数理解析研究所講究録
670巻 1988年 258-275

半順序集合の上の層と群の表現

岡山大・教育　成瀬　弘（Hiroshi Naruse）

ここでは半順序集合の上の層について、群の表現の観点から Ronan-Smith の論文[5] を中心に解説を試みたい。組合せ論的、あるいは可換環論的観点からのアプローチについては、Baclawski [1], Yuzvinsky [9] などを参照されたい。

§1. 半順序集合の上の層と(コ)ホモロジー

1.1 半順序集合の上の層

Xを半順序集合（以下 poset と略して言う）とした時、自然にこれを圏とみなすことができる。すなわちXの元を対象とし、射を $x \longrightarrow y \Leftrightarrow x \leqq y$ で定める。$\mathcal{C}$を圏とした時、Xから$\mathcal{C}$への共変関手$\mathcal{F}$を、$\mathcal{C}$に値をもつX上の層という。つまり、各$x \in X$ に対し $\mathcal{C}$の対象$\mathcal{F}(x)$が対応し、各 $x \leqq y$ に対して $\rho_{xy} : \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(y)$ なる $\mathcal{C}$の射があって、① $\rho_{xx} = id_{\mathcal{F}(x)}$（恒等射）② $x \leqq y \leqq z$ のとき $\rho_{yz} \circ \rho_{xy} = \rho_{xz}$ が成立することである。$\mathcal{F}(x)$

をx上の$\mathcal{F}$のstalk（茎）という。$\mathcal{C}$に値をもつX上の層の全体は、関手の自然変換を射として圏をなす。これを$\mathcal{C}(X)$と書く。いい換えると、$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{C}(X)$に対し、射$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$とは、各$x \in X$に対し$\mathcal{C}$の射$\varphi_x: \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{G}(x)$があって、$x \leqq y$に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(x) & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}(x) \\ \downarrow \rho^{\mathcal{F}}_{xy} & \circlearrowleft & \downarrow \rho^{\mathcal{G}}_{xy} \\ \mathcal{F}(y) & \xrightarrow[\varphi_y]{} & \mathcal{G}(y) \end{array} \quad \text{（可換図式）}$$

となっていること。

X, Yがposetの時、これらを圏とみてXからYへの関手は、$f: X \longrightarrow Y$なる単調写像（$x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y)$）に他ならない。（以下poset の間の写像は、単調なもののみ考える。）$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(Y)$に対し、$f$を合成してできる$X$上の層を$f^*\mathcal{F}$と書く。$x \in X$に対し$f^*\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f(x))$である。これにより$f^*: \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$なる関手が定まる。特に$Y$が一点からなるposet ptの時、$\mathcal{C}(pt) \simeq \mathcal{C}$で、$A \in \mathcal{C}$に対し$f^*A$を$K_A$と書き定数層という。この関手$K: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(X)$が、右随伴関手をもつ時、それを$\Gamma$と書きsection関手という。（$\Gamma(\mathcal{F}) = \varprojlim \mathcal{F}$ 関手の極限である）$\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$（1をもつ可換環$R$上の加群の圏）のときは、$\Gamma(\mathcal{F}) = \{(a_x)_{x \in X} \mid \rho_{xy}(a_x) = a_y \ {}^\forall x \leqq y\} \subset \prod_{x \in X} \mathcal{F}(X)$とできる。同様に、$K$が左随伴関手をもつ時、それを$L$と書きcosection関手という。（$L(\mathcal{F}) = \varinjlim \mathcal{F}$ 関手の余極限である）$\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$のときは、$L(\mathcal{F}) = \left(\bigoplus_{x \in X} \mathcal{F}(x)\right) \Big/ \langle a_x - \rho_{xy}(a_x) \rangle_{x \leqq y}$とできる。

poset X, Y 　 $f : X \longrightarrow Y$ と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対して．
$f_* \mathcal{F}$, $f_! \mathcal{F} \in \mathcal{C}(Y)$ を．$x \in Y$ 上で．$f_* \mathcal{F}(x) = \Gamma(\mathcal{F}|_{f^{-1}(V_x)})$,
$f_! \mathcal{F}(x) = L(\mathcal{F}|_{f^{-1}(J_x)})$ で定める。但し．$V_x = \{y \in Y \mid x \leqq y\}$
$J_x = \{y \in Y \mid y \leqq x\}$ である。これにより $f_*, f_!$ は $\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ なる関手となり．$f_! \dashv f^* \dashv f_*$ となる。（$F \dashv U$ は．F が U の左随伴関手であることを示す。）

