数理解析研究所講究録
669巻 1988年 16-43

Cut-elimination for SBL

名古屋大学理学部　新井敏康
(Toshiyasu Arai)

K. Schütte は、

[S] Eine beweistheoretische Abgrenzung des Teilsystems der Analysis mit Π^1_2-Separation und Bar-Induktion, Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1987, 11-41.

において、以下に述べる定理を証明している。

<u>定理</u>　原始帰納的整列順序 $\prec$ について、

Π^1_2-Sep + BI $\vdash$ TI($\prec$) $\Rightarrow$ the order type of $\prec$ は順序数 $\psi_0 I$ より小さい。

但し、ここに、Π^1_2-Sep + BI は、二階の算術の部分体系で、その主な公理は、次の (Π^1_2-Sep) と (BI) である：

(Π^1_2-Sep) $\quad \forall x \neg(A_0(x) \wedge A_1(x)) \rightarrow \exists X \forall x [(A_0(x) \supset x \in X) \wedge$

$\wedge (A_1(x) \supset x \notin X)]$

A_0, A_1 はともに Π^1_2-formula,

(BI) $\quad \forall X F(X) \rightarrow F(V)$

F は arithmetical formula，V は任意の abstract.

また，(帰納的)順序数 $\psi_0 I$ は，W. Buchholz と K. Schütte によって，次の論文で定義されたものである：

[BS] Ein Ordinalsystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion, ibid, 1983, 99-132.

[S] における証明は，Buchholz による $\Omega_{\mu+1}$-rule を使った infinitary proof へ，有限の証明図を埋め込んでから，cut を取り除くという方法（の拡張）によっている。

このノートでは，その [S] における証明を，有限の証明図に対する cut-elimination の（直接）証明に書きかえる。

証明は紙幅の都合上，省略する。

§1. A Version of Ordinal Diagrams.

この§では、のちに必要となる'順序数'の体系とそれに関する基本的な定義・命題を述べる。その構成と大小の定義は、[BS]における *collapsing functions* と竹内外史による *ordinal diagram* の両方を折衷して得られた。

6つの記号 $0, I, +, \omega, \Omega, d$ からなる記号列の集合を5つ $F, R, E, P, O(I)$ と、$O(I)$の上の二項関係 $<$, 写像 $S: O(I) \to R_0 \cup \{I\}$ （$R_0 := R \cup \{0\}$）と、各 $\alpha \in O(I)$, $\sigma \in R_0$ について、Fの有限部分集合 $K\alpha$, Eの有限部分集合 $K_\sigma \alpha$ を、同時に定義する。

I. 0. $F \subseteq R \subseteq E \subseteq P \subseteq O(I)$.

1. $0 \in O(I)$; $I \in E$.

2. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in P$ & $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ $(n \geq 2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \in O(I)$

（但し、$\alpha \geq \beta :\Leftrightarrow \beta \leq \alpha :\Leftrightarrow \beta < \alpha$ or $\beta = \alpha$ で、$\beta = \alpha$ は、α, β が記号列として一致すること）

3. $\alpha \in O(I) \setminus E \Rightarrow \omega^\alpha \in P$

4. $0 \neq \alpha \in O(I) \setminus F$ & $\alpha < I \Rightarrow \Omega_\alpha \in R$

5. $I > \alpha \in O(I)$, $\sigma \in R_0$ & $\sigma \leq S\alpha \Rightarrow d_\sigma \alpha \in E$

6. $I \leq \alpha \in O(I) \quad \Rightarrow \quad d\alpha \in F$.

II. $S\alpha \in R_0 \cup \{I\}$ for $\alpha \in O(I)$

1. $S0 = 0 \quad ; \quad SI = I$.

2. $S(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = S\alpha_1$.

3. $S\omega^\alpha = S\alpha$.

4. $S\Omega_\alpha = \Omega_\alpha$.

5. $Sd\sigma\alpha = \sigma$.

6. $Sd\alpha = d\alpha$.

III. $K\alpha \subseteq F$ for $\alpha \in O(I)$

1. $K0 = KI = \phi$.

2. $K(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = K\alpha_1 \cup \cdots \cup K\alpha_n$.

3. $K\omega^\alpha = K\alpha$.

4. $K\Omega_\alpha = K\alpha$.

5. $Kd\sigma\alpha = K\sigma$.

6. $Kd\alpha = \{d\alpha\}$.

IV. $K_\sigma\alpha \subseteq E$ for $\sigma \in R_0$, $\alpha \in O(I)$.

1. $K_\sigma 0 = K_\sigma I = \phi$

2. $K_\sigma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = K_\sigma\alpha_1 \cup \cdots \cup K_\sigma\alpha_n$.

3. $K_\sigma \omega^\alpha = K_\sigma \alpha$.

4. $K_\sigma \Omega_\alpha = \begin{cases} K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < \Omega_\alpha, \\ \phi & \text{if} \quad \Omega_\alpha \leq \sigma. \end{cases}$

5. $K_\sigma d_\tau \alpha = \begin{cases} \{d_\tau \alpha\} & \text{if} \quad \sigma = \tau, \\ K_\sigma \tau \cup K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < \tau, \\ \phi & \text{if} \quad \tau < \sigma. \end{cases}$

6. $K_\sigma d\alpha = \begin{cases} K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < d\alpha, \\ \phi & \text{if} \quad d\alpha \leq \sigma. \end{cases}$

V. $\alpha < \beta$ for $\alpha, \beta \in O(I)$.

1. $0 \neq \alpha \Rightarrow 0 < \alpha$.

2. $m, n \geq 1$, $2 < m+n$ のとき.

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m < \beta_1 + \cdots + \beta_n \iff$ 2.1 or 2.2

2.1 $m < n$ & $\alpha_i = \beta_i$ for $1 \leq i \leq m$

2.2 $\exists k$ s.t. $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, $\alpha_k < \beta_\beta$ & $\alpha_i = \beta_i$ for $1 \leq i < k$.

3. $\omega^\alpha < \omega^\beta \iff \alpha < \beta$

4. $\alpha \in E$ について.

