数理解析研究所講究録
670巻 1988年 233-250

shifted plane partitionの母関数

東大 理 岡田 聡一 (Soichi Okada)

§0 Introduction.

(shifted) plane partition の母関数を用いて，別の対象の母関数や個数を求めることがよくある．ここでは，partially strict shifted plane partition の母関数と，その応用として monotone triangle の母関数について述べたい．

まず，<u>shifted plane partition</u> とは，自然数 a_{ij} を

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,\mu_1} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,\mu_2} \\ & & \ddots & & \\ & & a_{rr} & \cdots & a_{r,\mu_r} \end{matrix}$$

のように並べたもので

(i) $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_r$

(ii) $a_{ij} \geqq a_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq r,\ i \leqq j \leqq \mu_i - 1)$

(iii) $a_{i,j} \geqq a_{i+1,j}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ i+1 \leqq j \leqq \mu_{i+1})$

をみたすもののことをいう．このような π に対して，$sh(\pi) = (\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2, \cdots, \mu_r - r + 1)$ を π の <u>shape</u>， $pr(\pi) = (a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{rr})$ を π の <u>profile</u> という．

定義　A, Bを，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\mathbb{N}(=\{1,2,3,\cdots\})$となる$\mathbb{N}$の部分集合とする．shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$は，次の条件(P1)，(P2)をみたすとき，(A, B)-partially strict であるという．

(P1)　各$m\in A$に対して，mは1行に高々1回しか現れない．

(P2)　各$m\in B$に対して，mは1列に高々1回しか現れない．

$sh(\pi)=\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r>0)$，$pr(\pi)=a=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ $(a_1>a_2>\cdots>a_r>0)$となる(A, B)-partially strict shifted plane partition π全体を$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$とおく．変数$z_1, z_2, \cdots$を導入し，shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$に対して，$z^{\pi}=\prod_{i,j} z_{a_{ij}}$と書く．そして，$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$の母関数

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a), z)=\sum_{\pi\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)} z^{\pi}$$

を考える．(§1)　例えば，$A=\{1,2\}$，$B=\mathbb{N}-A$，$\lambda=(3,2)$，$a=(3,2)$のとき，

$$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)=\left\{\begin{matrix}3&3&3\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&3&2\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&3&1\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&2&1\\&2&1\end{matrix}\right\},$$

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a), z)=z_1z_2z_3^3+z_1z_2^2z_3^2+z_1^2z_2z_3^2+z_1^2z_2^2z_3.$$

次に，monotone triangle とは，自然数t_{ij}を

$$T=\begin{matrix}t_{11}&&t_{12}&&t_{13}&&\cdots&&t_{1,r}\\&t_{21}&&t_{22}&&\cdots&&t_{2,r-1}&\\&&\ddots&&&&\iddots&&\\&&&&t_{r,1}&&&&\end{matrix}$$

の形に並べたもので，

(M1) $t_{ij} > t_{i\,j+1}$ $\quad (1 \leqq i \leqq r-1,\ 1 \leqq j \leqq r-i)$

(M2) $t_{ij} \geqq t_{i+1,j} \geqq t_{i\,j+1}$ $\quad (1 \leqq i \leqq r-1,\ 1 \leqq j \leqq r-i)$

をみたすもののことをいう．このようなTに対して

$$sp(T) = \#\{(i,j) : t_{i-1,j} > t_{ij} > t_{i-1,j+1}\}$$

$$min(T) = \#\{(i,j) : t_{i-1,j} > t_{ij} = t_{i-1,j+1}\}$$

とおき，変数 $x_1, x_2, \cdots$ に対して $m(T) = x_1^{s_1-s_2} x_2^{s_2-s_3} \cdots x_{r-1}^{s_{r-1}-s_r} x_r^{s_r}$ ($s_i = \sum_{j=1}^{r-i+1} t_{ij}$) と書く．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r)$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$) を第1行とするmonotone triangle 全体を $\mathfrak{M}(\lambda)$ とし，$\mathfrak{M}(\lambda)$ の"重みつき"母関数

$$M(\lambda) = \sum_{T \in \mathfrak{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{min(T)} m(T)$$