N.B. poset に filter 位相を入れて．位相空間とみなせる。
（$U \subset X$ open $\Leftrightarrow$ U : filter i.e. $x \in U$, $x \leqq y \Rightarrow y \in U$ ）
この時写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続 $\Leftrightarrow$ f は単調写像となる。
$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し．X 上の前層を $U \subset X$ open に $\mathcal{F}(U) = \Gamma(\mathcal{F}|_U)$ を対応させることにより作ると．これは X 上の（位相空間の上の）層となる。またこの茎 $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(x)$ となる。逆に．X 上の（位相空間の上の）層 $\mathcal{F}$ があると．$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(V_x)$ として．ここで定めた poset 上の層が得られ．両者は．同等であることがわかる。

$\boxed{\text{1.2}}$ 層係数（コ）ホモロジー 　 cf.[2]

以下 $\mathcal{C}$ を．（無限の）直積，直和をもち．十分多くの単射的対象，射影的対象をもつアーベル圏とする。この時．任意の poset X について $\mathcal{C}(X)$ も十分に多くの単射的対象，射影的対象をもつアーベル圏となり，また．関手 Γ が存在して加法的で左完全．関手 L も存在して．加法的で右完全となっている。

定義．$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対して

Xの$\mathcal{F}$係数コホモロジーを $H^n(X,\mathcal{F}) = r^n\Gamma(\mathcal{F})$

Xの$\mathcal{F}$係数ホモロジーを $H_n(X,\mathcal{F}) = l_n L(\mathcal{F})$

で定める。($r^n\Gamma$ はΓのn次右導来関手, l_nL はLのn次左導来関手)

<u>standard resolution</u>

poset Xに対し$\bar{X}$で同じ集合上のdiscreteなposetを表わす。(順序は$x\leq x$のみ) $i:\bar{X}\longrightarrow X$を集合としての恒等写像とすると、単調で $i^*\dashv i_*$ のunit $\eta:1\longrightarrow i_*i^*$ は単射である。$\nabla=i_*i^*$とし、$\mathcal{F}\in\mathcal{C}(X)$に、くり返しかけると、

$$\mathcal{F}\xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}}\nabla\mathcal{F}\ \underset{\nabla\eta_{\mathcal{F}}}{\overset{\eta_{\nabla\mathcal{F}}}{\rightrightarrows}}\ \nabla^2\ \overset{\eta_{\nabla^2\mathcal{F}}}{\underset{\nabla^2\eta_{\mathcal{F}}}{\substack{\longrightarrow\\ \xrightarrow{\nabla\eta_{\nabla\mathcal{F}}}\\ \longrightarrow}}}\ \nabla^3\mathcal{F}\ \ ----$$

なる列ができる。$\delta_n:\nabla^{n+1}\mathcal{F}\longrightarrow\nabla^{n+2}\mathcal{F}$ を $\delta_n=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\nabla^i\eta_{\nabla^{n+1-i}\mathcal{F}}$で定めると、

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}}\nabla\mathcal{F}\xrightarrow{\delta_0}\nabla^2\mathcal{F}\xrightarrow{\delta_1}\nabla^3\mathcal{F}\xrightarrow{\delta_2}\ ---$$

は複体になり、さらに完全列になる。また$\mathcal{F}\in\mathcal{C}(X)$に対して$\nabla\mathcal{F}$は$\Gamma$-acyclic ($H^i(X,\nabla\mathcal{F})=0$ $(i>0)$)となっているので、これにより、コホモロジー$H^n(X,\mathcal{F})$は、

$$0\longrightarrow C^0(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\Gamma(\delta_0)}C^1(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\Gamma(\delta_1)}C^2(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\Gamma(\delta_2)}\cdots$$

のn次のコホモロジーに一致する。但し $C^n(X,\mathcal{F})=\Gamma(\nabla^{n+1}\mathcal{F})=\prod_{x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n}\mathcal{F}(x_0,x_1,\cdots,x_n)$

で、$\mathcal{F}(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\mathcal{F}(x_n)$ また、積は長さnの重複を許す鎖全体にわたる。

$\Gamma(\delta_n):C^n(X,\mathcal{F})\longrightarrow C^{n+1}(X,\mathcal{F})$ は $x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_{n+1}$に対応する成分へ行く写像が、

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(C^n\xrightarrow{pr}\mathcal{F}(x_0,\cdots\check{x}_i,\ ,x_{n+1})\xrightarrow{id}\mathcal{F}(x_0,\cdots x_{n+1})\right)$$

$$+(-1)^{n+1}\left(C^n\xrightarrow{pr}\mathcal{F}(x_0,x_1,\cdots,x_n)\xrightarrow{P_{x_n,x_{n+1}}}\mathcal{F}(x_0,\cdots,x_{n+1})\right)$$

