数理解析研究所講究録
672巻 1988年 74-83

Gaussian process の標準表現に関する一結果

熊大理　榎田倍之
(Masuyuki Hitsuda)

$(B, Y) = \{B(t), Y(t)\,;\, t \in [0,1]\}$ を Gaussian process とする。ここで，$Y(t) = \int_0^t y(u)\,du$, $E\int_0^1 |y(u)|\,du < \infty$, $E\,y(u) = 0$ とする。更に $\mathbb{B}_t(B) = \sigma\{B(s)\,;\, s \in [0,t]\}$, $\mathbb{B}_t(Y) = \mathbb{B}_t(y) = \sigma\{y(s)\,;\, s \in [0,t]\}$ *) とするとき，$B = \{B(t)\,;\, t \in [0,1]\}$ は $\mathbb{B}_t(B, y) = \mathbb{B}_t(B) \vee \mathbb{B}_t(y)$ に関して Brownian motion であると仮定する。以後，$H_t(X) = \text{linear span by } \{X(s)\,;\, s \le t\}$ を示すことにする。$t = 1$ のときには省略することもある($H(X) = H_1(X)$)。

次の問題を考察する。

$$X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0,1] \tag{0,1}$$

の標準表現を求めよ。

現段階では，この問題に対して完全な解答は得られていない。一つのアプローチと部分的な結果を紹介したい。

§1. Lemmas

最初の Lemma は innovation theorem として知られており，所期の問題をより具体的に考察するための足掛りを与える．

<u>Lemma 1.</u> (Kailath-Shiryaev). (0.1) で与えた Gaussian process $\{x(t) : t \in [0,1]\}$ に対して，

$$(1.1) \qquad \overline{B}(t) = x(t) - \int_0^t \hat{y}(u)du, \quad t \in [0,1]$$

但し $\hat{y}(u) = E[y(u) \mid \mathbb{B}_u(x)]$ ，は $\mathbb{B}_t(x)$-Brownian motion である．すなわち，$\{\overline{B}(t) ; t \in [0,1]\}$ の法則は Brown 運動と同じであり，

$$E[\overline{B}(t) \mid \mathbb{B}_s(x)] = \overline{B}(s) \qquad a.e. P, \quad , t \geqq s.$$

が成立する．

<u>Remark.</u> この Lemma により Gaussian process $X = \{x(t) ; t \in [0,1]\}$ の "1つの" innovation は，Brownian motion であることが判明する．実際 Lévy-Hida の標準表現を得ることは，$\{\mathbb{B}_t(x) ; t \in [0,1]\}$ に関する Gaussian martingale を列挙することと同等であり，$\{\overline{B}(t) ; t \in [0,1]\}$ がその martingale の1つになるのである．

<u>Corollary.</u> (I) (0.1)による $X = \{x(t)\}$ は次のように独立に分解できる：

(1.2) $$X(t) = \overline{B}(t) + \int_0^t \widehat{y_1}(u)du + \int_0^t \widehat{y_2}(u)du, \quad t \in [0,1],$$

ここで，$\widehat{y_1}(u) \in H_u(\overline{B})$，$\widehat{y_2}(u) \in H(\overline{B})^\perp \cap H_u(X)$，$u \in [0,1]$．

更に，

(1.3) $$E\left[\int_0^1 |\widehat{y_1}(u)|du + \int_0^1 |\widehat{y_2}(u)|du\right] < \infty.$$

(II) $$H_t(X) = H_t(\overline{B}) \oplus H_t(\widehat{y_2}), \quad \forall t \in [0,1].$$

(III) 積分核 $k = k(u,v)$ が存在して

$$\widehat{y_1}(u) = -\int_0^u k(u,v)\,d\overline{B}(v)$$

と書ける。

Proof. $\widehat{y_1}(u) = E[\widehat{y}(u) \mid \mathbb{B}_u(\overline{B})]$ とおく．Gauss であることから，

$$\widehat{y_1}(u) = P_u^{\overline{B}}\,\widehat{y}(u) = P_u^{\overline{B}}\,y(u)$$

が成立する． 但し，$P_u^{\overline{B}}$ は $H_u(\overline{B})$ への orthogonal projection である． このprojection は u 毎でなくても

$$\widehat{y_1}(u) = P^{\overline{B}}\,\widehat{y}(u) \qquad \text{但し } P^{\overline{B}} = P_1^{\overline{B}},$$