を考える．(§3)　例えば，$\lambda = (3,2,1)$ のとき，

$\mathfrak{M}(\lambda)$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\3\,2\\3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\3\,2\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\3\,1\\3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\3\,1\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\3\,1\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\2\,1\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\,2\,1\\2\,1\\1\end{matrix}$
$sp(T)$	0	0	0	1	0	0	0
$min(T)$	0	1	1	1	2	2	3

だから

$$M(\lambda) = x_1 x_2^2 x_3^3 + t x_1 x_2^3 x_3^2 + t x_1^2 x_2 x_3^3 + t(1+t) x_1^2 x_2^2 x_3^2 + t^2 x_1^2 x_2^3 x_3 + t^2 x_1^3 x_2 x_3^2 + t^3 x_1^3 x_2^2 x_1.$$

以下では，$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a), z)$ を行列式の形に表し，それを用いて $M(\lambda)$ の簡単な表示を導いていく．(詳しくは[Ok2] を参照されたい)

§1 (A, B)-partially strict shifted plane partitionの母関数

A, Bを，$A\cap B=\phi$, $A\cup B=\mathbb{N}$となる$\mathbb{N}$の部分集合とする．$z_1,\cdots,z_n$の多項式$\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)$を，母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)t^k=\frac{\prod_{i\in A\cap[n]}(1+z_it)}{\prod_{j\in B\cap[n]}(1-z_jt)}\qquad([n]=\{1,2,\cdots,n\})$$

によって定義する．すると，$\lambda=(k)$, $a=(n)$に対して，$\mathcal{S}_{A,B}((k);(n))$の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}((k);(n)),z)=\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)-\tilde{q}^{(n-1)}_{A,B,k}(z)$$

となる．より一般のλ，aに対して$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)$は次の形に表される．

<u>定理 1.</u> $\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)(a_1>\cdots>a_r>0)$に対して，$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)=\det\left(\tilde{q}^{(a_j)}_{A,B\,\lambda_i}(z)-\tilde{q}^{(a_j-1)}_{A,B,\lambda_i}(z)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

で与えられる．

例えば，$A=\{1,2\}$，$B=\mathbb{N}-A$．$\lambda=(3,2)$，$a=(3,2)$のとき(§0で与えた例)，

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)=\det\begin{pmatrix} z_1z_2z_3+z_1z_3^2+z_2z_3^2+z_3^3-0 & 0-0 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3+z_3^2-z_1z_2 & z_1z_2-0\end{pmatrix}$$

$$=z^{\begin{pmatrix}3&3&3\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&3&2\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&3&1\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&2&1\\&2&1\end{pmatrix}}.$$

定理1において，$A=\mathbb{N}, B=\phi$，または，$A=\phi, B=\mathbb{N}$ のときを考える．$A=\mathbb{N}, B=\phi$ [resp. $A=\phi, B=\mathbb{N}$] のとき，$\pi=(a_{ij})$ に対する (A,B)-partially strict shifted plane partition の条件(P1)，(P2)は，$a_{i,j}>a_{i,j+1}\ (\forall i,j)$ [resp. $a_{i,j}>a_{i+1,j}\ (\forall i,j)$] ということであり，この条件をみたすとき，$\pi$ は row-strict [resp. column-strict] であるという．$sh(\pi)=\lambda$，$pr(\pi)=a$ となる row-strict [resp. column-strict] shifted plane partition π 全体を $\mathcal{R}(\lambda:a)$ [resp. $\mathcal{C}(\lambda:a)$] とおく：

$$\mathcal{R}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda:a),\quad \mathcal{C}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda:a)$$

系1．$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\ (\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)\ (a_1>\cdots>a_r>0)$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{R}(\lambda:a)} z^{\pi}=\det\left(e_{\lambda_i}^{(a_j)}(z)-e_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z)\right)_{1\le i,j\le r}$$
$$\sum_{\pi\in\mathcal{C}(\lambda:a)} z^{\pi}=\det\left(h_{\lambda_i}^{(a_j)}(z)-h_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z)\right)_{1\le i,j\le r}$$

ここで，$e_k^{(n)}(z)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ は n 変数 k 次 elementary symmetric function，$h_k^{(n)}(z)=\sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k\le n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ は n 変数 k 次 complete symmetric function である．

ここでさらに $z_i=q^i$ と代入すると，$\mathcal{R}(\lambda:a)$，$\mathcal{C}(\lambda:a)$ の一変数母関数が得られる

