数理解析研究所講究録
666巻 1988年 8-17

連続動作代数に基づく
項書換え系の意味論

直井徹　稲垣康善

名古屋大学工学部

1. はじめに

項書換え系やλ計算などの，項の簡約に基づく計算体系に対し古典的な動作意味論を定式化しようとすれば，項 t の意味は文脈 s[ ] と代入 σ を s[σ(t)] の正規形（それ以上簡約化できない項）に写す写像とするのが自然である[9]．この場合，直観的には，t は(サブ)プログラムであり，s[ ] はメインプログラム，σは t への引数を表わし，また，正規形はプログラム全体を評価した結果に相当する．一般には，すべての項が正規形をもつとは限らないので，上述の写像は部分的である．この定式化は，計算が停止した後にのみ，その結果を得ることができるという前提，すなわち，A. Church の立場に基づいたものである．これに対して，D. Scott の立場にたてば，計算の結果とは実行の各段階に得られる中間結果の集積したものとして捉えられ，したがって，実行の停止，非停止は第二義的なものとなる[1-6, 8, 9]．このような発想を代数的な枠組みにおいて形式化したものが，本論文で提案する連続動作代数である．

本論文では，まず，計算結果の集合を項集合の任意の部分集合とし，それぞれの項から中間結果を抽出する手段を項集合上の適当な前順序（preorder）とする一般的な設定の下で，「動作」の概念を定式化する．このとき，本論文で提案する完全性，無矛盾性などの条件を仮定すると，前順序と計算結果の集合はそれぞれ自然に

無限木集合上に拡張され，これによって無限木集合上に定まる商代数は連続代数[1]であることを示せる．この商代数を連続動作代数と呼ぶ．さらに，連続動作代数は，二つの代数のクラスにおいてそれぞれ始代数と終代数になっている等，強い性質をもつことが導かれる．

この結果は，項書換え系やλ計算など，項の簡約に基づく計算体系に対して，意味の領域を連続代数とするような動作意味論を与えるためにひろく適用可能であり，著者らが以前提案した無あいまい線形項書換え系の代数的意味論[8.9]，あるいは，Courcelle[3] が示した単調な項書換え系に基づく連続代数の構成法がその例となっている．また，J.-J. Lévy [6] による λ計算の代数的モデルも，定式化を若干修正すれば，連続動作代数の一例とみなされるであろう．

2. 準備

以下では，完備順序集合とその上の連続関数，コンパクト性と代数的完備順序集合，引き込み (retraction) 等の概念について予備知識を仮定する．これらについては，例えば，文献 (4-5,8) を参照されたい．

2. 1 連続代数

π を集合 A 上の前順序とするとき，同値関係 $\pi \cap \pi^{-1}$ による商集合と，その上に π から誘導される順序を A/π で表わす．また，$a \in A$ の $\pi \cap \pi^{-1}$ に関する同値類を $[a]_\pi$ で表わす．

F を関数記号の可算集合とする．各関数記号は定められた次数 (arity) をもつ．F は特別な定数記号（すなわち，次数 0 の関数記号）Ωを含む．また，X を変数記号の可算集合とし，$F \cap X = \phi$ とする．変数記号の次数は 0 である．

順序 F 代数とは，対 $A = \langle\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle, \langle f_A | f \in F\rangle\rangle$ で，$\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle$ が Ω_A を最小元とする順序集合であり，次数 n の関数記号 $f \in F$ に対し，f_A が $D_A{}^n$ から D_A への

単調写像であるものをいう．$\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle$ を代数 A の台という．順序 F 代数 A から B への準同型 η : A→B とは，次の条件をみたすような，D_A から D_B への単調写像である：$f\in F$に対して，$\eta(f_A(d_1,\ldots,d_n)) = f_B(\eta(d_1),\ldots,\eta(d_n))$．順序 F 代数 A の台が完備順序集合であり，また，各f_A が連続のとき，A は連続代数といわれる．連続代数間の準同型は，順序代数間の準同型であって，連続なものをいう．