と書いてもよいことに注意しておこう． これは，$\widehat{y}(u)$ が $H(\overline{B}) \ominus H_u(\overline{B})$ と直交することからわかる． $\widehat{y_2}(u) = \widehat{y}(u) - y_2(u)$ が $H_u(\overline{B})$ 更に $H(\overline{B})$ と直交することは明らかである． 従って (1.2) の分解が示された． (1.3) は明らかであろう．

(II) も 分解 (1.2) から直ちに言える．

(III) は $\mathfrak{Y}_1(u)\in H_u(\overline{B})$ であり，Wiener 積分で表わされることから明らかである。

この Lemma の事実は Stricker (1983) に主張されているが，その証明はいささか冗長である.

さて，一般の Gauss 過程 $X=\{X(t)\,;\,t\in[0,1]\}$ が与えられたとき，その linear span $H(X)$ または $H_t(X)$ を確定することは難しい． Brown 運動 $\{B(t)\,;\,t\in[0,1]\}$ については，Wiener 積分の全体であること，つまり

$$H(B)=\left\{\int\alpha\,dB\;;\;\alpha\in\mathcal{L}^2[0,1]\right\},$$

$$H_t(B)=\left\{\int\alpha\,dB\;;\;\alpha=P_t\alpha\;,\;\alpha\in\mathcal{L}^2[0,1]\right\},$$

(但し，P_t は通常の projection
$$P_t\alpha(u)=0,\quad u\geq t,\qquad =\alpha(u),\quad u<t$$
を示す) はよく知られているが，これと同様のことが，次の性質を持つ Gauss 過程に関して言える： X の covariance function を $\Gamma_X(t,s)=E[X(t)X(s)]$, $t,s\in[0,1]$, とするとき，Γ_X が Γ_B と次の意味で同値であるときである．

<u>Definition</u>. 2つの covariance functions Γ_{X_1} と Γ_{X_2} が ある定数 $C>0$ に対して，$C\,\Gamma_{X_1}(t,s)-\Gamma_{X_2}(t,s)$

が非負値であるとき，Γ_{X_1} は Γ_{X_2} を <u>dominate</u> するという：記号 $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$. $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ かつ $\Gamma_{X_1} < \Gamma_{X_2}$ であるとき，Gauss <u>過程</u> X_1 と X_2（または covariance Γ_{X_1} と Γ_{X_2}）は <u>同値</u> であるという： 記号 $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$.

<u>Lemma 2</u> (Aronsjain 1950). $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ ならば，それらを再生核とするHilbert空間 $\mathcal{H}(X_1)$, $\mathcal{H}(X_2)$ の間に包含関係 $\mathcal{H}(X_1) \supset \mathcal{H}(X_2)$ が成立する。 特に $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ ならば $\mathcal{H}(X_1) = \mathcal{H}(X_2)$.

この Lemma 2 の系として，$\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ であるとき，

$$\delta : \Gamma_{X_1}(t,\cdot) \longmapsto \Gamma_{X_2}(t,\cdot)$$

は $\mathcal{H}(X_1)$ から $\mathcal{H}(X_2)$ の上への 1 : 1 線型写像 δ に拡張される。 このことと $H(X_i)$ と $\mathcal{H}(X_i)$ の間の自然な対応

$$X_i(t) \longmapsto \Gamma_{X_i}(t,\cdot) \quad , \quad i = 1, 2$$

が 1 : 1 , onto に拡張されることから，次の Lemma 3 がわかる：

$$\begin{array}{ccccccc}
H(X_1) & & \mathcal{H}(X_1) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}(X_2) & & H(X_2) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
X_1(t) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_1}(t,\cdot) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_2}(t,\cdot) & \longleftrightarrow & X_2(t)
\end{array} .$$

<u>Lemma 3</u> (Hitsuda 1984). $\Gamma_X \sim \Gamma_B$ を仮定すると，対応 $B(t) \longmapsto X(t)$ が $H(B)$ から $H(X)$ への

1:1 かつ onto の線型写像 S に拡張される。

<u>Definition.</u> 上の Lemma で定った S を用いて $S(\int_0^1 \alpha dB)$ を $\int_0^1 \alpha dX$ と書く。 $\alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]$ に対して Wiener 型積分 $\int_0^1 \alpha dX$ が定義される。

<u>Lemma 4.</u> $H(X) = \{\int_0^1 \alpha dX : \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]\}$

更に、 $H_t(X) = \{\int_0^t \alpha dX : \alpha = P_t\alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]\}$.