系2　shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$ に対して, $|\pi|=\sum_{i,j} a_{ij}$ と書くことにすると

$$\sum_{\pi\in\mathcal{R}(\lambda:a)} q^{|\pi|} = \det\left(q^{a_j+\binom{\lambda_i}{2}} \begin{bmatrix} a_j-1 \\ \lambda_i-1 \end{bmatrix}\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{C}(\lambda:a)} q^{|\pi|} = \det\left(q^{a_j+\lambda_i-1} \begin{bmatrix} a_j+\lambda_i-2 \\ \lambda_i-1 \end{bmatrix}\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

ここで, $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ は Gauss 多項式(q-2項係数)である:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \dfrac{1-q^{n-i+1}}{1-q^{i}} & (0\leqq m\leqq n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この結果は, 対称性をもつ plane partition の個数, 母関数を求める上で重要である. ([An], [MRR1], [Ok1])

定理1と類似の結果が, plane partition についても成り立つ.

plane partition

$$\pi = \begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\lambda_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\lambda_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\lambda_r} & \end{array}$$

ただし (0) $a_{ij}\in\mathbb{N}$
(i) $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_r$
(ii) $a_{ij}\geqq a_{i,j+1}$
(iii) $a_{ij}\geqq a_{i+1,j}$

は, 次の条件(P1), (P2) をみたすとき, (A, B)-partially strict であるという. ($A\cap B=\phi$, $A\cup B=\mathbb{N}$)

(P1) 各 $m\in A$ に対して, m は1行に高々1回しか現れない.

(P2) 各 $m\in B$ に対して, m は1列に高々1回しか現れない.

上の π に対して, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ を π の shape といい, $sh(\pi)$ で表す.

$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)$ $(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_r>0)$ と $N\in\mathbb{N}$ が与えられたとき，$sh(\pi)=\lambda$，$a_{ij}\leqq N(\forall i,j)$ となる (A,B)-partially strict plane partition $\pi=(a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda;\leqq N)$ とすると，その母関数は次の定理で与えられる．ただし，$k<0$ のとき $\tilde{g}^{(N)}_{A,B,k}(z)=0$ とする．

定理 2　plane partition $\pi=(a_{ij})$ に対して $z^\pi=\prod_{i,j} z_{a_{ij}}$ と書くと，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{A,B}(\lambda;\leqq N)} z^\pi=\det\left(\tilde{g}^{(N)}_{A,B,\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

特に，$A=\mathbb{N}$, $B=\phi$; $A=\phi$, $B=\mathbb{N}$ のときを考えると，

系

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda;\leqq N)} z^\pi=\det\left(e^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda;\leqq N)} z^\pi=\det\left(h^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

この系は，Jacobi-Trudi identity として知られている．

この節については[Ok3] も参照されたい．

§2 Diagonal-strict shifted plane partition

$E=\{$偶数$\}$，$O=\{$奇数$\}$とおく．(E,O)-partially strict shifted plane partition と monotone triangle を，diagonal-strict shifted plane partition によって結びつける．

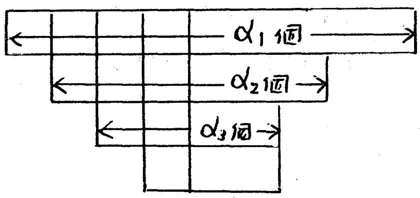
shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$ は，$a_{ij}>a_{i+1,j+1}(\forall i,j)$ をみた

すとき，<u>diagonal-strict</u>であるという．$sh(\pi)=\lambda$，$pr(\pi)=\alpha$ となる diagonal strict shifted plane partition 全体を $\mathcal{D}(\lambda:\alpha)$ とする．この節では，$\mathcal{D}(\lambda:\alpha)$ の重みつき母関数を考えるが，そのために必要な言葉を用意しておく．

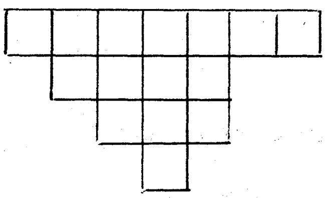
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ を distinct partition とする．つまり，$\alpha_i\in\mathbb{Z}$，$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{\ell(\alpha)}>\alpha_{\ell(\alpha)+1}=\cdots=\alpha_n=0$ とする．($0=(0,0\cdots 0)$ も distinct partition とする) この α に対して，

$$S(\alpha)=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ 1\leqq i\leqq\ell(\alpha),\ i\leqq j\leqq\alpha_i+i-1\}$$