$\alpha < \omega^\beta \iff \alpha < \beta$

$\omega^\beta < \alpha \iff \beta < \alpha$

5. $\Omega_\alpha < \Omega_\beta \iff \alpha < \beta$

6. $d\alpha < \Omega_\beta \iff d\alpha < \beta$

$\Omega_\beta < d\alpha \iff \beta < d\alpha$

7. $\tau \in R_0$ について.

$\tau < d_\sigma\alpha \iff \tau \leq \sigma$

$d_\sigma\alpha < \tau \iff \sigma < \tau$

(つまり, $\sigma \in R_0$ について, $\sigma^+ \in R$ を.

1. $0^+ = \Omega_1$ $(1 := \omega^0)$ 2. $(\Omega_\alpha)^+ = \Omega_{\alpha+1}$

3. $(d\alpha)^+ = \Omega_{d\alpha+1}$.

として. $\sigma < d_\sigma\alpha < \sigma^+$.)

8. $I \neq \alpha \in \Xi \Rightarrow \alpha < I$.

9. $d\alpha < d\beta \iff$ 9.1 or 9.2

9.1 $K\alpha < d\beta$ & $\alpha < \beta$.

9.2 $d\alpha \leq K\beta$

但し. (有限)集合 $M, N \subseteq O(I)$ について.

$M < N :\iff \forall\alpha\in M\ \exists\beta\in N\ (\alpha<\beta)$

$M \leq N :\iff \exists\beta\in N\ \forall\alpha\in M\ (\alpha\leq\beta)$

また.

$M < \alpha :\iff M < \{\alpha\}$

$\alpha \leq N :\iff \{\alpha\} \leq N$.

10. $\sigma < \tau \Rightarrow d_\sigma\alpha < d_\tau\beta$.

11. $d_\sigma\alpha < d_\sigma\beta \iff$ 11.1 or 11.2

11.1 $K_\sigma\alpha < d_\sigma\beta$ & $d_\tau\alpha < d_\tau\beta$.

11.2 $d_\sigma\alpha \leq K_\sigma\beta$.

但し、11.1における τ と、$d_\tau\alpha, d_\tau\beta$ は次のように定義する：

$$\tau = \min\{\tau \in R : (\sigma < \tau \ \& \ K_\tau\alpha \cup K_\tau\beta \neq \phi) \text{ or } \tau = \max\{(S\alpha)^+, (S\beta)^+\}\}$$

（つまり、$\sigma < \tau \leq \max\{S\alpha, S\beta\}$ で $K_\tau\alpha \cup K_\tau\beta \neq \phi$ となる τ があれば、τ は min. such、さなくば、$\max\{(S\alpha)^+, (S\beta)^+\}$ ）

また、$S\alpha < \tau$ なる α, τ に対しては $d_\tau\alpha$ は α のこととする：

$d_\tau\alpha := \alpha$ if $S\alpha < \tau$.

同種の convention として、

$\omega^\alpha := \alpha$ for $\alpha \in E$; $\Omega_\alpha := \alpha$ for $\alpha \in F \cup \{0\}$

$d\alpha := \alpha$ for $\alpha < I$.

上の定義は well defined で、$(O(I), <)$ は全順序になる。

<u>Proposition 1.</u>

a) $K_\sigma \alpha < d_\sigma \alpha$ for $\sigma \leq S\alpha$

b) $K_\sigma \alpha = \phi$ $\quad S\alpha < \sigma$

c) $K_\sigma \alpha \leqq \alpha$ $\quad S\alpha = \sigma$

d) $K\alpha \leqq \alpha$ $\quad \alpha < I$

e) $K\alpha < d\alpha$ $\quad I \leqq \alpha$

f) $\alpha < \omega^\alpha$ $\quad \alpha \notin E$

g) $\alpha < \Omega_\alpha$ $\quad \alpha \notin F$ & $0 < \alpha < I$.

以下. $\sigma, \tau, \pi \in R_0$ とする.

<u>Definition</u> $\alpha, \beta < I$ について.

$\alpha \ll_\tau \beta \quad :\Longleftrightarrow \quad$ 1. $\alpha < \beta$, &

2. $K_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

<u>Lemma 2</u>

$\alpha \ll_\tau \beta \Rightarrow d_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

つねに. $K_\sigma \alpha \leqq d_\sigma \alpha$ は成立するから.

$\alpha < \beta \Rightarrow (\alpha \ll_\tau \beta \Longleftrightarrow \forall \sigma \geq \tau (d_\sigma \alpha < d_\sigma \beta))$.

Lemma 3

$$\alpha \ll_\tau \beta, \quad \pi \geq \tau \quad \Rightarrow \quad d_\pi \alpha \ll_\tau d_\pi \beta.$$

Lemma 4

$$\alpha \ll_\tau \beta, \quad \tau \leq \pi, \quad \pi^+ \underline{\ll}_\tau \beta \quad \Rightarrow \quad d_\pi \alpha \ll_\tau \beta.$$

但し $\alpha \underline{\ll}_\tau \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \alpha \ll_\tau \beta$ or $\alpha = \beta$.

Lemma 5

$$S\alpha = \sigma \quad \Rightarrow \quad \alpha \ll_\sigma d_\sigma \alpha.$$

Definition　一般の $\alpha, \beta \in O(I)$ について.

$\alpha \ll_\tau \beta \quad :\Leftrightarrow \quad 1 \;\&\; 2 \;\&\; 3$

1. $\alpha < \beta$　　2. $K\alpha < d\beta$　　3. $K_\sigma \alpha < d_\sigma d\beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

$K\alpha \leq \alpha$ に注意すると、前の定義の $\alpha \ll_\tau \beta$ と、この $\alpha \ll_\tau \beta$ は、$\alpha, \beta < I$ について一致する.

Lemma 6.

$$\alpha \ll_\tau \beta \quad \Rightarrow \quad d\alpha \ll_\tau d\beta$$

<u>Definition</u> $\alpha \ll \beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha \ll_0 \beta$.

<u>Lemma 7</u> $\alpha < I \leq \eta \;\&\; \alpha \ll \eta \;\Rightarrow\; \Omega_\alpha \ll \eta$.

