

## 2 階線形常微分方程式の変換について

東大理 木村俊房 (Tosihusa Kimura)

## § 1 超幾何微分方程式に帰着される方程式

超幾何微分方程式を

$$(1.1) \quad y'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} \right) y' + \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{x(x-1)} y = 0$$

と書く。Riemann 関式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \chi \\ \chi & \chi & \chi+\chi \end{array} \right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\chi_0 + \chi_1 + \chi + 2\chi = 1$$

である。  $x=0, 1, \infty$  以外にみかけの特異点  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  をもつ方程式

$$(1.2) \quad z'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} - \sum \frac{n_j}{x-\lambda_j} \right) z' + \left( \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} - \sum \frac{\lambda_j(\lambda_j-1)\mu_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)} \right) z = 0$$

を考える。Riemann 関式は

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x=0 & x=1 & x=\lambda_1, \dots, x=\lambda_N & x=\infty & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \\ \chi_0 & \chi_1 & n_1+1 & n_N+1 & \beta & \end{array} \right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\chi_0 + \chi_1 + \alpha + \beta + n = 1, \quad n = \sum n_j$$

である。福原は線形変換

$$(T) \quad z = P_1(x)y' + P_2(x)y$$

で (1.2) は (1.1) に変換されるであろう、つまり、みかけの特異点は消せるであろうと予想した。実際そうなることを示したのは [K.1] である。結果は次のように述べら

れる。

(1.1) の monodromy 群は既約とする。そのとき  $\alpha = \chi$ ,  $\beta = \chi + \chi_\infty - n$  であれば、

$$P_1 = x(x-1)(x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n),$$

$$P_2 = \alpha x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n$$

を適当にとれば、(1.2) は (1.1) へ (T) で変換される。

これを示すのに次の事実を使う。方程式

$$(B) \quad z'' + B_1(x)z' + B_2(x)z = 0$$

が変換 (T) で

$$(A) \quad y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$$

に移るならば、

$$P_1'' + (B_1 - 2A_1)P_1' + 2P_2' + A_1(A_1 - B_1)P_1 + (B_2 - A_2 - A_1')P_1 \\ + (B_1 - A_1)P_2 = 0,$$

$$P_2'' - 2A_2P_1' + B_1P_2' + A_1(A_1 - B_1)P_1 - A_2'P_1 + (B_2 - A_2)P_2 = 0$$

が成り立つ。

$n = 1, 2$  のときは変換 (T) は容易に求められるが、 $n$  が大きくなると手計算は大変なことになる。

## §2. Painlevé 系 $P_{VI}$ に関連する方程式、I.

線形方程式

$$(2.1) \quad y'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda} \right) y' \\ + \left( \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)} \right) y = 0$$

を考える。Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \chi_0 & \chi_1 & \theta & 2 & \chi + \chi_\infty \end{array} \right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\kappa_0 + \kappa_1 + \theta + \chi + 2\lambda = 1$$

である。  $x = \lambda$  をみかけの特異点と仮定すると、H は

$$H = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)} \left( \mu^2 - \left( \frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\kappa_1-1}{\lambda-1} + \frac{\theta-1}{\lambda-t} \right) \mu + \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{\lambda(\lambda-1)} \right)$$

で与えられる。岡本 [Ok] は、この仮定のもとで (2.1) は monodromy 保存変形可能で  
変形方程式は Painlevé 系

$$P_{VI} \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \\ \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \end{cases}$$

であることを示した。

みかけの特異点  $x = \lambda$  での指数は 0, 2 であるが、これを 0, 3 とするとどうなるかを木村 [K2] で論じた。Riemann 関式

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\ell & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \theta & 3 & \chi + \kappa_\infty - 1 \end{array} \right\}$$

をもつ方程式

$$(2.2) \quad z'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{2}{x-\ell} \right) z' + \left( \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\ell(\ell-1)m}{x(x-1)(x-\ell)} \right) z = 0$$

を考え、 $x = \ell$  をみかけの特異点と仮定する。そのとき

$$P_1 = \frac{x(x-1)(x-t)}{x-\lambda}$$

$$P_2 = \alpha(x-\lambda) + q - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とおき、 $q$  を適当にとると、(2.2) は変換 (T) で (2.1) に移り、 $\lambda, \mu$  は  $t, \ell, m$ , の有理関数として定まる:

$$\begin{cases} \lambda = \psi(t, \ell, m), \\ \mu = \psi(t, \ell, m). \end{cases}$$