とおき，α の <u>shifted diagram</u> という．Young 図形と同様，箱を並べて $S(\alpha)$ を表すが，Young 図形とは違って左端を1つずつずらせて並べる：



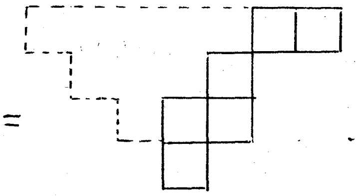
例えば，$\alpha=(7,4,3,1)$ のとき，

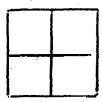
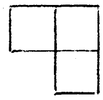
$S(\alpha)=$ 

また，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$ を，$\alpha_i\geqq\beta_i\ (i=1,\cdots,n)$ となる distinct partition とするとき，

$$S(\alpha/\beta)=S(\alpha)-S(\beta)$$

とおいて，skew shifted diagram という．例えば，$\alpha=(7,4,3,1)$ $\beta=(5,3,1)=(5,3,1,0)$ のとき，

$S(\alpha/\beta)=$  .

skew shifted diagram $S(\alpha/\beta)$は，連結であり，，を含まないとき，rim hook であるという．上の例の$S(\alpha/\beta)$は連結ではないが，その各連結成分(2つ)はrim hook である．

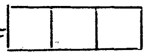
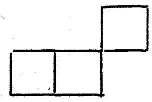
さて，shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$に対して，$sh_k(\pi)$を，その第i成分$sh_k(\pi)_i=\mathrm{Max}\{j\,;\,a_{ij}\geqq k\}-i+1$（$\pi$の第$i$行に書かれているk以上の数字の個数）であるpartitionとする．例えば，

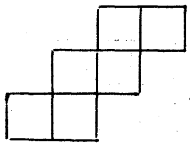
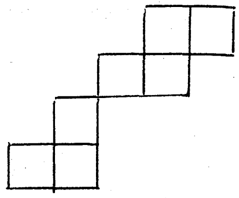
$$\pi=\begin{matrix} 4&4&4&3&2&2&1&1\\ &3&3&2&2&1&1&\\ &&2&2&1&&&\\ &&&1&1&&& \end{matrix}$$

のとき，

$$sh_1(\pi)=(8,6,3,2)\ (=sh(\pi)),\quad sh_2(\pi)=(6,4,2)$$
$$sh_3(\pi)=(4,2),\quad sh_4(\pi)=(3).$$

もし，πがdiagonal strictならば，skew shifted diagram $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$（$\pi$で数字$k$が書かれている場所を□で置きかえたもの）の各連結成分はrim hook となることがわかる．上の例のπはdiagonal-strictであり，

$S(sh_4(\pi)/sh_5(\pi))=$ , $S(sh_3(\pi)/sh_4(\pi))=$ 

$S(sh_2(\pi)/sh_3(\pi))=$ , $S(sh_1(\pi)/sh_2(\pi))=$ 

そこで，$S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$の連結成分を$\rho_1^{(k)},\cdots,\rho_{h_k}^{(k)}$とし，

$$h(\pi)=\sum_k h_k$$
$$f(\pi)=\sum_k\sum_{j=1}^{h_k}(\rho_j^{(k)}\text{の占める行数})$$

とおく．上の例のπでは，

$$h(\pi)=6,\qquad f(\pi)=10.$$

そして，$\mathscr{D}(\lambda:a)$の母関数として

$$\sum_{\pi\in\mathscr{D}(\lambda:a)}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}x^{\pi}$$