となる。

同様に、ホモロジーは $i:\overline{X}\longrightarrow X$ に対する $i_!\dashv i^*$ の counit

$\varepsilon: i_!i^*\longrightarrow 1$ (これは全射), $\varepsilon_{\mathcal{F}}:\tau\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ ($\tau=i_!i^*$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tau^3\mathcal{F} \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_{\tau^2\mathcal{F}}"] \arrow[r, "\tau\varepsilon_{\tau\mathcal{F}}" description] \arrow[r, shift right=2, "\tau^2\varepsilon_{\mathcal{F}}"'] & \tau^2\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "\varepsilon_{\tau\mathcal{F}}"] \arrow[r, shift right, "\tau\varepsilon_{\mathcal{F}}"'] & \tau\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

より定まる複体

$$\cdots\longrightarrow\tau^3\mathcal{F}\xrightarrow{\partial_2}\tau^2\mathcal{F}\xrightarrow{\partial_1}\tau\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}}\mathcal{F}\longrightarrow 0$$

を用いて、($\tau\mathcal{F}$ は L-acyclic で上の複体が完全列より)

$$\cdots\longrightarrow C_2(X,\mathcal{F})\xrightarrow{L(\partial_2)}C_1(X,\mathcal{F})\xrightarrow{L(\partial_1)}C_0(X,\mathcal{F})\longrightarrow 0$$

の n 次ホモロジーとして、$H_n(X,\mathcal{F})$ が計算できる。但し、

$$C_n(X,\mathcal{F})=L(\tau^{n+1}\mathcal{F})=\bigoplus_{x_0\leqq x_1\leqq\cdots\leqq x_n}\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\cdots x_n),\quad \mathcal{F}^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\mathcal{F}(x_0)$$

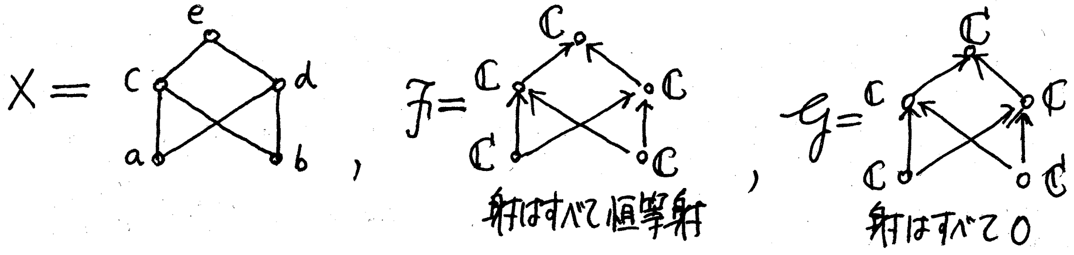
$L(\partial_n):C_n(X,\mathcal{F})\longrightarrow C_{n-1}(X,\mathcal{F})$ は、$\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 上で、

$$\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\cdots,x_n)\xrightarrow{\rho_{x_0,x_1}}\mathcal{F}^*(x_1,x_2,\cdots x_n)\hookrightarrow C_{n-1}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(\mathcal{F}^*(x_0,x_1\cdots x_n)\xrightarrow{id}\mathcal{F}^*(x_0\cdots\check{x}_i\cdots x_n)\hookrightarrow C_{n-1}\right)$$ である。

N.B. "非輪状モデルの方法" [11] を使うと、正規化された(コ)チェイン複体で計算しても、同じ(コ)ホモロジーとなる。(直積・直和は、重複のない長さ n の鎖全体だけとればよい)

例.



長さ0の鎖 a, b, c, d, e 5個

長さ1の鎖 ac, ad, ae, bc, bd, be, ce, de 8個

長さ2の鎖　ace, ade, bce, bde　4個

よってコホモロジーは．$0 \longrightarrow \underset{0次}{\mathbb{C}^5} \xrightarrow[A]{} \underset{1次}{\mathbb{C}^8} \xrightarrow[B]{} \underset{2次}{\mathbb{C}^4} \longrightarrow 0$

のコホモロジーである。

$\mathcal{F}$に対して

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \\ & -1 & 1 & & \\ & -1 & & 1 & \\ & -1 & & & 1 \\ & & -1 & & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ ce \\ de \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ac & ad & ae & bc & bd & be & ce & de \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & & -1 & & & & 1 & \\ & 1 & -1 & & & & & 1 \\ & & & 1 & & -1 & 1 & \\ & & & & 1 & -1 & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ ace \\ ade \\ bce \\ bde \end{array}$$

$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B = 4$ より　$\dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

$\mathcal{G}$に対しては．Aの代りに$A_\circ$，Bの代りに$B_\circ$（それぞれ○印を0にしたもの）

となり，$\mathrm{rank}\, A_0 = \mathrm{rank}\, B_0 = 3$より　$\dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{G}) = \begin{cases} 2 & n=0,1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n>2 \end{cases}$

またホモロジーは　$0 \longrightarrow \overset{2次}{\mathbb{C}^4} \xrightarrow[{}^tB]{} \overset{1次}{\mathbb{C}^8} \xrightarrow[{}^tA]{} \overset{0次}{\mathbb{C}^5} \longrightarrow 0$