$\phi, \psi$  の具体的な形は複雑である。これが正準変換であること、すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ell} \frac{\partial \psi}{\partial m} - \frac{\partial \phi}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial \ell} = 1$$

が成り立つことをしめすのに数式処理が使われた。これについては [K.K] をみられたい。

### §3. Painlevé 系 $P_{VI}$ に関連する方程式、II.

次に方程式

$$(3.1) \quad z'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2} \right) z'' + \left( \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda_1(\lambda_1-1)\mu_1}{x(x-1)(x-\lambda_1)} + \frac{\lambda_2(\lambda_2-1)\mu_2}{x(x-1)(x-\lambda_2)} \right) z = 0$$

を考える。Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \theta & 2 & 2 & \chi+\kappa_\infty-1 \end{array} \right\}$$

である。前と同様、 $x=\lambda_1, x=\lambda_2$  はみかけの特異点と仮定する。そのとき、

$$P_1 = \frac{x(x-1)(x-t)}{x-\lambda},$$

$$P_2 = \alpha(x-\lambda) + q - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とにおいて、 $q$  を適当にとると、(3.1) は (2.1) に (T) で移ることが分る。

#### §4. 一般の場合

Riemann 関式

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda_1 & \dots & x=\lambda_N & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \chi \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \theta & n_1+1 & & n_N+1 & \chi + \kappa_\infty - n+1 \end{array} \right\} \quad (n = \sum n_j)$$

をもつ方程式

$$(4.1) \quad z'' + \left( \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \sum \frac{n_j}{x-\lambda_j} \right) z' + \left( \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-n+1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \sum \frac{\lambda_j(\lambda_j-1)\mu_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)} \right) z = 0$$

を考える。  $x=\lambda_1, \dots, x=\lambda_N$  はすべてみかけの特異点とする。 そのとき、  $P_1, P_2$  を適当にとれば、(4.1) は (T) で (2.1) に移ることが予想される。 予想は、

$$P_1 = x(x-1)(x-t) \left( x^{n-3} + p_4 x^{n-4} + \dots + p_n + \frac{p}{x-\lambda} \right),$$

$$P_2 = \alpha x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \dots + q_n - \frac{q\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とおけばよく、 $\lambda, \mu, p_1, \dots, p_n, p, q_1, \dots, q_n, q$  は  $t, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$  の有理関数としてきまると述べられる。

一般に、方程式(A), (B) の係数  $A_1, A_2, B_1, B_2$  は有理関数で、さらに (A), (B) は Fuchs 型とする。そのとき有理関数係数  $P_1, P_2$  をもつ変換 (T) で (B) が (A) に移ることは (A) と (B) の monodromy が一致することと同値である。Riemann 球面上で定義された Fuchs 型の 2 階の方程式に対する Riemann 問題は、monodromy が generic であれば、みかけの特異点 1 個を許せば解けることが知られている [Oh]。上の予想は、みかけの特異点  $x=\lambda$  における指数が  $0, 2$  としてよいことを意味している。 $\lambda, \mu, p_1, \dots, p_n, p, q_1, \dots, q_n, q$  は  $t, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$  の有理関数であるから、それらの極となる  $t, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$  の値を除けば、(4.1) は (2.1) に移る。

$n=2$  のときはなんとか手計算でできたが、 $n > 2$  では計算する気も起らない程大変となるであろう。数式処理の出番となる。

Painlevé 系  $P_{VI}$  に関連する場合だけ述べたが、 $P_{IV}, \dots, P_{II}$  に関連する場合も考えられる。また  $t$  を増やした Garnier 系に関連する場合も考えられる。

### 参 考 文 献

- [K.1] T. Kimura, On Fuchsian differential equations reducible to hypergeometric equations by linear transformations, Funkc. Ekvac. 13 (1970), 213-232.
- [K.2] T. Kimura, On the isomonodromic deformation for linear ordinary differential equations of the second order, I, II, Proc. Japan Acad. 57 (1981), 285-290, 58 (1982), 294-297.
- [K.K] 木村、金田、2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形に現われた数式処理、数学 37 (1985), 69-76.

[Oh] M. Ohtsuki, On the number of apparent singularities of a linear differential equation, Tokyo Jour. Math., 5 (1982), 23-29.

[Ok] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with the Painleve equations, I, II, Proc. Japan Acad., 56 (1980), 264-268, 367-371.