を考える。

(E,O)-partially strict shifted plane partitionとdiagonal-strict shifted plane partitionとの関係をみるために，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)$ $(a_1>\cdots>a_r>0)$に対して，

$$\widetilde{\mathscr{D}}(\lambda:a)=\bigsqcup_b \mathscr{S}_{E,O}(\lambda;b)$$

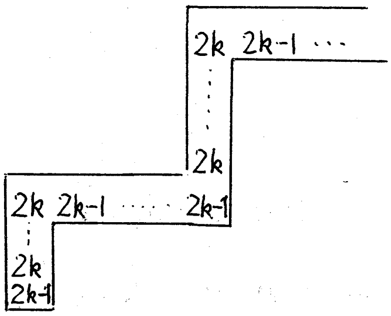
(ここで，$b=(b_1,\cdots b_r)$は$b_i=2a_i$または$2a_i-1$ $(i=1,\cdots r)$となるdistinct partition全体を動く)とおく．そして，$\sigma\in\widetilde{\mathscr{D}}(\lambda:a)$に対して，$\sigma$に書かれている数字$2k, 2k-1$を全て$k$で置きかえた$(k=1,2,\cdots)$ものを$P(\sigma)$とする．すると，$\sigma$が(E,O)-partially strictであることから$P(\sigma)$はdiagonal-strictとなり，$P(\sigma)\in$

$\mathcal{D}(\lambda:a)$となることがわかる．よって，写像$P:\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)\longrightarrow \mathcal{D}(\lambda:a)$が定まるが，この写像について次の命題が成り立つ．

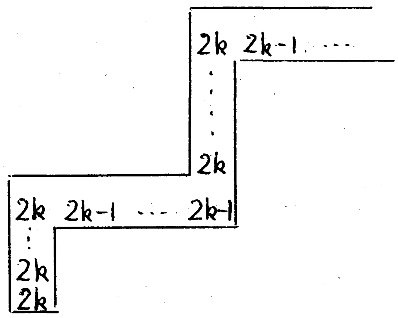
<u>命題 1</u>　$\pi\in\mathcal{D}(\lambda:a)$に対して，

$$\sum_{\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)_{e,t}\ P(\sigma)=\pi} t^{e(\sigma)}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}t^{f(\pi)}$$

ここで，$e(\sigma)$はσに書かれている数字のうちの偶数の個数である．より詳しく，$P(\sigma)=\pi$となる$\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)$は，数字$k$が書き込まれているskew shifted diagram $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$の各連結成分(rim hookになっている)に



または



と数字$2k-1$, $2k$を書き込む(各$k=1,2,\cdots$と各連結成分に対して行う)ことによって全て得られる．

これによって，$\mathcal{D}(\lambda:a)$の重みつき母関数は

$$\sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda:a)}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}x^{\pi}=\left(\sum_{\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)} z^{\sigma}\right)\Bigg|_{\substack{z_{2i-1}=x_i,\\ z_{2i}=-tx_i}}$$

$$=\sum_{b}F(\mathcal{S}_{E,O}(\lambda:b),z)\Bigg|_{\substack{z_{2i-1}=x_i\\ z_{2i}=-tx_i}}$$

($b=(b_1,\cdots b_r)$は$b_i=2a_i$または$2a_i-1$ $(i=1,\cdots r)$となるpartitionを動く)

と書き直される．ここで，定理1の行列式表示を用いると，次の定理が得られる．

定理3． $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$, $a=(a_1,\cdots,a_r)(a_1>\cdots>a_r>0)$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda;a)}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}x^{\pi}=\det\left(g_{\lambda_i}^{(a_j)}(x;t)-g_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(x;t)\right)$$

ここで，$g_k^{(n)}(x;t)$ は，$x_1,\cdots,x_n,t$ の多項式で，母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(n)}(x;t)y^k=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iy}{1-x_iy}$$

で定義される．

この定理の $t=-1$ の場合を用いると，Hall-Littlewood多項式 $Q_\lambda(x_1,\cdots,x_N;-1)$ の recursive formula が得られる．distinct partition $\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_N)$ $(\lambda_1>\cdots>\lambda_{\ell(\lambda)}>\lambda_{\ell(\lambda)+1}=\cdots=\lambda_N=0)$ に対して，$Q_\lambda(x_1,\cdots,x_N;-1)$ は，

$$Q_\lambda(x;-1)=2^{\ell(\lambda)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_N}w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_N^{\lambda_N}\prod_{i<j}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)$$

によって定義されるが，shifted plane partition を用いて

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{N\geqq a_1>a_2>\cdots>a_{\ell(\lambda)}\geqq 1}\ \sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda;a)}2^{h(\pi)}x^{\pi}$$

と表すこともできる．([Mac, Chap III]) よって，定理3と[Ok.1]の小行列の和の公式を用いると，

<u>命題 2</u>([Sch]) $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$ とする.