のホモロジーとなり　$\dim_{\mathbb{C}} H_n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

$\mathcal{G}$については${}^tA$の代りに${}^tA_\triangle$，${}^tB$の代りに${}^tB_\triangle$（それぞれ△印を0にしたもの）

となるので　$\dim_{\mathbb{C}} H_n(X, \mathcal{G}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$　となる。

$(\mathrm{rank}\, {}^tA_\triangle = \mathrm{rank}\, {}^tB_\triangle = 4)$

N.B. $\mathcal{G}$のような層は．Whitney層と呼ばれている。[1]

命題 [2]

$X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} X$ が関手とみて $f \dashv g$ のとき.

$\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対し　$H^n(Y, \mathcal{G}) = H^n(X, f^*\mathcal{G})$

$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し　$H_n(X, \mathcal{F}) = H_n(Y, g^*\mathcal{F})$ となる。

命題（スペクトル系列）[1], [4]

$f: X \longrightarrow Y$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し

(i) $E_2^{p,q} = H^p(Y, r^q f_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$

(ii) $E^2_{p,q} = H_p(Y, l_q f_! \mathcal{F}) \Longrightarrow H_{p+q}(X, \mathcal{F})$

なるスペクトル系列がある。

∵) (i) $\Gamma_X \simeq \Gamma_Y \circ f_*$ と. Γ_Y が左完全, f_* が単射的対象を単射的対象に写すことより。

(ii) $L_Y \circ f_! \simeq L_X$ と L_Y が右完全, $f_!$ が射影的対象を射影的対象に写すことより。

$\boxed{1.3}$ 単体複体の(コ)ホモロジー

$\mathfrak{S}$ を単体複体のなす圏, $\mathfrak{S}_o$ を順序付単体複体のなす圏とする。順序付単体複体 M とは、単体複体で頂点の集合に半順序が与えられていて、それにより M の各単体が全順序集合となっているものをいう。また $\mathcal{O}$ を poset 全体のなす圏とする。単体複体 M に対し. M の単体全体の集合 αM は単体の包含により半順序集合とみなせる。これによって関手 $\alpha: \mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{O}$ が定まる。逆に. 半順序集合 X に対して、相異なる元から成る鎖 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 全体を単体とする単体複体 βX が定まる。

これは、もともとのXの半順序により順序付単体複体とみなせる。これにより関手 $\beta : \mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{S}_0$ が定まる。合成 $\beta \circ \alpha$ は重心細分に他ならない。$M \in \mathfrak{S}$ に対しM上の圏$\mathcal{C}$に値をもつ共変係数系とは $\mathcal{C}(\alpha M)$ の対象のことをいう。またM上の$\mathcal{C}$に値をもつ反変係数系とは $\mathcal{C}(\alpha M^*)$ の対象のこととする。ここで $X \in \mathcal{O}$ に対し X^* でXに逆順序関係を入れたposetを表わす。$M \in \mathfrak{S}_0$ の共変係数系 $\mathcal{F}\ (\in \mathcal{C}(\alpha M))$ 係数のn次のコホモロジー $H^n(M, \mathcal{F})$ を複体

$$0 \longrightarrow C^0(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

のn次のコホモロジーのことと定める。但し

$$C^n(M,\mathcal{F}) = \prod_{\sigma_n \in \mathcal{M}_n} \mathcal{F}(\sigma_n) \quad \text{で} \quad \mathcal{M}_n = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_0}(\Delta_n, M)。$$

Δ_nはn次元の標準単体(順序付)で$\mathcal{M}_n$の元はMのn次元特異単体とも呼ばれる。$\sigma_n \in \mathcal{M}_n$ に対し $\mathcal{F}(\sigma_n) = \mathcal{F}(\mathrm{Im}\,\sigma_n)$ とする。
また写像 $\delta_n : C^n(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(M,\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}(\sigma_{n+1})$ 成分へは

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(C^n \xrightarrow{p_n} \mathcal{F}(F_i \sigma_{n+1}) \xrightarrow{P_{F_i\sigma_{n+1},\sigma_{n+1}}} \mathcal{F}(\sigma_{n+1}) \right)$$

で定まるものとする。ただし $F_i\sigma_{n+1}$ は σ_{n+1} の全順序でi番目の元を除いた特異単体を表わす。同様に $M \in \mathfrak{S}_0$ の $\mathcal{F}^* \in \mathcal{C}(\alpha M^*)$ を係数とするn次ホモロジー $H_n(M, \mathcal{F}^*)$ を複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(M,\mathcal{F}^*) \xrightarrow{\partial_2} C_1(M,\mathcal{F}^*) \xrightarrow{\partial_1} C_0(M,\mathcal{F}^*) \longrightarrow 0$$

