数理解析研究所講究録
670巻 1988年 251-257

Brauer の centralizer algebra の q-analogue の表現の構成

阪大理　村上　順

序. Jimbo [5] により古典型リー環に対応する quantum Yang-Baxeter 方程式の解が求められた．一方，Jimbo, Miwa, Okado [６] により古典型リー環に対応するＩＲＦ模型の解が求められた．この２つの模型を見くらべることにより古典型リー環の universal enveloping algebra やその q-analogue の自然表現の centralizer algebra の表現を構成することができる．ここではＣ型の場合について上の方法を用いて centralizer algebra の既約表現を構成する。その前にＡ型の場合について考えてみよう。Ａ型の centralizer algebra はＡ型の Iwahori Hecke algebra と同型である。そして上の方法で得られるcentralizer algebra の規約表現は Hoefsmit [4] や Wenzl [11] で得られたものとほぼ一致する。

Ｂ，Ｃ，Ｄ型の場合は centralizer algebra は Iwahori Hekce algebra とは異なる。これらの場合については可解模型を用いることにより，はじめて centralizer algebra のすべての既約表現が具体的に構成された。この表現は Kauffman 多項式と呼ばれる link の不変量の計算にも役に立つ。

以下ここではＣ型の場合について得られた結果を述べる．

１． Brauer の centralizer algebra の q-analogue

まず $C_n(\alpha,q)$ を次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}(\alpha,q)$ 上の１をもつ algebra とする．

$$C_1(\alpha,q) = \mathbb{C}(\alpha,q),$$

$$C_n(\alpha,q) =$$

$$\langle \tau_i,\ t_i^{-1},\ \varepsilon_i\ (1 \le i \le n-1)\ |\ \tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1},$$

$$\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i = \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_{i+1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1},$$
$$\tau_i^{\pm 1}\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i = \tau_{i+1}^{\mp 1}\varepsilon_i, \quad \tau_{i+1}^{\pm 1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = \tau_i^{\mp 1}\varepsilon_{i+1},$$
$$\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\tau_i^{\pm 1} = \varepsilon_i\tau_{i+1}^{\mp 1}, \quad \varepsilon_{i+1}\varepsilon_i\tau_{i+1}^{\pm 1} = \varepsilon_{i+1}\tau_i^{\mp 1} \quad (1 \le i \le n-2),$$
$$\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad \varepsilon_i\tau_j = \tau_j\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i \quad (|i-j| \ge 2),$$
$$\tau_i\tau_i^{-1} = \tau_i^{-1}\tau_i = 1, \quad \tau_i\varepsilon_i = \varepsilon_i\tau_i = -(\alpha^2 q)^{-1}\varepsilon_i,$$
$$\tau_i - \tau_i^{-1} = (q - q^{-1})(1 - \varepsilon_i) \quad (1 \le i \le n-1) \rangle \quad (n \ge 2).$$

また，gを C_m型の古典型単純リー環とし，その universal enveloping algebra [5] を $\hat{U}(g)$ と書く．$\hat{U}(g)$ の自然表現の表現空間をVとし，V⊗V⊗...⊗V（n階のテンソル積）に関する centralizer algebra を $\hat{D}_n(g)$ と書く．[1]，[9] 及び [12] により次がわかる．

i)　$\hat{D}_n(g)$ は半単純な algebra である．

ii)　$\hat{D}_n(g)$ は $C_n(q^m,q)$ の商である．

iii)　$m >> 0$ ならば $\hat{D}_n(g)$ は $C_n(q^m,q)$ の商である．

上のことから，$C_n(q^m,q)$ は [2] での algebra $D_n(x)$ の q-analogue であることがわかる．ここでは $C_n(\alpha,q)$ の既約表現すべてを具体的に構成する．その前に $C_n(q^m, q)$ の $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ への表現を述べておく．まず $\mathrm{End}(V \otimes V)$ の元Rを次でさだめる．