(1) r が奇数のとき,

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}Q_{\lambda_i}(x;-1)\,Q_{\lambda^{(i)}}(x;-1)$$

ここで, $\lambda^{(i)}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_r)$

(2) r が偶数のとき

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{i=2}^{r}(-1)^{i}Q_{(\lambda_1,\lambda_i)}(x;-1)\,Q_{\lambda^{(1,i)}}(x;-1)$$

ここで, $\lambda^{(1,i)}=(\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_r)$

§3 Monotone triangle

定理3を用いて, $\mathcal{M}(\lambda)$ の重みつき母関数 $M(\lambda)$ を求めることができる.

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$ とし, $\delta_r=(r,r-1,\cdots,2,1)$ とおく. このとき, 全単射 $\Phi:\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)\longrightarrow\mathcal{M}(\lambda)$ が次のようにして得られる. $\pi\in\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)$ に対して, $pr(\pi)=\delta_r$ より $sh_k(\pi)$ は長さ $r-k+1$ の distinct partition となるから, $sh_k(\pi)=(t_{k1},\cdots,t_{k,r-k+1})$ とし,

$$T=\begin{array}{ccccccc} t_{11} & t_{12} & & \cdots & & t_{1,r} \\ & t_{21} & & \cdots & t_{2,r-1} & \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & & t_{r1} & & \end{array}$$

と並べると, T が monotone triangle となることがわかる. また, この対応 $\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)\ni\pi\longmapsto T\in\mathcal{M}(\lambda)$ が全単射となることもわかる. さらに, この全単射 Φ に対して次の命題が成り立つ

命題3. $\pi \in \mathcal{D}(\lambda;\delta_r)$に対して,

$$m(\Phi(\pi)) = x^{\pi}, \qquad sp(\Phi(\pi)) = h(\pi) - r$$

$$\min(\Phi(\pi)) = f(\pi) - h(\pi)$$

例えば

$$\pi = \begin{array}{ccccccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & \\ & & 2 & 2 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & & \end{array}$$

のとき

$$\Phi(\pi) = \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 2 \\ & 6 & 4 & 2 \\ & & 4 & 2 \\ & & & 3 \end{array}$$

であり,

$$h(\pi) = 6, \qquad f(\pi) = 10$$

$$sp(\Phi(\pi)) = 2, \qquad \min(\Phi(\pi)) = 4$$

命題3を用いると, $\mathcal{M}(\lambda)$の重みつき母関数は

$$M(\lambda) = \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{\min(T)} m(T)$$

$$= (1+t)^{-r} \sum_{\pi \in \mathcal{D}(\lambda;\delta_r)} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} t^{f(\pi)} x^{\pi}$$

となる. ここで, 定理3を用いると

$$M(\lambda)=\det\left((1+t)^{-1}\left(g_{\lambda_i}^{(r-j+1)}(x;-t)-g_{\lambda_i}^{(r-j)}(x;-t)\right)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

この行列式を計算すると,

<u>定理4</u>([To]) $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$, $\lambda-\delta_{r-1}=(\lambda_1-r+1,\lambda_2-r+2,\cdots,\lambda_{r-1}-1,\lambda_r)$ とすると,

$$M(\lambda)=\prod_{1\leq i<j\leq r}(tx_i+x_j)\cdot s_{\lambda-\delta_{r-1}}(x_1,\cdots,x_r)$$

と表される. ここで, partition $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_r)$ $(\mu_1\geq\cdots\geq\mu_r\geq 0)$ に対して $s_\mu(x_1,\cdots,x_r)$ は Schur 関数

$$s_\mu(x_1,\cdots,x_r)=\det\left(h^{(r)}_{\mu_i-i+j}(x_1,\cdots,x_r)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

である.