のn次ホモロジーで定義する。但し $C_n(M,\mathcal{F}^*) = \bigoplus_{\sigma_n \in \mathcal{M}_n} \mathcal{F}^*(\sigma_n)$ で、$\sigma_n \in \mathcal{M}_n$ に対し $\mathcal{F}^*(\sigma_n) = \mathcal{F}^*(\mathrm{Im}\,\sigma_n)$ である。また写像

$\partial_n : C_n(M, \mathcal{F}) \longrightarrow C_{n-1}(M, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F}^*(\sigma_n)$ 上では

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\mathcal{F}^*(\sigma_n) \xrightarrow{\rho_{\sigma_n, F_i\sigma_n}} \mathcal{F}^*(F_i\sigma_n) \hookrightarrow C_{n-1} \right)$$

で定まるものとする。$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対して βX 上の共変係数系 $\beta\mathcal{F}$ を $\beta\mathcal{F}(x_0 < x_1 < \cdots < x_n) = \mathcal{F}(x_n)$ で、また βX 上の反変係数系 $\beta^*\mathcal{F}$ を $\beta^*\mathcal{F}(x_0 < x_1 < \cdots < x_n) = \mathcal{F}(x_0)$ で定めると、

命題　poset X と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し

$$H^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\beta X, \beta\mathcal{F})$$
$$H_n(X, \mathcal{F}) = H_n(\beta X, \beta^*\mathcal{F})$$

が成立する事が、poset 上の (コ) ホモロジーの計算法からわかる。

また逆に

命題　$M \in \mathfrak{S}_0$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\alpha M)$, $\mathcal{F}^* \in \mathcal{C}((\alpha M)^*)$ に対し

$$H^n(M, \mathcal{F}) = H^n(\alpha M, \mathcal{F})$$
$$H_n(M, \mathcal{F}^*) = H_n((\alpha M)^*, \mathcal{F}^*)$$

が成立する事も確かめられる。[2] よって poset 上の (コ)ホモロジーを考える事と単体複体上の(コ)ホモロジーを考える事は本質的に同じとみてよい。また $M \in \mathfrak{S}$ に対して (コ)ホモロジーを考えるためには順序付けが必要であるが、どんな順序付けをとっても同じ(コ)ホモロジーとなることがわかる。

N.B. poset 上の(コ)ホモロジーと同様に、複体中の直積、直和は正規の n 次元単体（Mの単体）だけをとってきて計算しても同じ(コ)ホモロジーとなる。

§2 層付半順序集合と群の表現

$\boxed{2.1}$ 群の作用

以下圏 $\mathcal{C}$ は1.2と同じとする。

<u>層付半順序集合の圏</u>

poset X, Y と単調写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対して
$\Gamma_Y \longrightarrow \Gamma_X \circ f^*$ なる自然変換と，f^*が完全な事から [2; 9.1]
$\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対して $H^n(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, f^*\mathcal{G})$ なる射が
得られる。よって $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ と $f^*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ なる $\mathcal{C}(X)$ の射
があれば，それから生ずる $H^n(X, f^*\mathcal{G}) \longrightarrow H(X, \mathcal{F})$ を合成にて，
$H^n(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$ が定まる。

定義　圏 $\mathcal{OC}_{coh}$ を次のように定める。対象は $X \in \mathcal{O}$ と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$
の対 $(X, \mathcal{F})$ で，射は $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f, \varphi)} (Y, \mathcal{G})$　但し $f: X \longrightarrow Y$ (単調)
$\varphi: f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(X)$ の射で，射の合成は自然に定まるものできめる。

この時，H^n は $\mathcal{OC}_{coh} \longrightarrow \mathcal{C}$ なる反変関手となる。
同様に，$f: X \longrightarrow Y$ のとき，$L_X \circ f^* \longrightarrow L_Y$ と f^*の完全性
より $\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対して，$H_n(X, f^*\mathcal{G}) \longrightarrow H_n(Y, \mathcal{G})$ が生ずる。
$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{F} \longrightarrow f^*\mathcal{G}$ なる $\mathcal{C}(X)$ の射があれば $H_n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_n(X, f^*\mathcal{G})$
を合成して $H_n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_n(Y, \mathcal{G})$ が定まる。

定義　圏 $\mathcal{OC}_h$ を，対象は $\mathcal{OC}_{coh}$ と同じで，射は，
$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f, \varphi)} (Y, \mathcal{G})$ を，$f: X \longrightarrow Y$ (単調)，$\varphi: \mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G}$ は $\mathcal{C}(X)$ の射
で定める。