［定義 2.1］連続 F 代数 A と連続 F 代数のクラスΓに対して次の条件(1)，(2)が成立するとき，A はΓにおける始代数（または，終代数）であるという：(1) A はΓに属し，(2) Γの任意の代数 B に対して，準同型 θ:A→B（または，θ:B→A)が一意に存在する．□

［定義 2.2］連続 F 代数 A と連続 F 代数のクラスΓに対して次の条件(1)，(2)が成立するとき，Γにおいて A は X 上で自由であるという：(1) A はΓに属し，(2) 写像ι:X→D_Aが存在し，Γの任意の代数 B と任意の写像 θ:X→D_B に対して，$\theta = \theta'\circ\iota$ となる準同型 θ':A→B が一意に存在する．□

これらの概念は，順序代数に関しても同様に定義される．さて，それぞれの変数記号を単に定数記号とみなすと，$F\cup X$ 代数という概念を考えることができる．

［注意 2.3］変数記号に関する解釈を忘れることによって，$F\cup X$ 代数は F 代数とみなされる．□

なお，本節の内容については，詳しくは文献(1，5) を参照されたい．

2．2　無限木

本節では無限木に関する諸概念を定義する．詳細は文献(1，4)を参照されたい．

節点を関数記号または変数記号でラベル付けされた，無限ないしは有限な有向木の集合を $T^{\infty}(F,X)$ で表わす．また，これらの木のうち有限なものの全体を $T(F,X)$ で表わす．$T(F,X)$ の要素は項とみなすことができる．以下，$T(F,X)$ の要素を s, t, t'，u,...，などの文字で表わし，$T^{\infty}(F,X)$ の要素を S，T，T'，U,...，などの文

字で表わす．

$\mathbb{P}^*$ を正整数の有限列の全体とする．空列は ε で表わす．列 p, q の連接を $p \cdot q$ で表わす．$\mathbb{P}^*$ 上の順序$\leq$を，$p \leq q \Leftrightarrow \exists r \;\; p \cdot r = q$ で定義する．集合 $P \subseteq \mathbb{P}^*$ の極小な要素全体を Min(P) とかく．木 T に対し，$\mathbb{P}^*$ の部分集合 Node(T) を，以下のように定義する．

$$\mathrm{Node}(T) = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & T \in F \cup X \text{ のとき}, \\ \{\varepsilon\} \cup \{i \cdot p \mid p \in \mathrm{Node}(T_i),\ i = 1, \ldots, n\}, & T = f(T_1, \ldots, T_n) \text{のとき}. \end{cases}$$

木 T の各節点は Node(T) の要素と自然に同一視される[1,3,4]．木 T と $p \in \mathrm{Node}(T)$ に対し，p を根とする T の部分木を T/p で表す．また，$T[p \leftarrow T']$ は T の節点 p を根とする部分木を木 T' で置き換えて得られる木を表わす．

$T^\infty(F, X)$上の順序$\leq$を次のように定義する：木 T' の適当な部分木の出現（0 個以上）をΩで置き換えることにより木 T が得られるとき，$T \leq T'$．$\langle T^\infty(F, X), \leq \rangle$ は T(F, X) を基底とする代数的完備順序集合である．

$T^\infty(F, X)$ 上の代入とは，X から $T^\infty(F, X)$ への写像 σ である．次式により代入の定義域を $T^\infty(F, X)$ へ拡張する：$\sigma(T) = T[p \leftarrow \sigma(x) \mid T/p = x \in X]$．代入を $T[T_1/x_1, T_2/x_2, \ldots]$ とも表わす．あいまいさが生じなければ，これをさらに $T[T_1, T_2, \ldots]$ と略記することもある．$T^\infty(F, X)$ 上の代入と同様に，T(F, X) 上の代入が定義される．

2．3　木の代数と合同関係

次数 n の記号 $f \in F \cup X$ に対し，$T^\infty(F, X)$ 上の写像 $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle \mapsto f(T_1, \ldots, T_n)$ を割り当てることで，$\langle T^\infty(F, X), \leq \rangle$ を台とする連続 $F \cup X$ 代数が定まる．これを $H^\infty(F \cup X)$ で表わす．さらに，$H^\infty(F \cup X)$ から，注意 2.2.3 によって得られる連続 F 代数を $H^\infty(F, X)$ で表わす．

[命題 2.4] (ADJ[1])

(1) $H^{\infty}(F\cup X)$ はすべての連続 $F\cup X$ 代数のなすクラスにおける始代数である.