<u>Lemma 8</u> $K_\sigma \alpha < d_\sigma d_\sigma$

<u>Lemma 9</u> a) $\alpha \ll \alpha \# \beta$ for $\beta \neq 0$

b) $\alpha \ll \omega^\alpha$ for $\alpha \in \Xi$.

ここに、$\alpha \# \beta$ は α と β の natural sum を表わす。

<u>Lemma 10</u> a) $\alpha \ll_\tau \gamma,\; \beta \ll_\tau \gamma \;\&\; \alpha \# \beta < \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \# \beta \ll_\tau \gamma$

b) $\alpha \ll_\tau \gamma \;\&\; \omega^\alpha < \gamma \;\Rightarrow\; \omega^\alpha \ll_\tau \gamma$.

<u>Lemma 11</u> a) $\alpha \ll_\tau \beta \;\&\; \gamma \underline{\ll}_\tau \delta \;\Rightarrow\; \alpha \# \gamma \ll_\tau \beta \# \delta$.

b) $\alpha \ll_\tau \beta \;\Rightarrow\; \omega^\alpha \ll_\tau \omega^\beta$.

<u>Lemma 12</u> a) $0 \leq \beta < I \;\Rightarrow\; \beta \underline{\ll} \Omega_\beta$

b) $\alpha \ll_\tau \beta < I \;\Rightarrow\; \Omega_\alpha \ll_\tau \Omega_\beta$

<u>Lemma 13</u> $\alpha < \beta < I \;\Rightarrow\; \alpha \ll_{S\beta} \beta$.

<u>Definition</u> H (Herleitungsterme)

1つの variable u について、H と、各 $t \in H$ について $D(t)$ を定義する：

1. $u \in H$; $D(u) = O(I)$.

2. $t \in H \;\&\; s \in H \cup O(I) \;\Rightarrow\; t \# s \in H$;

$$D(t \# s) = \begin{cases} D(t) \cap D(s) & \text{if } s \in H \\ D(t) & \text{if } s \in O(I) \end{cases}$$

3. $t \in H \Rightarrow \omega^t \in H$; $D(\omega^t) = D(t)$.

4. $t \in H$ & $\sigma \in R_0 \Rightarrow d_\sigma t \in H$;

$D(d_\sigma t) = \{\alpha \in D(t);\ s\alpha \leq \sigma$ & $t[\alpha] < I\}$.

但し、$t \in H$ について、$t[\alpha]$ は、$t[\alpha/u]$ のこと。つまり、t の中の u の occurrences すべてに α を代入したもの。$t[\alpha] \in O(I)$ となる。

5. $t \in H \Rightarrow \Omega t \in H$; $D(\Omega t) = \{\alpha \in D(t);\ t[\alpha] < I\}$

6. $t \in H \Rightarrow dt \in H$; $D(dt) = \{\alpha \in D(t);\ \alpha < I\}$.

Definition $\alpha \ll_I \beta \ :\Leftrightarrow\ \alpha < \beta$.

Lemma 14 $t \in H$.

$\alpha, \beta \in D(t)$ & $\alpha < \beta \Rightarrow t[\alpha] \ll_{s\beta} t[\beta]$.

Lemma 15 $t \in H$.

a) $\alpha < \beta \in D(t) \Rightarrow \alpha \in D(t)$.

b) $\alpha \in D(t) \Rightarrow \alpha \underline{\ll} t[\alpha]$.

Lemma 16 $t \in H$, $\alpha < \beta \in D(t)$.

a) $Kt[\alpha] \leq Kt[\beta] \cup K\alpha$.

b) $K_\sigma t[\alpha] \leq K_\sigma t[\beta] \cup K_\sigma \alpha$ for $^\forall \sigma \in R_0$.

Lemma 17 $t \in H$, $\alpha < \beta \in D(t)$.

$\alpha \ll \gamma$ & $t[\beta] \underline{\ll} \gamma \Rightarrow t[\alpha] \ll \gamma$.

<u>Lemma 18</u> $t \in H$, $\alpha < \beta \in D(t)$

a) $t[\alpha] \ll t[\beta] \# \alpha$.

b) $\alpha \ll t[\beta] \Rightarrow t[\alpha] \ll t[\beta]$.

<u>Lemma 19</u> $\sigma^+ \in D(t)$, $t[\sigma^+] < I$ なら.

$\alpha \ll t[\sigma^+] \Rightarrow t[d_\sigma \alpha] \ll t[\sigma^+]$.

§2. A Second Order Logic Calculus SBL.

L を 二階 の 言語 で、L には 述語定数 はないものとし、L の free (2nd order) variables を U, V, … で、bound var. を X, Y, … で 表す。(すべて unary) 二階 の 論理計算 SBL を Tait 流に書くと次のようになる:

Axiom: $\neg A, A$ (A は prime formula)

($\wedge$), ($\vee$), ($\forall x$), ($\exists x$) (first order の $\forall, \exists$ の導入), (cut) は ふつう どおり。

(weak) $\dfrac{\Gamma}{\Delta}$, $\Gamma \subseteq \Delta$.

$$\frac{\Gamma, F(U)}{\Gamma, \forall X F} \qquad \frac{\Gamma, F(U)}{\Gamma, \exists X F}$$

U は eigenvariable

(BI) $\dfrac{\Gamma,\ F(A)}{\Gamma,\ \exists X F}$ $\exists X F$ は isolated, A は任意の formula (unary abstract)

(Π^1_2-Sep) $\dfrac{\Gamma,\ A \subseteq B}{\Gamma,\ \exists X (A \subseteq X \subseteq B)}$ $A \in \Pi^1_2$, $B \in \Sigma^1_2$

<u>Definition</u> of Π^1_2, Σ^1_2.

1. prime formulae $\subseteq \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$
2. $A \overset{\wedge}{\vee} B \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2] \iff A, B \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$.
3. $\overset{\forall}{\exists} x A \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2] \iff A \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$.
4. $\forall X A \in \Pi^1_2 \iff A \in \Pi^1_2$

   $\exists X A \in \Sigma^1_2 \iff A \in \Sigma^1_2$

   $\forall X A \in \Sigma^1_2 \iff A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$ かつ、一番外の $\forall X$ が他の $\exists Y$, $\forall Y$ に affect しないとき。

   $\exists X A \in \Pi^1_2 \iff A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$ かつ 一番外の $\exists X$ が 他の $\forall Y$, $\exists Y$ に affect しないとき。

よって、

$A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2 \iff A$ は isolated.