この時. H_n は. $\mathcal{OC}_h \longrightarrow \mathcal{C}$ なる共変関手となる。

このように. 層付半順序集合の圏はコホモロジーとホモロジーで異なる圏を考えるのが自然である。

N.B. 忘却関手により $\mathcal{OC}_{coh} \longrightarrow \mathcal{O}$ は. cofibered category $\mathcal{OC}_h \longrightarrow \mathcal{O}$ は fibered category となる。

定義. 群 G が層付半順序集合 $(X, \mathcal{F})$ に作用するとは. $r: G \longrightarrow Aut_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F})$ なる準同型 r が与えられていること。

(但し $Aut_{\mathcal{OC}_h}$ は圏 $\mathcal{OC}_h$ における自己同型射全体が射の合成に関して. 成す群のことを表すとする。)

この時準同型 $Aut_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H_n} Aut_{\mathcal{C}}(H_n(X, \mathcal{F}))$ を合成して. G の $H_n(X, \mathcal{F})$ への作用が得られる。また

$$Aut_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi} Aut_{\mathcal{OC}_{coh}}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H^n} Aut_{\mathcal{C}}(H^n(X, \mathcal{F}))$$

を合成して G の $H^n(X, \mathcal{F})$ への作用が得られる。ここで Φ は. $(f, \varphi) \in Aut_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F})$ に対し. $\Phi(f, \varphi) = (f^{-1}, f^{*}\varphi) \in Aut_{\mathcal{OC}_{coh}}(X, \mathcal{F})$ を対応させる反準同型。(H^n も反準同型) 群 G の $(X, \mathcal{F})$ への作用をいい換えると. G が X に poset の自己同型で作用していて. 各 $g \in G$ と $x \in X$ に対し $\tilde{g}_x : \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(g \cdot x)$ なる $\mathcal{C}$ の射 (同型射) が定められていて. $\tilde{1}_x$ は恒等射で,

$x \leq y$ に対し

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(x) \arrow[r, "\tilde{g}_x"] \arrow[d, "\rho_{xy}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}(g x) \arrow[d, "\rho_{gx, gy}"] \\
\mathcal{F}(y) \arrow[r, "\tilde{g}_y"'] & \mathcal{F}(g y)
\end{tikzcd}$$

が可換図式となり,

$x \in X$ と $g, h \in G$ に対し $\widetilde{(hg)}_x = \tilde{h}_{gx} \circ \tilde{g}_x$ となっていること。

この時、$x \in X$ に対し $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$（固定群）とすると、$\tilde{g}_x$ により、G_x は $\mathcal{F}(x)$ へ作用する。群 G が作用する $(X, \mathcal{F})$ 全体の成す圏を $\mathcal{O}\mathcal{C}_G$ と書く。（射は、$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f,\varphi)} (Y, \mathcal{G})$ なる $\mathcal{O}\mathcal{C}_h$ の射で、G-equivariant なもの すなわち $\forall x \in X, \forall g \in G$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(x) \arrow[r, "\tilde{g}_x"] \arrow[d, "\varphi_x"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}(g.x) \arrow[d, "\varphi_{g.x}"] \\ f^*\mathcal{G}(x) \arrow[r, "f^*\tilde{g}_x"] & f^*\mathcal{G}(g.x) \end{tikzcd}$$

が可換図式となるもの）

また群 G の作用する X 上の層の圏を $\mathcal{C}(X)_G$ と書く。

（$\mathcal{C}(X)_G$ は $\mathcal{O}\mathcal{C}_G$ の部分圏で $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(1_X, \varphi)} (X, \mathcal{G})$ を射とするものとみなせる。）

この時 $\mathcal{L} \dashv \mathcal{K} \dashv \Gamma$ より、

命題 $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)_G$ と、$A \in \mathcal{C}_G$ に対し、

$$Hom_{\mathcal{C}(X)_G}(K_A, \mathcal{F}) \cong Hom_{\mathcal{C}_G}(A, H^0(X, \mathcal{F}))$$

$$Hom_{\mathcal{C}_G}(H_0(X, \mathcal{F}), A) \cong Hom_{\mathcal{C}(X)_G}(\mathcal{F}, K_A)$$

但し、$\mathcal{C}_G$ は、G の作用する $\mathcal{C}$ の対象が成す圏（射はG-equivariant）。

また K_A は、$G \curvearrowright A$ への作用から自然に定まる G の作用をもつ。

$\boxed{2.2}$ 有限 chevalley 群と Building への作用

この節では、群 G として有限体 $k = \mathbb{F}_q$ ($q = p^r$, p：素数) 上の階数 $l \geqq 2$ の普遍 chevalley 群を考える。[10], [12]

また圏$\mathcal{C}$としてk上の　　　ベクトル空間のなす圏をとる。
Gの作用するposetとしてGのBuilding Δを考える。
まずChevalley群について必要事項をまとめる。