(2) $H^{\infty}(F,X)$ はすべての連続 F 代数のなすクラスにおいて X 上で自由である. □

上の命題の (2) によると, 連続 F 代数 A に対し, 木 T は連続写像 $T_A:(X\to D_A)\to D_A$ を表すと考えられる: $\theta: X\to D_A$ に対して, $T_A(\theta) = \theta'(T)$. ただし, θ' は θ に対して一意的な準同型である. 連続 F 代数 A から, 連続写像の集合 $(X\to D_A)\to D_A$ を台とする連続 $F\cup X$ 代数 $\hat{A}$ が定まる[2]. ここで, $g, g': (X\to D_A)\to D_A$ に対して, $g \sqsubseteq_{\hat{A}} g' \Leftrightarrow g(\theta) \sqsubseteq_A g'(\theta)$ $(\theta: X\to D_A)$ とし, また, $f\in F$ に対し, $f_{\hat{A}}(g_1,\ldots,g_n)(\theta) = f_A(g_1(\theta),\ldots,g_n(\theta))$ $(g_1,\ldots,g_n:(X\to D_A)\to D_A,\ \theta: X\to D_A)$ とする. $(X\to D_A)\to D_A$ の関数のうち「無限木によって表現可能なもの」の集合 $\{T_A \mid T\in T^{\infty}(F,X)\}$ は, ($\hat{A}$ の部分構造として) 順序 $F\cup X$ 代数を成す. これを $H^{\infty}(F,X)_A$ で表わす. すなわち, $f_{H^{\infty}(F,X)_A}((T_1)_A,\ldots,(T_n)_A) = (f(T_1,\ldots,T_n))_A$ $(f\in F\cup X)$. $H^{\infty}(F,X)_A$ は一般に連続でない[5].

$T^{\infty}(F,X)$上の前順序πが$\leq$を含み, かつ次の条件をみたすとき, πを$T^{\infty}(F,X)$上の前合同関係という: $T_i\ \pi\ U_i\ (i=0,1,\ldots) \Rightarrow T_0[T_1,T_2,\ldots]\ \pi\ U_0[U_1,U_2,\ldots]$. $T(F,X)$ 上の前合同関係も同様に定義される. $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係πを与えると, $T^{\infty}(F,X)/\pi$ を台とする標準的な順序 $F\cup X$ 代数 Q_π が次によって定まる: $f\in F\cup X$ に対して, $f_{Q_\pi}([T_1]_\pi,\ldots,[T_n]_\pi) = [f(T_1,\ldots,T_n)]_\pi$. Q_π は順序代数だが, 必ずしも連続でない. これが連続である場合には, 下のような興味深い性質が得られる.

[定理 2.5] (外延性定理) $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係πに対して, Q_π が連続なとき, $H^{\infty}(F,X)_{Q_\pi}$ も連続でこれらは同型である. □

上の性質は, 木の, 値としての側面と関数としての側面の整合性を表している.

連続 F 代数 A に対し, $T^{\infty}(F,X)$上の前順序$\precsim_A$ を次のように定義する: $T \precsim_A T' \Leftrightarrow T_A \sqsubseteq_{H^{\infty}(F,X)_A} T'_A$. $\precsim_A$ は, $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係である. 容易に分

かるように，$Q_{\sqsubseteq_A}$ は $H^{\infty}(F,X)_A$ と同型である．

３．連続動作代数

３．１　連続動作代数

本節では，"動作" の概念を，ひとつの前合同関係から新たな前合同関係を導く枠組みとして抽象的に定式化し，誘導された前合同関係が連続代数を定めるための十分条件を示す．

