

Young tableaux をめぐって — GL の幾何と表現論 II

東大・理 松澤淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

flag variety と Robinson-Schensted 対応の関係について
の寺田氏の報告の続きとして, Springer 表現の構成
に出てくる 'fixed point variety' と呼ばれる flag
variety の部分多様体 (fixed point variety という呼ば方は
必ずしも広く流通した呼ば方ではないが, ここでは便宜上
こう呼ぶことにする。) の構造に Robinson-Schensted 対応が
かかわり合っている事を示した R. Steinberg の論文 [2] の
紹介をする。(言葉の定義等は寺田氏の報告に詳しいので,
ここでは繰り返しを避けた。)

1.

V を \mathbb{C} 上の n 次元ベクトル空間とし, X をその flag
variety とする。 u を $GL(V)$ の unipotent 元とし,

$$X^u := \{ F \in X \mid u \cdot F = F \}$$

とすると X^μ は, μ -stable な V の部分空間の列からなる flag 全体の作る X の閉部分多様体となる。これを fixed point variety と呼ぶことにする。

さて X^μ の元 $F = (V_0, V_1, \dots, V_m)$ から次の様にして Young tableau を作ることをできる。

$\mu|_{V_i}$ の Jordan 標準形の block の大きさを大きい順に並べてできる大きさ i の Young 図形を $\lambda^{(i)}$ とすると, 大きさが 1 つずつ増える Young 図形の列

$$\phi = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots \subset \lambda^{(m)} = \lambda$$

を得る。Young 図形 λ の $\lambda^{(i)} \setminus \lambda^{(i-1)}$ の部分に数字 i を書き込んでできる tableau を $T(F)$ とすると, その作り方から, $T(F)$ は standard tableau となる。こうして X^μ の元に standard tableau を対応させることができる。

(例 1) $n=3$, $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$
 $e_3 = (0, 0, 1)$ とし, flag $F \in$

$$F = ((0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle)$$

とすると.

$$\lambda^{(1)} = \square, \quad \lambda^{(2)} = \square, \quad \lambda^{(3)} = \square$$

よって $T(F) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$.

また $F' = (\langle e_1 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle)$ とすると.

$$\lambda^{(1')} = \square, \quad \lambda^{(2')} = \square, \quad \lambda^{(3')} = \square$$

よって $T(F') = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$.

T を shape λ の standard tableau とし, $\mu \in \mathfrak{S}_n$ の λ の unipotent 元 とする (すなわち μ の Jordan 標準形の block を並べてできる Young 図形が λ とする)

$$C(T) := \{ F \in X^\mu \mid T(F) = T \}$$

とすると X^μ は.

$$X^\mu = \bigsqcup_{T: \text{shape } \lambda \text{ の Standard tableau}} C(T)$$

と分割される. しかも 閉包 $\overline{C(T)}$ は X^μ の 既約成分 とする.

(例 2). $\lambda = \square$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$, $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

このとき.

$$C(T) = \{ (0), \langle k e_1 + l e_3 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid k, l \in \mathbb{C} \}.$$

また $T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ とすると.

$$C(T') = \{ (0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 + m e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid m \in \mathbb{C} \}.$$

2.

$F = (V_0, V_1, \dots, V_m)$, $F' = (V'_0, V'_1, \dots, V'_m)$ を2つの flag とすると, ある m 次対称群の元 w と, V の基底 v_1, v_2, \dots, v_m で, 次の条件を満たすようなものかといえる。すなわち,

$\{v_1, \dots, v_i\}$ は V_i の基底であって,

$\{v_{w(i)}, \dots, v_{w(i)}\}$ は V'_i の基底となる。 ($1 \leq i \leq m$)

さらにこのような元 w は唯一つに決まる。このとき F, F' は relative position w にありといる。この $w \in \underline{w(F, F')}$ と書くことにする。