Gは半単純Lie環$\mathfrak{L}$の忠実な表現φの表現空間Vの許容$\mathbb{Z}$形$V_{\mathbb{Z}}$を用いて構成される。$\mathfrak{L}$の根系をΔとし$\mathfrak{L}$のChevalleyの標準基を$\{h_\alpha\ (\alpha\in\Pi),\ e_\beta\ (\beta\in\Delta)\}$とする。($\Pi$は$\Delta$の基本系)この時$r\in\Delta$に対し$x_r(t)=\exp(t\varphi(e_r))$ $(t\in k)$は$V_k=k\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}$上に可逆な線形写像で作用し,

$G=\langle x_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k\rangle\subset GL(V_k)$で定める。
Πで定まる正系をΔ^+とおき$U=\langle x_r(t)\mid r\in\Delta^+,\ t\in k\rangle$と定めると$|U|=q^N$ $(N=|\Delta^+|)$でUはGのp-Sylow群となる。また$r\in\Delta$と$t\in k^*$について$\omega_r(t)=x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$
$h_r(t)=\omega_r(t)\omega_r(-1)$とおき部分群$N,H$を

$N=\langle \omega_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k^*\rangle$　$H=\langle h_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k^*\rangle$

で定める。この時Hは可換群で$\langle U,H\rangle=UH\rhd U$,
$U\cap H=\{1\}$となる。$B=UH$とおき標準Borel部分群という。Bに共役なGの部分群を単にBorel部分群という。また
$N\rhd H$で$W=N/H\cong W(\Delta)$ (ΔのWeyl群)で
$S=\{H\omega_r(1)\mid r\in\Pi\}$とおくと$(W,S)$はCoxeter系となるが,
さらに(G,B,N,S)はTits系を成している。従って
$J\subset S$に対し$W_J=\langle J\rangle\subset W$と書く時、$B$を含む$G$の

部分群は. ある$J\subset S$をとって. $P_J=BW_JB$ の形になっていて.
$P_J=P_K\Rightarrow J=K$, $N_G(P_J)=P_J$, $P_J\cap P_K=P_{J\cap K}$,
P_JとP_Kが. Gで共役なら$J=K$ などが成り立つ。[12;定理7.19]
P_Jの形の部分群をJ-型の標準Parabolic部分群と呼び, これに共役な部分群を(J-型の) Parabolic部分群という。Δを. Gを除く. parabolic部分群全体の集合に. 包含の逆で順序を入れた半順序集合とする。(これをGの Building という。)
これは. 上にあげた parabolic部分群の性質から. Borel部分群を極大 face とする(ℓ-1次元の)単体複体とみなすことができる。(頂点は極大な Parabolic部分群) 仮定の rank $l\geqq 2$ より. Δは連結となる。また. Sに全順序を入れる事により, Δは順序付単体複体となる。Gは共役で. Δに作用する。
Δの単体σに対応している parabolic部分群をP_σと書くと.
$P_{g\sigma}=gP_\sigma g^{-1}$ である。

<u>Δ上の固定点層 $\mathcal{F}_V$</u>

Gのk上の表現Vに対しΔ上の反変係数系$\mathcal{F}_V$ (固定点層という)を次のように作る。$\Delta\ni\sigma$に対する parabolic部分群の Levi分解を $P_\sigma=L_\sigma U_\sigma$ とする。

$\Big($ P_Jに対しては $U_J=\langle x_r(t)\mid r\in\Delta^+-\Delta_J,\ t\in k\rangle$
$L_J=\langle H, x_r(t)\mid r\in\Delta_J,\ t\in k\rangle$ にとれる。
但し Δ_JはJに対応するΔの部分根系 $\Big)$

この時 $\mathcal{F}_V(\sigma) = V^{U_\sigma} = \{v \in V \mid g.v = v \ \ \forall g \in U_\sigma\}$
と定める。$\tau < \sigma$ (τがσのface) の時. $P_\tau \supset P_\sigma$ で
$U_\tau \subset U_\sigma$ となるので $V^{U_\tau} \supset V^{U_\sigma}$ よって $p_{\sigma,\tau} : \mathcal{F}_V(\sigma) \longrightarrow \mathcal{F}_V(\tau)$ を.
自然な包含写像で定める。この$\mathcal{F}_V$は. もともとのGのV
への作用から自然に導びかれるGの作用をもつ。すなわち
$\tilde{g}_\sigma : \mathcal{F}(\sigma) \longrightarrow \mathcal{F}(g.\sigma)$ を $\tilde{g}_\sigma(v) = g.v$ で定められる。
$\mathcal{F}_V$は定数層K_Vの部分層である。