<u>Definition</u> $\forall X\ [\exists X]$ の formula A における ある occurrence が <u>ausgezeichnet</u> とは、それで始まる subformula $\forall X F\ [\exists X F]$ が $\Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$ で かつ、その $\forall X\ [\exists X]$ が他の $\forall Y$, $\exists Y$ に affect しないこと。

§3. Stratified System SBL′.

Lに対し、stratified（独：geschichtet）language L′をつくる。
L′には、2^{nd} order var. として、次のものがある：

free unstratified $V, V, \cdots$;

stratified $V^\alpha, V^\alpha, \cdots$; $\alpha < I$ $(\alpha \in O(I))$

bound unstratified $X, Y, \cdots$;

stratified $X^\eta, Y^\eta, \cdots$; $\eta \leq I$ なる limit η.

V^α, X^η の α, η を index という。

(SB)L′の formula は、Lでの formula A から次のようにして得られるもののみ：

1. Aの中のいくつかの free var. V に V^α を代入。ここに、V の occurrences すべてに同一の index α を用いる。
2. Aの中のすべての nicht ausgezeichnet な $\forall X$, $\exists X$ に同一の $\eta \leq I$ による $\forall X^\eta$, $\exists X^\eta$ を代入。

<u>Definition</u> 1. L′の formula A′が Π'_2 $[\Sigma'_2]$:⟺
A′の中のすべての index を取り去ったLの formula Aが Π^1_2 $[\Sigma^1_2]$.

2. L′の formula A が <u>klein</u> :⟺ Aに $\forall X^I$ が occur しない。

3. L′の formula A が <u>stratified</u> :⟺ Aの中のすべての free var. が stratified, i.e., index がついている、かつ、$\forall X^I$, $\exists X^I$ は occur しない。

stratified A について. $A \in \Pi'_2$ なら $st_\Pi(A)$ を, $A \in \Sigma'_2$ なら $st_\Sigma(A)$ を定義する: $\Lambda = \Pi, \Sigma$ として.

1. $st_\Lambda(U^d(t)) := st_\Lambda(\neg U^d(t)) := \Omega_d$.

2. $st_\Lambda(A \overset{\wedge}{\vee} B) := \max\{st_\Lambda(A), st_\Lambda(B)\}$.

3. $st_\Lambda(\overset{\forall}{\exists} x A) := st_\Lambda(A)$.

4. $st_\Pi(\forall X A) := st_\Pi(A)$; $st_\Sigma(\exists X A) := st_\Sigma(A)$;

   $st_\Pi(\exists X A) := st_\Sigma(A)^+$; $st_\Sigma(\forall X A) := st_\Pi(A)^+$

5. $st_\Pi(\forall X^\eta A) := \max\{\Omega_\eta, st_\Pi(A)\}$;

   $st_\Sigma(\exists X^\eta A) := \max\{\Omega_\eta, st_\Sigma(A)\}$.

SBL′ の公理と推論図.

Axiom: $\neg A, A$ 　ここに, A に $\forall X^I, \exists X^I$ は occur しない, i.e., $Gr(A)=0$.

$(\wedge)$, $(\vee)$, $(\forall x)$, $(\exists x)$, (cut), (weak) は SBL と同じ.

<u>Definition</u> formula A の I-Grad $Gr(A)$ と Grad $gr(A)$.

1. $Gr(A) = 0$ if A に $\forall X^I, \exists X^I$ が occur しない.

以下, $\forall^I$ か $\exists^I$ が occur する formula について.

2. $Gr(A \overset{\wedge}{\vee} B) = \max\{Gr(A), Gr(B)\} + 1$.

3. $Gr(\overset{\forall}{\exists} x A) = Gr(A) + 1$.

4. $Gr(\overset{\forall}{\exists} X A) = 1$

5. $Gr(\overset{\forall}{\exists} X^I A) = \max\{1, Gr(A)\} + 1$.

1. $gr(A) = 0$ if A は mine か $\forall XF, \exists XF$ の形。

2. $gr(A \overset{\wedge}{\vee} B) = \max\{gr(A), gr(B)\} + 1$ 3. $gr(\overset{\forall}{\exists} x A) = gr(A) + 1$.

4. $gr(\overset{\forall}{\exists} X^{\eta} A) = gr(A) + 1$.

SBL′ の推論図の続き.

kritisch : $$\frac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \exists X^{\eta} F}$$

ここに. 1) χ は空 (つまり U^{χ} は unstratified U), か.

2) χ はある $\alpha \in O(I)$ で, $\alpha < \eta$.

ausgezeichnet : $$\frac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \exists X F} \qquad \frac{\Gamma,\ A \subseteq B}{\Gamma,\ \exists X (A \subseteq X \subseteq B)}$$

ここに、 F と $A \subseteq B$ には、ともに $\exists Y^{I}$ が occur, つまり.

$Gr(F) \neq 0$, $Gr(A \subseteq B) \neq 0$. (χ は空は. ある $\alpha \in O(I)$).

stark : $$\frac{\Gamma,\ F(U)}{\Gamma,\ \forall X F} \qquad \frac{\Gamma,\ F(U)}{\Gamma,\ \forall X^{\eta} F}$$

Typ I Typ η

$Gr(F) \neq 0$

schwach : $(\forall X)$ $$\frac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \forall X F}$$ ここに. 0) $Gr(F) = 0$, かつ.

1) F が stratified で $st_{\pi}(\forall XF) = \Omega\mu$ なら χ は μ, かつ

2) $\forall XF \notin \Sigma^{1}_{2}$ なら $\forall XF$ は stratified.

(BI) $\dfrac{\Gamma,\ F(A)}{\Gamma,\ \exists x F}$ $\exists x F \notin \Pi^1_2$ なら $\exists x F$は stratified.