(注). 一般に, G を reductive で連結な線形代数群とし, B をその Borel 部分群とする。 G は $G/B \times G/B$ に左からの掛け算で作用する。

$$g \cdot (g_1 B, g_2 B) = (gg_1 B, gg_2 B)$$

このとき、各 G -orbit は Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ (T は B の maximal torus, $N_G(T)$ は T の G 中での正規化群) の元と次のように 1対1 に対応する。

$(g_1 B, g_2 B)$ は $(B, g_1^{-1} g_2 B)$ と同じ G -orbit にある。Bruhat の補題より $g_1^{-1} g_2 \in B \dot{\cup} B$ となる W の元 w が唯一つ存在する。(ただし \dot{w} は w の $N_G(T)$ での代表元) このようにして $G/B \times G/B$ の元に対して W の元が対応するが、実は、これは G -orbit と W の元との 1対1 対応を与えている。
このとき $g_1 B, g_2 B$ は relative position w にあるという。

$G = GL(n, \mathbb{C})$ の場合, G は flag variety に可移に作用し, その 1葉の固定群を B とすると, B は G の Borel 部分群で, flag variety は G/B と同一視される。そして, G の Weyl 群は n 次対称群と同型である。このような設定で, relative position の定義を flag の言葉で言い換えると上のようになる。

3.

1 から n までの数字が書き込まれた, 同じ shape の 2 つの standard tableaux T, T' に対して, Robinson-

Schensted 対応: $w \rightarrow (p(w), \theta(w))$ によって n 次対称群の元 $w(T, T')$ を対応させることができる。具体的な手続は次のようにする。

数字 n の書き込まれた T' の箱をとり去る, それと同じ位置にある T の箱の数字を x とする。 x のあき行の 1 つ上の行において, x より小さい数字の中で最大のものがある箱に x を入れる。次に, そこにあった数字について, 同じことを, その上の行についても行う。これを繰り返して, 最後に 1 行目から追い出された数字を r とすると, $w(n) = r$ とする。次に, 数字 $n-1$ の書き込まれた T' の箱について同様の操作をして, $w(n-1)$ を得る。このようにして, $w(1), w(2), \dots, w(n)$ を得る。

$$w(T, T') = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ w(1), w(2), \dots, w(n) \end{pmatrix}$$

とすると, 対応 $w(T, T') \rightarrow (T, T')$ は Robinson-Schensted 対応となっている。

(例 3).

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{とすると,}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$w(3) = 1.$$

$$w(2) = 3.$$

$$\longrightarrow \left(\emptyset, \emptyset \right)$$

$$w(1) = 2.$$

$$\text{よって } w\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.

以上の準備の下で次の定理が得られる。

[定理] (Steinberg [2]).

$\mu \in \Gamma$ かつ λ の unipotent 元, T, T' を shape λ の standard tableaux, C, C' を T, T' に対応する X^μ の既約成分とする。 C, C' の適当な open set の元 F, F' に
対して

$$w(F, F') = w(T, T')$$

が成り立つ。

(例 4).

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{とする。}$$

(1312) より.

$$C(T) = \{ (0), \langle ke_1 + le_3 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid k, l \in \mathbb{C} \}$$

$$C(T') = \{ (0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 + me_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \mid m \in \mathbb{C} \}$$

$C(T)$ の元 v : $l \neq 0$ とする元 $F \in v$ とし, $C(T')$ の元 $F' \in v$.

$(0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 + me_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ とする.

$$v_1 = ke_1 + le_3 \ (l \neq 0), \quad v_2 = e_1, \quad v_3 = e_2 + me_3 \text{ とする}$$

$$F = (0), \langle v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$F' = (0), \langle v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

とすることから, F, F' は relative position $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ にある。

- 1313) より.

$$w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w(F, F') = w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とすることから.

参考文献

- [1] N. Spaltenstein, Classes unipotentes de sous-groupes de Borel, Lecture Notes in Math,

vol 946, Springer-Verlag, 1982.

[2] R. Steinberg, An occurrence of the Robinson-Schensted correspondence, *Journal of Algebra* 113, 523-528, 1988.

[3] R. Steinberg, On the desingularization of the unipotent variety, *Invent. Math.* 36, 209-224, 1976.