例. A_{n-1}型の時. $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$ (階数 $n-1 \geq 2$)
この時Buildingは $V = \mathbb{F}_q^n$ の0でない真部分空間の作る
posetを$S(V)$として. $\Delta = \beta S(V)$ とみなすことができる。
Vの旗 $0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t \subsetneq V$ のG中の固定群PがJ型のparabolic
部分群となる。但し $J = \{1, 2, \cdots, n-1\} - \{j_1, j_2, \cdots, j_t\}$, $j_i = \dim V_i$
でSの元と対応する基本根系の番号を同一視する。$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_{n-1}$
(標準Borel部分群は. G中の上半三角行列全体のなす部分群である)
この時自然表現Vに対する$\mathcal{F}_V$は. $\sigma \in \Delta$に対応するP_σできまる
Vの旗を $0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t \subsetneq V$ とした時 $\mathcal{F}_V(\sigma) = V_1$ となっている。
この$\mathcal{F}_V$のホモロジーに関し次の結果がある。

[Lusztig][3]
GがA_{n-1}型 ($n \geq 3$)
V:自然表現に対し.

$$H_i(\Delta, \mathcal{F}_V) \cong \begin{cases} V & i = 0 \\ 0 & 0 < i < n-2 \end{cases}$$

$$\dim_k H_{n-2}(\Delta, \mathcal{F}_V) = (q-1)(q^2-1)\cdots(q^{n-1}-1)$$

また定数層 K_k のホモロジーに関し次の結果がある。

[Solomon-Tits] [8]

G: 任意の型 階数 $l \geqq 2$ に対し

$$H_i(\Delta, K_k) \cong \begin{cases} k & i=0 \\ St & i=l-1 \\ 0 & 0<i<l-1 \end{cases}$$

St は Steinberg 表現と呼ばれる q^N 次元の既約表現 ($N=|\Delta^+|$)

次に、既約な表現 V に対する $\mathcal{F}_V$ の性質に関して Ronan-Smith の結果 [5] をならべる。

1、V が既約なら $\mathcal{F}_V$ も既約.

但し. G の作用をもつ層 $\mathcal{F}$ が既約とは. G の作用をもつ部分層で chamber generated なものは 0 か $\mathcal{F}$ となること。($\mathcal{F}$ が chamber generated とは各 $\sigma \in \Delta$ に対し $\mathcal{F}(\sigma) = \langle P_\sigma \mathcal{F}(C) \mid C$: 極大face (chamber) $\rangle$ となること)

2、V, W が既約で $\mathcal{F}_V \cong \mathcal{F}_W$ なら $V \cong W$

これらから次が出る。

3、基本定理. V が既約のとき. $H_0(\mathcal{F}_V)$ は唯一つの極大部分加群をもち. それによる剰余加群は V と同型になる。特に. $H_0(\mathcal{F}_V)$ は直既約である。

4、系 $H_0(\mathcal{F}_{St}) \cong St$

また. 基本定理を用いると帰納的に G の既約表現 V が構成できる。

5. Mが既約な minimal weight module のとき。GがC_n型で ch $k=2$ の場合を除いて。$H_0(\mathcal{F}_M) \cong M$ となる。

$\boxed{2.3}$ 散在単純群と group geometry

散在単純群についても少しの例外を除いて。Building にあたるような幾何学的対象を。部分群を使って構成できる。(minimal parabolic system [7]) これにより 2.2 と同様の議論をする事ができる。詳しくは文献を参照して頂きたい。([6]など)

参考文献

[1] K.P.Baclawski, "Homology and Combinatorics of Ordered Sets," Ph.D. thesis, Harvard University, 1976.

[2] R.Deheuvels, Homologie des ensembles ordonnes et des espaces topologiques, Bull.Soc.Math.France 90 (1962),261-321.

[3] G.Lusztig, "The Discrete Series Representations of the General Linear Groups over a Finite Field," Annals of Mathematics Studies 81, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.

[4] D.Quillen, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, Advances in Math. 28 (1978), 101-128.

[5] M.A.Ronan and S.D.Smith, Sheaves on buildings and modular representations of Chevalley groups, J.Algebra 96 (1985), 319-346.

[6] M.A.Ronan and S.D.Smith, Universal presheaves on group geometries, and modular representations, J.Algebra 102 (1986), 135-154.

[7] M.A.Ronan and G.Stroth, Minimal parabolic geometries for the sporadic groups, European J.Combin. 5 (1984), 59-91.

[8] L.Solomon, The Steinberg character of a finite group with a BN-pair, in "Theory of Finite Groups" (R.Brauer-C.Sah, Ed.), 213-221, Benjamin, New York, 1969.

[9] S.Yuzvinsky, Cohen-Macaulay rings of sections, Advances in Math. 63 (1987), 172-195.

[10] 岩堀長慶 Lie環論とChevalley群 上,下. 東大セミナリー・ノート 12,13,(1965).

[11] 小松-中岡-菅原 位相幾何学I 岩波書店 (1967)

[12] 鈴木通夫 有限単純群 紀伊国屋書店 (1987)