π を $T(F,X)$ 上の前合同関係とし，B を $T(F,X)$ の部分集合とする．$t \in T(F,X)$ に対し，次のように定義される関数 $Bhv_{\langle \pi, B \rangle}(t)$ を，$\langle \pi, B \rangle$ を基底とする t の動作という：$Bhv_{\langle \pi, B \rangle}(t)(s, x, \sigma) = \{u \in B \mid u\ \pi\ s[\sigma(t)/x]\}$

$T(F,X)$ 上の前順序 $\beta_{\langle \pi, B \rangle}$ を次のように与え，$\langle \pi, B \rangle$ 動作前順序とよぶ: $t\ \beta_{\langle \pi, B \rangle}\ t' \Leftrightarrow \forall s \forall x \forall \sigma\ Bhv_{\langle \pi, B \rangle}(t)(s, x, \sigma) \subseteq Bhv_{\langle \pi, B \rangle}(t')(s, x, \sigma)$.
$\beta_{\langle \pi, B \rangle}$ が前合同関係であることは容易に導かれる．以下で，基底 $\langle \pi, B \rangle$ が文脈から明らかであるときは，添字 $\langle \pi, B \rangle$ を省略することがある．

[定義 3.1]　次の条件が成り立つとき，$\langle \pi, B \rangle$ は完全な基底であるという：$u \in B$ かつ $u\ \pi\ s[\sigma(t)/x] \Rightarrow \exists v \in B\ \ v\ \pi\ t$ かつ $u\ \pi\ s[\sigma(v)/x]$. □

[定義 3.2]　次の条件が成り立つとき，$\langle \pi, B \rangle$ は無矛盾な基底であるという：任意の t に対して $\{u \in B \mid u \pi t\}$ は π に関して有向である．□

[定義 3.3]　次の条件が成り立つとき，基底 $\langle \pi, B \rangle$ は構文論的であるという: $u, u' \in B$ に対し，$u \pi u \Leftrightarrow u \le u'$. □

無矛盾な構文論的基底 $\langle \pi, B \rangle$ に対しては，$\{u \in B \mid u\ \pi\ t\}$ は $\le$ に関して有向である．そこで，写像 $Proj_{\langle \pi, B \rangle} : T(F,X) \to T^{\infty}(F,X)$ を次のように定義することができる：$Proj_{\langle \pi, B \rangle}(t) = \sqcup \{u \in B \mid u\ \pi\ t\}$. $Proj_{\langle \pi, B \rangle}(t)$ を t の $\langle \pi, B \rangle$ 射影という．

[補題 3.4]　完全かつ無矛盾で構文論的な $\langle \pi, B \rangle$ に対し，$t \beta t' \Leftrightarrow Proj(t) \le$

Proj(t'). □

[系 3.5] 無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ に対して，Proj は単調である. □

補題 3.4 とその系から，構文論的基底が完全かつ無矛盾であれば，T(F,X) 上の前合同関係 β は次のようにして $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係へと拡張される. まず，次のようにして，単調写像 Proj は $T^{\infty}(F,X)$ を定義域とする連続写像へと一意に拡張される： $\mathrm{Proj}^{\infty}(T) = \sqcup\{\mathrm{Proj}(t) \mid t \leq T\}$. そこで補題 3.4 に準じ，$\beta$を，次のようにして $T^{\infty}(F,X)$ 上の関係 β^{∞} へと拡張する：$T\ \beta^{\infty}\ T' \Leftrightarrow \mathrm{Proj}^{\infty}(T) \leq \mathrm{Proj}^{\infty}(T')$.

[定理 3.6] 完全で無矛盾な構文論的基底に対し，$Q_{\beta^{\infty}}$ は連続代数である. □

このとき，$Q_{\beta^{\infty}}$ を，$\langle\pi, B\rangle$ を基底とする連続動作代数という. 以下では，これが二つの代数のクラスに対してそれぞれ始代数，終代数となっていることを示す.