$$R = \sum_\alpha E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\alpha\alpha} + q\sum_{\alpha\neq\beta,\beta'} E_{\alpha\beta}\otimes E_{\beta\alpha} - \sum_{\alpha>\beta}(q^2-1)E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\beta\beta}$$
$$+ \sum_\alpha q^2 E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\alpha'\alpha'} + \sum_{\alpha>\beta}(q^2-1)(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta q^{\bar\alpha-\bar\beta} - \delta_{\alpha\beta'})E_{\alpha\beta'}\otimes E_{\alpha'\beta},$$

$$\bar\alpha = \alpha - \frac{1}{2} \quad (1 \le \alpha \le n), \quad \alpha + \frac{1}{2} \quad (n+1 \le \alpha \le 2n),$$

$$\varepsilon_\alpha = 1 \quad (1 \le \alpha \le n), \quad -1 \quad (n+1 \le \alpha \le 2n).$$

すると，Rは $\hat{U}(g)$ の diagonal action と可換になる．

そして，$\tau_i \in C_n(q^m, q)$ を $V^{\otimes n}$ の i 番目と i + 1 番目 の $V\otimes V$ に対して qR^{-1} で作用させる．これにより $C_n(q^m, q)$ の表現が得られる．

2． 既約表現の構成

分割 ：$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0\ (i \in \mathbb{N}),\ \lambda_j = 0\ (j >> 0)\}$,

n の分割 ：$\Lambda(n) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \Lambda \mid \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i = n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

とし，$\Lambda_2(n) = \Lambda(n) \cup \Lambda(n-2) \cup \ldots \cup \Lambda(n-2[\frac{n}{2}])$ とする．分割 Λ の二つの元 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ と $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$ に対し，

$$\lambda \underset{1}{\sim} \lambda' \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists} j \in \mathbb{N},\quad \lambda_i = \lambda'_i \quad \text{if} \quad i \neq j \quad \text{and} \quad \lambda_j = \lambda'_j \pm 1$$

とする．$\lambda \in \Lambda$ に対し，

$$P(\lambda) \underset{\text{def}}{=} \{p = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}) \in \Lambda^{n+1} \mid \lambda^{(0)} = (0, 0, \ldots),$$
$$\lambda^{(n)} = \lambda,\ \lambda^{(i)} \underset{1}{\sim} \lambda^{(i+1)} \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq n-1\}$$

とする．$P(\lambda)$ の元に対応する基底で張られる $\mathbb{C}(\alpha, q)$ 上の線形空間を V_λ と書く．すなわち，

$$V_\lambda = \bigotimes_{p\in P(\lambda)} \mathbb{C}(\alpha, q)\, v_p \quad (v_p \text{ は } p \in P(\lambda) \text{ に対応する基底}).$$

[11] により $C_n(\alpha, q)$ の既約表現は $\Lambda_2(n)$ でパラメトライズされることがわかる．以下では $\mathrm{End}(V_\lambda)$ 中に，$\lambda \in \Lambda_2(n)$ でパラメトライズされる表現を構成する．具体的に，行列成分を書き下すのだが，その前にいくつか記号を準備する．

$$\{k\} = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, \qquad \{k;\ m\} = \frac{\alpha^m q^k - \alpha^{-m} q^{-k}}{q - q^{-1}}.$$

また，$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\ell, 0, \ldots, 0) \in \Lambda$ に対し，

$$h_\nu(i,j) = \nu_i - i - j + \max\{k \mid \nu_k \geq j\} \quad (1 \leq i \leq \ell,\ 1 \leq j \leq \nu_i),$$

$$g_\nu(i) = \begin{cases} \dfrac{\Pi_{j=i}^{\nu_i+i-1}\{\nu_i + \nu_j + 2 - i - j;\ 2\}}{\Pi_{j=1}^{\nu_i}\{j - i + 1;\ 1\}} & (\nu_i + 1 > \ell) \\ \dfrac{\Pi_{j=i}^{\ell}\ \{\nu_i + \nu_j + 2 - i - j;\ 2\}}{\Pi_{j=1}^{\nu_i}\ \{j - i + 1;\ 1\}\ \Pi_{j=1}^{\ell-\nu_i-i+1}\{3 - 2i - j;\ 2\}} & (\nu_i + 1 \leq \ell) \end{cases}$$

$$G_\nu = \prod_{i=1}^{\ell}\left(g_\nu(i) \prod_{j=1}^{\nu_i} \frac{\{j - i;\ 1\}}{\{h_\nu(i,j) + 1\}}\right).$$