Stufe σ の substitution ($\sigma \in R_0$) : $\sigma = \Omega_\mu$ として、

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma(\bigcup^{\mu}_{A})}$ ここに、$\forall B \in \Gamma\ (St_\pi(B) \leq \sigma)$.

$\forall^I$- Reduktion von Typ η ($\eta < I$) :

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma'}$ ここに、Γ'は、Γの中のいくつかのformulaeの $\forall^I$を$\forall^\eta$でおきかえたもので、かつ、次をみたす: $\forall A \in \Gamma$ (Aか$\neg A$は klein).

$\exists^I$- Reduktion von Typ η ($\eta < I$) :

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma'}$ ここに Γ'は、Γの中のいくつかのformulaeの $\exists^I$を$\exists^\eta$でおきかえたもので、かつ、次をみたす: $\forall A \in \Gamma$ (Aは klein)

SBL'の証明図は、上の公理・推論図からなる木で、以下に述べる条件をみたし、さらに、あとで定義する'順序数'のはりつけが可能なもののみをいう:

1. 終式は first order formulae よりなり、しかも、その中の free var. の index はすべて 0 (がくっついている) で;
2. 証明図の最後に、空な substitution von Stufe 0 があり;

3. substitution は end-piece 内にしかなく;

4. $\exists^2$-Red の下に、unstratified な free var. はなく;

5. 次に定義する Sequenz の Höhe について、Δ が $\exists^2$-Red, $\forall^2$-Red の下式なら、 $h(\Delta) \leq \omega$ でなければならない。

<u>Definition</u> SBL′ の'証明図'の Sequenz Γ の Höhe $<\omega^2$:

1. $h(\Gamma) = 0$ ，Γ は 終式 か substitution の上式

2. $h(\Gamma) = \omega$ ，Γ は $\exists^2$-Red, $\forall^2$-Red の上式。

3. $h(\Gamma) = \max\{h(\Delta), \omega\cdot Gr(D) + gr(D)\}$,

$\dfrac{\Gamma \quad (\Gamma')}{\Delta}$ は、 3.1. (cut) で D は cut formula;

または 3.2 (BI) $\dfrac{F(A), \Gamma_0}{\exists X F, \Gamma_0}$ で

D は F(A).

4. $h(\Gamma) = h(\Delta)$ ， $\dfrac{\Gamma \quad (\Gamma')}{\Delta}$ は 1, 2, 3 以外。

ordinal diagram $\in O(I)$ に free var. $U, V, \cdots; U^+, V^+, \cdots$ の occurrences を許した記号列を、SBL′ の'証明図' P の各 Schlußstrich J と各 Sequenz Γ にはりつける。

1. $O(\text{Axiom}) = IS + 1$.

ここに、IS は、その Axiom より下にある eigenvariables $\upsilon, \vee, \cdots, \upsilon^{*}, \vee^{*}, \cdots$ 全部を # で結んだもの。

$$J \quad \frac{\Gamma \qquad (\Gamma')}{\Delta}$$

J が、

2. (weak), substitution : $o(J) = o(\Gamma)$.

3. $(\vee)$, $(\forall x)$, $(\exists x)$, schwach $(\forall X)$, kritisch : $o(J)=o(\Gamma)\#1$.

4. $(\wedge)$: $o(J) = o(\Gamma) \# o(\Gamma')$

5. (cut) : 5.1 $h(\Gamma) \geq \omega$ かつ Gr (cut formula) $\neq 0$ のとき、

$$o(J) = I \# o(\Gamma) \# o(\Gamma').$$

5.2 o.w. $o(J) = o(\Gamma) \# o(\Gamma')$.

6. $\forall^{I}$-Red von Typ η : $o(J) = o(\Gamma) \# \eta$.

7. $\exists^{I}$-Red von Typ η : $o(J) = o(\Gamma) \# \eta$.

但し、$\gamma = o(\Gamma)$ について、$d\gamma \leq \eta$ となっているときのみ、$\exists^{I}$-Red が適用できる。

8. ausgezeichnet : $o(J) = o(\Gamma) \# I$.

9. stark von Typ η : $\gamma = o(\Gamma)$ として、

$$o(J) = \gamma[\eta/\upsilon]$$

υ は J の eigenvar. で、$\gamma[\eta/\upsilon]$ は γ の中のすべての υ の occ. に η を代入したもの。

10. (BI) : $o(J) = o(\Gamma) \# st_\Sigma(\exists X F)^+ \# I \cdot k$.

(BI) $\Gamma = \dfrac{\Gamma_0,\ F(A)}{\Gamma_0,\ \exists X F}$ として.

ここに、$\exists X F$ が *stratified* でないときには、

$st_\Sigma(\exists X F)^+ := I$ とおく。 また、$k = 0, 1$ は、

$$k = \begin{cases} 1 & ,\ h(\Gamma) \geq \omega \text{ かつ } Gr(F(A)) \neq 0, \\ 0 & ,\ o.w. \end{cases}$$

11. *substitution von Stufe* σ : $o(\Delta) = d_\sigma \gamma$

但し、$\gamma = o(J) = o(\Gamma)$.

12. 11. 以外のとき、 $\gamma = o(J)$ として、

12.1 $h(\Gamma) = \omega \cdot m + k$, $h(\Delta) < \omega$, $m \neq 0$ のとき.

$o(\Delta) = d(\omega_{m-1}(\gamma))$.

12.2 $h(\Gamma) = \omega \cdot m + k$, $h(\Delta) = \omega \cdot n + l$, $n \neq 0$ のとき.

$o(\Delta) = \omega_{m-n}(\gamma)$

12.3 $h(\Gamma) = k$, $h(\Delta) = l$ のとき.

$o(\Delta) = \omega_{k-l}(\gamma)$

$(\ \omega_0(\gamma) := \gamma\ ;\ \omega_{n+1}(\gamma) = \omega^{\omega_n(\gamma)}\ )$

として.

13. $o(P) = o(P$ の 終式$)$

とする.