[定理 3.7] 完全かつ無矛盾な構文論的基底に対し，$Q_{\beta^{\infty}}$ は連続 F 代数のクラス $\Gamma_{\beta^{\infty}} = \{A \mid \beta^{\infty} \subseteq \sqsubseteq_A\}$ において X 上で自由であり，順序 F∪X 代数のクラス $\Phi_{\beta^{\infty}} = \{H^{\infty}(F,X)_A \mid$ 連続 F 代数 A, $\beta^{\infty} \subseteq \sqsubseteq_A\}$ の始代数である. □

なお，勝手な前合同関係πに対して，Q_{π} がたまたま連続代数であったとしても，それが Γ_{π} における自由代数であるとは限らない(5).

関係π^{∞} を次により定義する: $t\ \pi^{\infty}\ T \Leftrightarrow \exists t'\ t\ \pi\ t'$ かつ $t' \leq T$. また，準同型η: $H^{\infty}(F \cup X) \to A$ に対し，$T^{\infty}(F,X)$ 上の前順序 $\mathrm{Ker}(\eta)$ を次のように定義する： $T\ \mathrm{Ker}(\eta)\ T' \Leftrightarrow \eta(T) \sqsubseteq_A \eta(T')$.

[定義 3.8] 次の条件をみたす連続 F∪X 代数 A のなすクラスを $\Delta_{\langle\pi,B\rangle}$ で表わす: (1) 上への準同型η: $H^{\infty}(F \cup X) \to A$ が存在して，(2) $\pi^{\infty} \subseteq \mathrm{Ker}(\eta) \subseteq \beta^{\infty}$ であり，(3) $u \in B$ に対し，$[u]_{\mathrm{Ker}(\eta)}$ はコンパクト. □

[定理 3.9] 完全で無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ に対し，$Q_{\beta^{\infty}}$ は $\Delta_{\langle\pi,B\rangle}$ における終代数である. □

4. 項書換え系の連続動作意味論

本章では，連続動作代数の概念を項書換え系の意味論に応用する．項の書換えから完全で無矛盾な構文論的基底が導かれるなら，このとき定まる連続動作代数によって項書換え系の意味論を与えることができる．以下，項書換え系に関する初歩的な知識を仮定して議論を進める．必要ならば，例えば文献 (2,3) を参照されたい．

項書換え系 R による T(F,X) 上の書換え関係 $\rightarrow_R$ の逆関係を $\leftarrow_R$ で表わし，$\leftrightarrow_R = \rightarrow_R \cup \leftarrow_R$ とする．また，一般に 2 項関係 ρ の反射推移閉包を ρ^* で表わす．R のリデックスの集合 Red_R を次に定義する：$Red_R = \{t \in T(F,X) \mid \exists \langle u, u' \rangle \in R\ \exists \sigma\ \sigma(u)=t\}$．リデックスを部分項としてもたない（有限）項を正規形といい，その集合を NF_R で表わす．項 t にΩが現れないとき，t をΩフリーであるという．Ωフリー正規形全体の集合を ONF_R で表わす．

基底を $\langle (\preceq \cup \leftarrow_R)^*,\ ONF_R \rangle$ にとった動作は，1．で触れた古典的な動作意味論に対応する．$(\preceq \cup \leftarrow_R)^*$ は $\leftarrow_R$ を含む最小の前合同関係である．すなわち，古典的動作意味論を順序論的な動作意味論の特別な場合とみなすこともできる．上の基底は構文論的ではあるが，一般に無矛盾性も完全性も満たさない．これらを保証するためには，さらに条件を仮定しなければならない．

まず，単調項書換え系(3)をとりあげる．R が停止性と合流性を満たすとし，項 t の正規形を $nf_R(t)$ で表すとき，写像 nf_R が単調ならば，R は単調であるという．

[命題 4.1] R が単調ならば，次の基底は完全かつ無矛盾で構文論的である：

$\langle (\preceq \cup \leftrightarrow_R)^*,\ NF_R \rangle$，$\langle (\preceq \cup \leftarrow_R)^*,\ NF_R \rangle$，$\langle \preceq \cdot (\leftarrow_R^*),\ NF_R \rangle$．□