$\lambda=\delta_r$ のとき, この定理は, alternating sign matrix を用いて次のように書き直すことができる. $r\times r$ 行列 $A=(a_{ij})$ は, 次の条件(A1), (A2), (A3)をみたすとき, r 次<u>alternating sign matrix</u> という

(A1) $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(i,j=1,\cdots,r)$

(A2) $\sum_{i=1}^{r}a_{ij}=1$ $(j=1,\cdots,r)$, $\sum_{j=1}^{r}a_{ij}=1$ $(i=1,\cdots,r)$

(A3) 各行, 各列では 1, −1 が(0を無視して)交互に現れる.

r 次 alternating sign matrix の全体を $\mathcal{A}_r$ とおく. $A=(a_{ij})\in\mathcal{A}_r$ に対して,

$$s(A)=(A\text{中の}-1\text{の個数}),\qquad i(A)=\sum_{i<k,\,j>l}a_{ij}a_{kl}$$

とおく. 例えば, $s(A)=0$ である alternating sign matrix A は置換行列に他ならないし, このとき $i(A)$ は A に対応する置換の転倒数である. また, $r=3$ のとき,

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathcal{A}_3=\{ & \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}&1&\\1&-1&1\\&1&\end{pmatrix}\} \\
i(A) & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2
\end{array}
$$

このとき, $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ と $\mathcal{A}_r$ の間には, 自然な全単射が存在する. $T=(t_{ij})\in\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ に対して, $r\times r$ 行列 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})$, $A=(a_{ij})$ を

$$
\widetilde{a}_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{ある } k \text{ に対して } j=t_{i,k} \text{ となるとき}) \\ 0 & (\text{その他})\end{cases}
$$

$$
a_{ij}=\begin{cases}\widetilde{a}_{ij}-\widetilde{a}_{i+1,j} & (i=1,\cdots r-1) \\ a_{ij} & (i=r)\end{cases}
$$

とおいて定めると, $A\in\mathcal{A}_r$ であり, 対応 $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)\ni T\longmapsto A\in\mathcal{A}_r$ が全単射であることがわかる. 例えば,

$$
T=\begin{array}{ccccccc}4&&3&&2&&1\\&4&&2&&1&\\&&3&&2&&\\&&&2&&&\end{array}
$$

に対して,

$$
\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&-1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}
$$

となる. さらに, この対応で $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)\ni T\longleftrightarrow A\in\mathcal{A}_r$ と対応して

いるとすると,

$$s(A) = sp(T), \qquad i(A) = sp(T) + \min(T).$$

$r \times r$ 行列 $M = (m_{ij})$ $(m_{ij} \neq 0)$ と $A \in \mathcal{A}_r$ に対して, $M^A = \prod_{i,j} m_{ij}^{a_{ij}}$ と書くことにすると, 定理4を $\lambda = \delta_r$ のときに用いることにより,

命題4([RR],[To]) $M = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq r}$ に対して,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_r} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (t x_i + x_j)$$

$t = -1$ のときを考えると, $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{A}_r} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A \Big|_{t=-1} = \det M$ であり, 上の命題は

$$\det(x_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_j - x_i)$$

となる. また, 上の命題で $x_1 = \cdots = x_r = 1$, $t = 1$ とおくと,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_r} 2^{s(A)} = 2^{\binom{r}{2}}$$

この左辺の2を1に変えることができれば, $r \times r$ alternating sign matrix の個数 $|\mathcal{A}_r|$ がわかるが, $|\mathcal{A}_r|$ については次の予想がある.

予想([MRR2])

$$|\mathcal{A}_r| = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{(3i+1)!}{(r+i)!}$$

参考文献

[An] G.E. Andrews: Plane partitions (III), Invent. Math. 53 (1979)

[Mac] I.G. Macdonald: Symmetric Functions and Hall Polynomials Oxford Univ. Press,

[MRR1] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H Rumsey. Jr.: Proof of the Macdonald conjectures, Invent. Math. 66 (1982)

[MRR2] ———: Alternating sign matrices and descending plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A 34 (1983)

[Ok1] S. Okada: On the generating functions for certain classes of plane partitions, to appear in J. Combin. Theory. Ser A

[Ok2] ———: Partially strict shifted plane partitions, to appear

[Ok3] ———: ある種の平面分割の母関数について, 数理研講究録「代数的組合せ論」(1988)

[RR] D.P. Robbins and H. Rumsey. Jr: Determinants and alternating sign matrices, Adv. in Math 62 (1986)

[Sch] I. Schur: Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen J. Reine. Angew. Math 139 (1911)

[To] T. Tokuyama: A generating function for strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups., to appear in J. of Math. Soc. Japan.