とする．分割 $\lambda \in \Lambda_2(n)$ を１つ固定する． $1 \leq i \leq n-1$ に対し，$\mathrm{End}(V_\lambda)$ の元 A_i を次で定める．

$$A_i v_p = \sum_{r \in P(\lambda)} (A_i)_{rp} v_r \quad ((A_i)_{rp} \in \mathbb{C}(\alpha, q))$$

として，(A_i) を以下で定める．ここで δ_1 と δ_2 は ± 1 を表す．そして
$p = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)})$, $r = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)})$,
$\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots)$, $\nu^{(k)} = (\nu_1^{(k)}, \nu_2^{(k)}, \ldots)$,
$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ 及び $\eta(s) = \eta_s - s + 1\ (s \in \mathbb{N})$ とする．

<u>a) $i \neq {}^\exists j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ s.t. $\lambda^{(j)} \neq \nu^{(j)}$ のとき</u>,

$$(A_i)_{rp} = 0.$$

以下 a) 以外の場合について定める．

<u>b) $p = r$ で</u> $\lambda_t^{(i-1)} = \lambda_t^{(i+1)} + 2$ <u>となる t が存在する場合</u>

$$(A_i)_{pp} = q.$$

c) $p=r$ で $\lambda^{(i-1)}=\lambda^{(i+1)}$ の場合． ある t が存在して $\lambda_t^{(i-1)}=\lambda_t^{(i)}-\delta_1$ となっている．この t と δ_1 とを用いて，

$$(A_i)_{pp} = -\frac{\alpha^{-2\delta_1} q^{-2\delta_1\eta(t)-1}}{\{2\delta_1\eta(t)+1;\ 2\delta_1\}} - \frac{a^{-2\delta_1} q^{-2\delta_1(\eta(t))-1} G_{\lambda^{(i)}}}{G_{\lambda^{(i-1)}}\{2\delta_1\eta(t)+1;\ 2\delta_1\}}$$

とおく．

d) $p=r$ で b) でも c) でもない場合． $\lambda_t^{(i-1)}=\lambda_t^{(i)}-\delta_1$ 及び $\lambda_s^{(i)}=\lambda_s^{(i+1)}-\delta_2$ となる t, s, δ_1, δ_2 を用いて

$$(A_i)_{pp} = -\frac{\alpha^{\delta_2-\delta_1} q^{\delta_2\eta(s)-\delta_1\eta(t)}}{\{\delta_1\eta(t)-\delta_2\eta(s);\ \delta_1-\delta_2\}} \qquad \text{とおく．}$$

e) $p\fallingdotseq r$ で $\lambda^{(i-1)}\fallingdotseq\lambda^{(i+1)}$ の場合． $\lambda_t^{(i-1)}=\lambda_t^{(i)}-\delta_1$ 及び $\lambda_s^{(i)}=\lambda_s^{(i+1)}-\delta_2$ となる r, t, δ_1, δ_2 を用いて

$$(A_i)_{rp}=\frac{\sqrt{\{\delta_1\eta(t)-\delta_2\eta(s)+1;\ \delta_1-\delta_2\}\{\delta_1\eta(t)-\delta_2\eta(s)-1;\ \delta_1-\delta_2\}}}{\{\delta_1\eta(t)-\delta_2\eta(s);\ \delta_1-\delta_2\}}$$

f) $p\fallingdotseq r$ で $\lambda^{(i-1)}=\lambda^{(i+1)}$ の場合． $\lambda_t^{(i-1)}=\lambda_t^{(i)}-\delta_1$ 及び $\nu_s^{(i-1)}=\nu_s^{(i)}-\delta_2$ となる t, s, δ_1, δ_2 を用いて

$$(A_i)_{rp} = -\frac{\alpha^{-\delta_1-\delta_2} q^{-\delta_1\eta(t)-\delta_2\eta(s)-1}\sqrt{G_{\lambda^{(i)}} G_{\nu^{(i)}}}}{G_{\lambda^{(i-1)}}\{\delta_1\eta(t)+\delta_2\eta(s)+1;\ \delta_1+\delta_2\}}$$