<u>Main Lemma</u> SBL′の証明図Pが(cut)を含めば、SBL′の証明図P_0、P_1がつくれて、

1) Pの終式は、P_0、P_1の終式からcut freeに証明でき、

2) $o(P_0)$、$o(P_1) \ll o(P)$、

3) 証明図がP_0、P_1に分れるのは、explicitな(∧)を下げるときのみ。

<u>Theorem</u> ($PRWO((O(I), <))$ のもとで)

SBLでcut-eliminationが成立する。

以下、Main Lemmaの証明の方針を述べる。

§4. Main Lemmaの証明(の概略)

M1. end-piece内のexplicit logical inferenceを下げる.

M2. end-piece内のimplicit axiomの消去.

M3. suitable cutのcut formulaが$\exists XF$の形で、$G_r(\exists XF) \neq 0$のとき.

(イ) Pが次の形のとき.

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{\Delta_0, \neg F(U)}{\Delta_0, \forall X \neg F} & & \dfrac{G, \Gamma_0}{\exists X F, \Gamma_0} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha \quad \Delta, \forall X \neg F & & \exists X F, \Gamma \quad \beta
\end{array}
\qquad
\begin{cases} G = (A \subseteq B) \\ F = (A \subseteq X \subseteq B) \end{cases}
$$

または、 $G = F(U_1^{\alpha_0})$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\Delta, \forall X \neg F \qquad \exists X F, \Gamma}{\Delta, \Gamma} \\
\vdots \\
\Pi \quad \lambda \\
\hline
\vdots \\
\hline
\Phi \quad d\sigma \\
\vdots
\end{array}
$$

Φ は Δ, Γ の下で初めて Höhe $< \omega$ となるところ。Π は Δ, Γ と Φ の間にある $\exists^I$-Red のうち一番上にあるものの上式。（そのような $\exists^I$-Red がないときは、次の(12)になる）。

P_0 :

$$
\begin{array}{cccc}
 & \vdots & \vdots & \\
 & \dfrac{\Delta, \forall X \neg F \quad \alpha}{\Delta, \Gamma, \forall X \neg F} & \dfrac{\exists X F, \Gamma \quad \beta}{\exists X F, \Delta, \Gamma} & \\
 & \vdots & \vdots & \\
\forall^I\text{-Red von Typ } \eta & \dfrac{\Pi, \forall X \neg F \quad \lambda_0}{\Pi, \forall X \neg F' \quad \lambda_0 \# \eta} & \dfrac{\exists X F, \Pi \quad \lambda_1}{\exists X F', \Pi \quad \lambda_1 \# \eta} & \exists^I\text{-Red von Typ } \eta := d\lambda_1 \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & \Phi, \forall X \neg F' \quad d\sigma_0 & \exists X F', \Phi \quad d\sigma_1 & \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\Phi} \\
\multicolumn{4}{c}{\vdots}
\end{array}
$$

$\lambda_0 \# I, \lambda_1 \# I \ll \lambda$ より $\lambda_0 \# \eta, \lambda_1 \# \eta \ll \lambda$.

$d(\lambda_0 \# \eta), d(\lambda_1 \# \eta) < d(\lambda)$ ，よって $\Pi, \forall X \neg F'$; $\exists X F', \Pi$ にもとと同じ Typ の $\exists^I$-Red をほどこせる。 $\sigma_0, \sigma_1 \ll \sigma$, $I \leq \sigma$ より $d\sigma \in \mathbb{E}$ から、 $\omega_n(d\sigma_0 \# d\sigma_1) \ll d\sigma$ for $\forall n < \omega$.

(ロ)　(イ) の Π がないとき.

$$P_0:\quad
\begin{array}{ll}
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Delta,\ \forall X\neg F}{\Delta,\ \Gamma,\ \forall X\neg F}\ \alpha\\
\vdots\\
\forall^{I}\text{-Red}\ \dfrac{\Phi,\ \forall X\neg F\quad \delta_0}{\Phi,\ \forall X\neg F'\quad d(\delta_0\#\eta)}\\
\text{von Typ }\eta
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\exists XF,\ \Gamma}{\exists XF,\ \Delta,\ \Gamma}\ \beta\\
\vdots\\
\dfrac{\exists XF,\ \Phi\quad \delta_1}{\exists XF',\ \Phi\quad d(\delta_1\#\eta)}\ \exists^{I}\text{-Red von Typ }\eta := d\delta_1
\end{array}
\end{array}$$

$$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\Phi}$$
$$\vdots$$

以下、M4−6で、*ausgezeichnet*, または *kritisch* で X の Hauptformel の Gr ≠ 0 のもので、$\exists^{I}$-Red を permute し、M7−8で stark von Typ I と $\forall^{I}$-Red を permute する。

M4.　P が次の形のとき　($Gr(\exists XF')=0$)

$$P:\quad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{A\subseteq B,\ \Gamma_0\quad \gamma}{\exists XF,\ \Gamma_0\quad \gamma\#I}\\
\vdots\\
\exists^{I}\text{-Red}\ \dfrac{\exists XF,\ \Gamma\quad \delta}{\exists XF',\ \Gamma'}\\
\vdots
\end{array}
\qquad \text{von Typ }\eta.\quad d\delta\le\eta.$$

$$P_0:\quad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{A\subseteq B,\ \Gamma_0\quad \gamma}{\exists XF,\ A\subseteq B,\ \Gamma_0}\\
\vdots\\
\dfrac{\overset{4}{A'\subseteq A'}\qquad \dfrac{\exists XF,\ A\subseteq B,\ \Gamma\quad \delta_0}{\exists XF',\ A'\subseteq B',\ \Gamma'}}{(BI)\ \dfrac{\exists XF',\ F'(A'),\ \Gamma'}{\exists XF',\ \Gamma'}}\\
\vdots
\end{array}$$

$F=(A\subseteq X\subseteq B)$

まず、　$\delta_0\#I <\le \delta$.

$\sigma = \Omega_\mu \geq \mathrm{stz}(\exists XF')$　とおく.

(イ) $l(\exists x F', \Gamma') = \omega$ のとき。

$o(\exists x F', \Gamma'; P) = \sigma \# \eta$

$o(\exists x F', \Gamma'; P_0) = 4 \# \sigma_0 \# \eta \# \sigma^+$.

$\sigma_0 \# I \ll \sigma$ より $4 \# \sigma_0 \# \eta \# \sigma^+ < \sigma \# \eta$.