項書換え系を計算の体系とみなすときには，停止性の仮定は厳しすぎるため(8)，これに代わる適当な条件を考える必要がある．

次のように帰納的に定められる集合を $Cand_R$ で表し，R のリデックスの候補の集合という：(1) $Red_R \subseteq Cand_R$，(2) t, $t' \in Cand_R$, $p \in Node(t)$ ならば $t[p \leftarrow t'] \in Cand_R$．さらに，$\downarrow Cand_R = \{t \mid \exists t' \in Cand_R\ t \preceq t'\}$ とする．Ω以外の $\downarrow Cand_R$ の

要素を，部分項としてもたない（有限）項を R の近似正規形といい，その集合を $\mathrm{ANF}_R^{\dagger}$ で表わす．R のすべての左辺がΩフリーのとき，R をΩフリーという．

[命題 4.2] 無あいまい線形Ωフリー項書換え系 R に対し，$\langle \leq \cdot (\leftarrow_R^{*}),\ \mathrm{ANF}_R \rangle$ は完全で無矛盾な構文論的基底である．□

すなわち，文献(8) に著者らが与えた，無あいまい線形項書換え系の代数的意味論は，上記の基底の下での動作意味論である．なお，R が線形Ωフリーならば $(\leq \cup \leftarrow_R)^{*} = \leq \cdot (\leftarrow_R^{*})$ であることを証明できる．定理 3.6 により，上述の二つの場合には，項書換え系から連続動作代数を導くことができる．定理 3.7 から，この連続代数は自由代数である．これについては，既に文献 (3,8) の中でも検討されているが，本論文の定理 3.9 によれば，この連続代数は終代数でもあることが分かる．また，定理 2.5 の意味での外延性が成立している．

５． 結論

Scott の順序論的な立場に基づき，連続動作代数の概念を定式化し，これがいくつかの有用な性質を備えていることを明らかにした．また，この概念を項書換え系の意味論に適用した例を示した．さらに，束縛変数の概念を導入して代入などの定式化を修正することにより，本論文の議論をλ計算の意味論に応用することが可能である．実際，このような修正の後には，Lévy(6) によるλ計算の代数的モデルを連続動作代数の例とみなすことができると考えられる．

謝辞 日頃御指導いただく豊橋技術科学大学本多波雄学長，名古屋大学福村晃

---

† この表記は，著者らの以前の文献(8, 9) におけるものと整合しない．これらの文献中における ANF_R は，本論文での $(\mathrm{ANF}_R)^{\infty}$ にあたる．

夫教授，御討論下さった名古屋大学坂部俊樹助教授，平田富夫講師，並びに研究室の皆様に感謝する．また，本論文の近接に関連して九州大学河原康雄先生から有益なご助言をいただいた．記して感謝する．なお，本研究は一部文部省科研費（一般研究(C)課題番号62550261，試験研究(1)課題番号62880007)の援助を受けた．

文献

(1) ADJ: "Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras," J.ACM 24, pp.68-95(1977).

(2) G.Boudol: "Computational Semantics of Term Rewriting Systems," [文献(8), pp.167-236].

(3) B.Courcelle: "Infinite Trees in Normal Form and Recursive Equations Having a Unique Solution," Math. Systems Theory 13, pp.131-180 (1979).

(4) B.Courcelle: "Fundamental Properties of Infinite Trees," Theor. Comput. Sci. 25, No. 2, pp. 95-169(1983).

(5) I.Guessarian: "Survey on Classes of Interpretations and Some of Their Applications," [文献(7), pp.383-410].

(6) J.-J.Lévy: "An Algebraic Interpretation of the λβK-Calculus; and an Application of a Labeled λ-calculus," Theor. Comput. Sci. 2, No.1, pp.97-114(1976).

(7) M.Nivat and J.C.Reynolds, Eds., "Algebraic Methods in Semantics," Cambridge University Press(1985).

(8) 直井，稲垣："項書換え系の意味論と自由連続代数"，信学論採録.

(9) 直井，稲垣："項書換え系とその保存的拡大における代数的意味論と動作意味論の関連について"，信学論投稿中.