とおく．

以上で $A_i\in\mathrm{End}(V_\lambda)$ が定義された．

定理 λ を $\Lambda_2(n)$ に含まれる分割とする．このとき次が成り立つ．

(i) $C_n(\alpha, q)$ の V_λ 上への表現 ρ_λ で $\rho_\lambda(\tau_i)$ が上で定義した A_i となるものがある．

(ii) 表現 ρ_λ は既約表現である．

(iii) $\lambda, \nu \in \Lambda_2(n)$ に対し，$\lambda \neq \nu$ ならば ρ_λ と ρ_ν とは同値ではない．

(iv) $C_n(\alpha, q)$ の既約表現はある ρ_λ ($\lambda \in \Lambda_2(n)$) に同値である．

3． link の不変量との関係

ここでは Section 2 で得られた既約表現の指標を用いて Kauffman 多項式と呼ばれている link の不変量をあらわす公式を述べる．B_n により n-1 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ を持つブレイド群をあらわす．ブレイド b に対してそのひもの上端と下端とを交わらないように順につないでやることにより，絡み目が得られる．これを b^ であらわす．

さて，$p_n : \mathbb{C}(\alpha, q)B_n \longrightarrow C_n(\alpha, q)$ を $p_n(\sigma_i) = (\alpha^2 q)^{-1}\tau_i$ でさだまる algebra 準同型とする．$b \in B_n$ に対し

$$F_n(b) = \left(\frac{\alpha^2 q - \alpha^{-2}q^{-1}}{q - q^{-1}}\right)^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_2(n)} G_\lambda \chi_\lambda(p_n(b))$$

とおく．但し χ_λ は Section 2 での表現 ρ_λ の指標である．

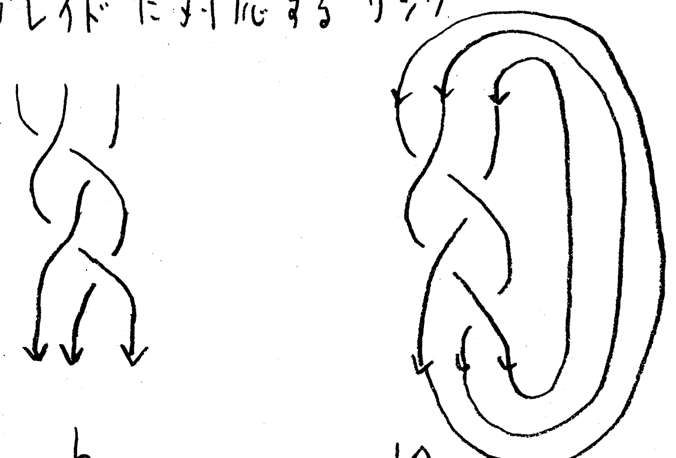
定理 $b \in B_n$ とし，b^ を b からさだまる link とする．
F(b^) = $F_n(b)$ とおく．するとFは link の Kauffman 多項式と一致する．
（Kauffman 多項式については [1], [8] を参照）

なお，二変数 Jones 多項式を Iwahori-Hecke algebra の指標であらわす公式は，[3] 及び [7] で得られている．

REFERENCES

1. J. S. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, preprint.
2. R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. of Math. **38** (1937), 854–872.
3. A. Gyoja, *Topological invariants of links and representations of Hecke algebras II*, preprint, Osaka University.
4. P. N. Hoefsmit, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN–pairs of classical type*, thesis, The University of British Columbia.
5. M. Jimbo, *A q–difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
6. M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Solvable lattice models related to the vector representation of classical Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.
7. V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335–388.
8. J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math **24** (1987), 745–758.
9. J. Murakami, *The representations of the q–analogue of Brauer's centralizer algebras and the Kauffman polynomial of links*, preprint.
10. T. G. Turaev, *The Yang–Baxter equation and invariants of links*, Invent. math. **92** (1988), 527–553.
11. H. Wenzl, *Representation of Hecke algebras and subfactors*, Invent. math. **92** (1988), 349–383.
12. H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebra*, preprint.

ブレイドに対応するリンク



b　　　$\hat{b}$