$4, \sigma_0, \eta \ll \sigma \# \eta$ は明らか。

μ は η か、F に occur する ある U^α と ある $k < \omega$ について $\alpha + k$ のいずれか。 $\eta \ll \sigma \# \eta$ と、$\alpha \ll \lambda \ll \sigma$ ($A \leq B, \Gamma_0$ の上に Axiom が1つはある) より $\mu \ll \sigma \# \eta$.

$I \leq \sigma$ と Lemma 7 より $\sigma^+ = \Omega_{\mu+1} \ll \sigma \# \eta$.

(ロ) $l(\exists x F', \Gamma') < \omega$ のとき。

$o(\exists x F', \Gamma'; P) = d(\sigma \# \eta)$

$o(\exists x F', \Gamma'; P_0) = \omega_m(4 \# d(\sigma_0 \# \eta) \# \sigma^+)$

(イ)と同様。$d(\sigma \# \eta) \in E$ に注意。

M5. P が次の形のとき ($Gr(\exists x F') = 0$)

$$P: \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{F(U^\alpha), \Gamma_0}{\exists x F, \Gamma_0} \\ \vdots \\ \exists^I\text{-Red}\ \dfrac{\exists x F, \Gamma}{\exists x F', \Gamma'} \\ \vdots \end{array} \qquad P_0: \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{F(U^\alpha), \Gamma_0}{\exists x F, F(U^\alpha), \Gamma_0} \\ \vdots \\ \dfrac{\exists x F, F(U^\alpha), \Gamma_0}{\exists x F', F'(U^\alpha), \Gamma'} \\ (BI)\ \dfrac{\exists x F', F'(U^\alpha), \Gamma'}{\exists x F', \Gamma'} \\ \vdots \end{array}$$

M4と同様。

M6. P が次の形のとき、

$$P: \quad \begin{array}{ll} & \vdots \\ & \dfrac{F(U^+),\ \Gamma_0}{\exists X^I F,\ \Gamma_0} \quad \begin{array}{l}\gamma \\ \gamma \# 1\end{array} \\ & \vdots \\ \begin{array}{l}\exists^2\text{-Red} \\ \text{von Typ } \eta, \\ d\delta \le \eta\end{array} & \dfrac{\exists X^I F,\ \Gamma}{\exists X^\eta F',\ \Gamma'} \quad \delta \\ & \vdots \end{array} \qquad P_0: \quad \begin{array}{l} \vdots \\ \dfrac{F(U^+),\ \Gamma_0}{\exists X^I F, F(U^+), \Gamma_0} \quad \gamma \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\exists X^2 F, F(U^+), \Gamma}{\exists X^\eta F', F'(U^+), \Gamma'} \quad \delta_0}{\exists X^\eta F',\ \Gamma'} \\ \vdots \end{array}$$

$\gamma \ll \delta$ より $\gamma < d\delta \le \eta$. $\gamma < \eta$.

M7. stark von Typ I と $\forall^2$-Red を permute. その1.

$$P: \quad \begin{array}{ll} & \vdots \\ & \dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0, \forall X F} \quad \begin{array}{l}\gamma[U] \\ \gamma[I]\end{array} \\ & \vdots \\ \begin{array}{l}\forall^2\text{-Red} \\ \text{von Typ } \eta\end{array} & \dfrac{\Gamma,\ \forall X F}{\Gamma',\ \forall X F'} \quad \delta[I] \\ & \vdots \end{array} \qquad P_0: \quad \begin{array}{l} \vdots \\ \dfrac{\Gamma_0, F(U^\mu)}{\Gamma_0, F(U^\mu), \forall X F} \quad \begin{array}{l}\gamma' \le\le \gamma[U^\mu] \\ = \gamma[\mu]\end{array} \\ \vdots \\ \text{schwach}\ \dfrac{\dfrac{\Gamma, F(U^\mu), \forall X F}{\Gamma', F'(U^\mu), \forall X F'} \quad \delta' \le\le \delta[\mu]}{\Gamma',\ \forall X F'} \\ \vdots \end{array}$$

$Gr(\forall X F) \neq 0$.

ここに、μ は、$\sigma = \Omega_\mu = st_\pi(\forall X F')$.

$o(\Gamma', \forall X F'; P_0) \ll o(\Gamma', \forall X F'; P)$ には、

$\delta[\mu] \# \eta \# 1 \ll \delta[I] \# \eta$ を示せば十分。

$\delta[\mu] \# \eta \# 1 < \delta[I] \# \eta$. μ は η か F に occur する ある U^+ と ある $k < \omega$ について $\gamma + k$. $\eta \ll \delta[I] \# \eta$ と

$\gamma \ll \delta[I]$ より $\mu \ll \delta[I] \# \eta$. $I \in D(\delta[\cdot])$

より Lemma 17 から $\delta[\mu] \ll \delta[I] \# \eta$.

M 8. その2

$$
P:\quad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0,\ \forall X^I F}\quad
\begin{array}{l}\gamma[U]\\ \gamma[I]\end{array}\\
\vdots\\
\begin{array}{l}\forall^2\text{-Rel}\\ \text{vom Typ }\eta\end{array}\quad
\dfrac{\Gamma,\ \forall X^I F}{\Gamma',\ \forall X^\eta F'}\quad \delta[I]\\
\vdots
\end{array}
\qquad\qquad
P_0:\quad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0,\ F(U),\ \forall X^I F}\quad \gamma[U]\\
\vdots\\
\dfrac{\Gamma,\ F(U),\ \forall X^I F}{\Gamma',\ F'(U),\ \forall X^\eta F'}\quad \delta[U]\\
\begin{array}{l}\text{stark vom}\\ \text{Typ }\eta.\end{array}\quad
\dfrac{}{\Gamma',\ \forall X^\eta F'}\\
\vdots
\end{array}
$$

M7と同様にして、 $\delta[\eta]\#\eta \ll \delta[I]\#\eta$.