<u>Remark.</u> 各 t に対して S は $H_t(B)$ を $H_t(X)$ の上に 1:1 に移す: $S(H_t(B)) = H_t(X)$.

<u>Lemma 5</u> (Hitsuda 1973). $X = \{X(t); t \in [0,1]\}$ $Y = \{Y(t): t \in [0,1]\}$ を2つの独立な Gaussian processes とする。 各 $t \in [0,1]$ に対して、

$$H_t(X+Y) = H_t(X) \oplus H_t(Y)$$

となるための必要十分条件は $\mathcal{H}_t(X) \cap \mathcal{H}_t(Y) = \{0\}$, $t \in [0,1]$, となることである。 ここで、 $\mathcal{H}_t(X)$ (resp. $\mathcal{H}_t(Y)$) は、再生核 $\Gamma_X(u,v)$ (resp. $\Gamma_Y(u,v)$) , $(u,v) \in [0,t] \times [0,t]$, を持つ Hilbert 空間とする。

最後の Lemma 5 の証明はここには与えないが，tまでの情報が完全に分離されながら，process が発展するための条件である．

§ 2. 標準表現と応用

本節においても

$$X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0,1]$$

を(0,1)において与えた Gaussian process とする．この process について現在までに判明していることを列挙する．まず前節の Lemma 5 に対応して次の Proposition が成立する．

<u>Proposition 1</u>. BとYが独立であるとき，各tに対して

$$(2.1) \qquad H_t(X) = H_t(B) \oplus H_t(Y)$$

であるための必要十分条件は，各 $t>0$ に対して

$$(2.2) \qquad \mathcal{H}_t(Y) - \{0\} \subset \{ a \mid a(s) = \int_0^s \alpha(u)\,du, \text{ かつ } \int_0^t \alpha^2(u)\,du = \infty \}$$

である．

<u>Proof.</u> $\mathcal{H}_t(B) = \{ a \mid a(s) = \int_0^s \alpha(u)\,du,$

$\int_0^t \alpha^2(u)\,du < \infty\}$ であるから, Lemma 5 の条件をみたすためには, (2.2) が成立しなければならない。 なお, $Y(t) = \int_0^t y(u)\,du$ と書けることにより, $\mathcal{H}_t(Y)$ の元 a が絶対連続 $(\exists \alpha \in \mathcal{L}^1[0,t],\ a(s) = \int_0^s \alpha(u)\,du)$ であることは明白であろう.

例. $Y(t) = \int_0^t \alpha_0(u)\, B_1(u)\,du$, 但し $\alpha_0 \notin \mathcal{L}^2[a,b]$, $0 \overset{\forall}{\leq} a \overset{\forall}{<} b \leq 1$, $\alpha_0 \in \mathcal{L}^1[0,1]$, 更に $B_1 = \{B_1(t)\}$ は B と独立な Brown 運動とすれば (2,2) をみたす. このような α_0 が存在することは簡単にわかる. このとき, X は $(0,1)$ の型に標準表現されて, 重複度 2 の Lebesgue スペクトル測度を持つことになる.

上の Proposition 1 の対偶として, $\mathcal{H}_t(B) \wedge \mathcal{H}_t(Y)$ がある $t \in [0,1]$ に対して non-trivial であれば $H_t(X) \subsetneqq H_t(B) \oplus H_t(Y)$ となり, (B, Y) の情報が $X = B + Y$ により忠実に伝達されないことになる.

<u>Proposition 2</u>. B と Y が独立であるとき,

次の命題 (A) と (B) は同値である：

(A) $\mathcal{H}_t(B) \cap \mathcal{H}_t(\mathfrak{X}) = \{0\}$, $t \in [0,1]$

(B) $\overline{B} = B$.

<u>Proof.</u> (A) $\Rightarrow$ (B) は Prop. 1 よりほとんど明らかであろう。 逆に(A)の否定は $H_t(X) \subsetneq H_t(B) \oplus H_t(\mathfrak{X})$ がある $t \in [0,1]$ で成り立つことを示しており, $\overline{B} = B$ であることが直ちに従う。

REFERENCES

N. Aronsjain (1950), Theory of reproducing kernels.
Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404.

T. Hida (1960), Canonical representations of Gaussian processes and their applications.
Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A 33, