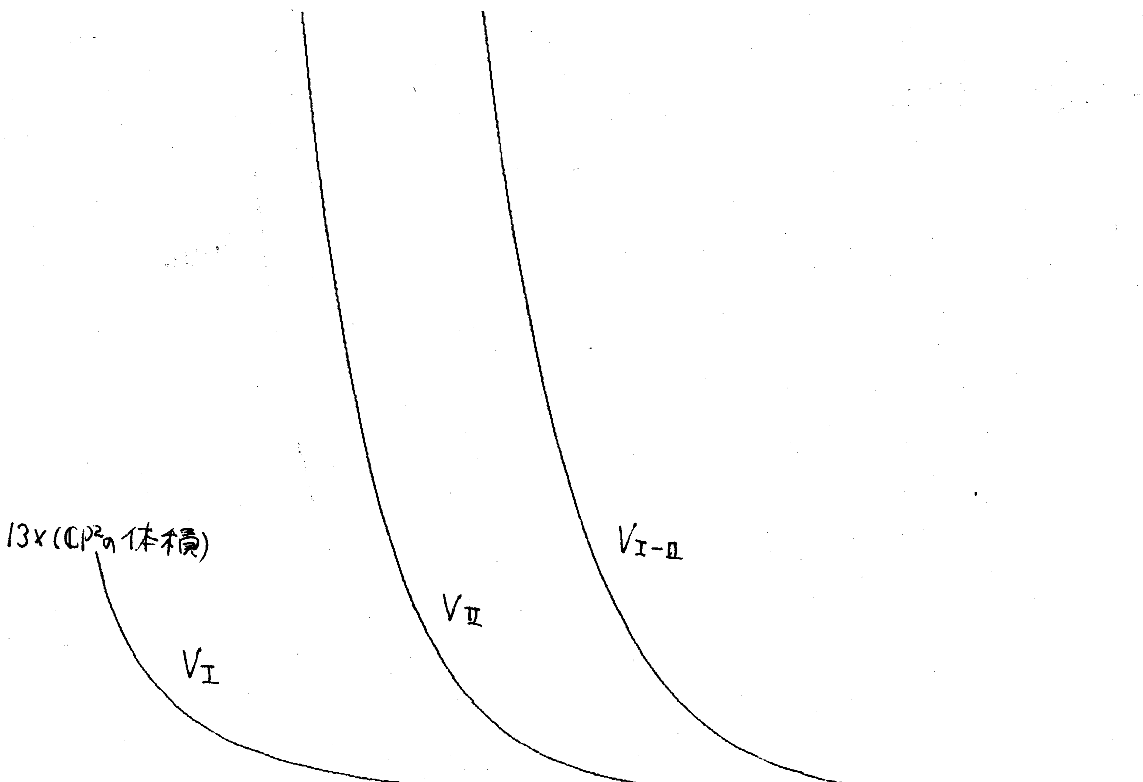
II 型　曲率



H^6/S^1　曲率




L_{I-II}
L_{II}
4
L_{I}


$13\times(\mathbb{C}P^2$の体積)
V_{I}
V_{II}
V_{I-II}

参考文献

[B] Buchdahl Instantons on $\mathbb{C}P^2$, J. Diff. Geo. 24 (1986) 17-52

[DMM] H. Doi, Y. Matsumoto, and T. Matumoto, An explict formula of the metric on the moduli space of BPST-instantons over S^4, Fête of Topology, Academic Press (1987)

[F] 古田幹雄. Self-dual connections on the principal $SU(2)$ bundle over $\mathbb{C}P^2$ with $c_2=-1$, 東京大学修士論文 I, 1985

[M] T. Matumoto, Three Riemannian metric on the moduli space of 1-instantons over S^4, preprint.

[GP] D. Groisser and T. Parker, The geometry of the Yang-Mills Moduli space for definite manifolds, preprint.

補足.

最近のpreprint [GP]には, (M, g_M), (但し $M \simeq \mathbb{C}P^2 \# \cdots \# \mathbb{C}P^2$) 上のモジュライ空間$\mathcal{M}$のI型計量に関する結果が記述されている。それによると cone point $[A] \in \mathcal{M}$の近傍Uでは, $F: (0, r_0) \times \mathbb{C}P^2 \to U - \{[A]\}$によるI型計量のひきもどし$F^* g_I$は、$F^* g_I = dr^2 + r^2(F\text{-}S + O(r^2))$とかけ、断面曲率は、$K(\partial_\lambda, X) = O(1)$, $K(X, Y) = \frac{3}{r^2} F\text{-}S(JX, Y) + O(1)$, $X, Y \in T_{(r,x)}\{r\} \times \mathbb{C}P^2$, Jは$\mathbb{C}P^2$の複素構造とかける。境界付近では、ψ: collar of $\mathcal{M} \to (0, \lambda_0) \times M$に対し, $g_I \sim \psi^* 4\pi^2 (2d\lambda^2 + g_M)$となる。

本報告は、$M = \mathbb{C}P^2$, $g_M = F\text{-}S$について、計量、断面曲率を詳しくみたものであり、この場合, cone point付近の上の定数が共に$-3/8\pi^2$であることをも示している。