M9. $\eta \leq I$ について Pが次の形のとき、

$$
P:\quad
\dfrac{
\begin{array}{c}
\vdots\\
\begin{array}{l}\gamma[U_1]\\ \gamma[\eta]\end{array}\quad
\dfrac{\Delta_0,\ \neg F(U_1)}{\Delta_0,\ \forall X^\eta \neg F}\\
\mathfrak{F}\ \vdots\\
\Delta,\ \forall X^\eta \neg F
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{F(U^\delta),\ \Gamma_0}{\exists X^\eta F,\ \Gamma_0}\quad
\begin{array}{l}\beta\qquad ,\ \delta<\eta\\ \beta\#1\end{array}\\
\vdots\\
\exists X^\eta F,\ \Gamma
\end{array}
}{\Delta,\ \Gamma}\quad \sigma=\sigma[\eta]
$$

$$
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{}{\Pi}\ \lambda\\
\vdots
\end{array}
$$

Πは、Δ, Γの下で初めてHöhe $< h(\Delta,\ \forall X^\eta \neg F)$となるところ。$\mathfrak{F}$は$\Delta_0, \forall X^\eta \neg F$から$\Delta,\ \forall X^\eta \neg F$へ至る*fibre*の部分。

P_0:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta_0,\ \neg F(U^\alpha) \quad \gamma' \ll \gamma[\alpha]}{\Delta_0,\ \neg F(U^\alpha),\ \forall X^\eta \neg F}}{\vdots}\ \ \Delta,\ \neg F(U^\alpha),\ \forall X^\eta \neg F \quad \exists X^\eta F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma,\ \neg F(U^\alpha)}\ \sigma_1 \qquad \dfrac{\Delta,\ \forall X^\eta \neg F \quad \dfrac{\dfrac{F(U^\alpha),\ \Gamma_0 \quad \beta}{\exists X^\eta F,\ F(U^\alpha),\ \Gamma_0}}{\vdots}\ \ \exists X^\eta F,\ F(U^\alpha),\ \Gamma}{F(U^\alpha),\ \Delta,\ \Gamma}\ \sigma_2}{\lambda_1 \quad \dfrac{\vdots}{\Pi,\ \neg F(U^\alpha)} \qquad \dfrac{\vdots}{F(U^\alpha),\ \Pi} \quad \lambda_2}
$$

$$
\dfrac{\Pi,\ \neg F(U^\alpha) \qquad F(U^\alpha),\ \Pi}{\Pi} \quad \lambda'
$$

$\vdots$

。$\eta < I$ のときに、P_0 が SBL′ の証明図になっていることについて。

i) $\mathfrak{P}$ の substitution について。

$\alpha < \eta$: limit より、$st_\pi(\neg F(U^\alpha)) \le st_\pi(\forall X^\eta \neg F)$.

ii) $\mathfrak{P}$ の $\exists^2$-Red J について。

$J \quad \dfrac{\Phi}{\Phi'} \quad \begin{matrix}\Theta = \Theta[\eta] \\ \Theta \# \nu,\ d(\Theta \# \nu).\end{matrix}$, $d\Theta \le \nu$ として。

対応する P_0 での $\exists^2$-Red を

$\dfrac{\neg F(U^\alpha),\ \Phi}{\neg F(U^\alpha),\ \Phi'} \quad \Theta'$ とおくと。$\Theta' \ll \Theta[\alpha]$ で。

J と $\Delta_0, \forall X^\eta \neg F$ の間に sub. von Stufe σ があったとしても、$\eta \le \Omega_\eta \le st_\pi(\forall X^\eta \neg F) \le \sigma$ より。

$S\eta \le \eta$、$\eta \in D(\Theta[\cdot])$。$\alpha < \eta < I$ より

$d\Theta[\alpha] < d\Theta[\eta] = d\Theta \le \nu$ ∴ $d\Theta' < \nu$. よって同じ Typ の $\exists^2$-Red をほどこせる。$\sigma_1 \ll \sigma$ には、$\eta \in D(\sigma[\cdot])$ と Lemma 18 によればよい。

M10. P が次の形のとき。

$$P:\quad \cfrac{\cfrac{\beta\ \dfrac{\vdots}{\Delta_0,\ \neg F(U^{\mu})}}{\beta\#1\ \Delta_0,\ \forall X \neg F} \quad \cfrac{\vdots}{\dfrac{F(A),\ \Gamma_0\ \alpha}{\exists X F,\ \Gamma_0}}}{}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Delta,\ \forall X \neg F\end{matrix} \qquad \exists X F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma}$$

$$\begin{matrix}\vdots \\ I > \nu\ \ \underline{\Pi} \\ \vdots\end{matrix}$$

Π は Δ, Γ の下で Stufe ≤σ な ∃sub. のうち一番下にあるものの上式。 $\sigma = \Omega_{\mu} = st_{\Pi}(\forall X \neg F)$.

$st_{\Pi}(\neg F(U^{\mu})) = st_{\Pi}(\forall X \neg F)$

$\exists X F \in \Pi_2 \Rightarrow st_{\Pi}(\exists X F) \geq \sigma^{+}$

P_0:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Delta_0,\ \neg F(U^{\mu})\end{matrix}}{\Delta_0,\ \neg F(U^{\mu}),\ \forall X \neg F}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Delta,\ \neg F(U^{\mu}),\ \forall X \neg F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \exists X F,\ \Gamma\end{matrix}}{\Delta,\ \Gamma,\ \neg F(U^{\mu})}$$

$$\vdots$$

Stufe σ の substitution

$$\dfrac{\cfrac{\theta\ \ \Pi,\ \neg F(U^{\mu})}{d_{\sigma}\theta\ \ \Pi,\ \neg F(A)} \qquad F(A),\ \Gamma_0\ \ \alpha}{\dfrac{\Gamma_0,\ \Pi}{\exists X F,\ \Gamma_0,\ \Pi}}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Delta,\ \forall X \neg F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \exists X F,\ \Gamma,\ \Pi\end{matrix}}{\Delta,\ \Gamma,\ \Pi}$$

$$\begin{matrix}\vdots \\ \nu'\ \ \underline{\Pi} \\ \vdots\end{matrix}$$

M11. suitable cut の cut formula が $A \wedge B$ の形のとき。

M12. suitable cut の cut formula が $\forall x A$ の形のとき。

This completes the proof of Main Lemma.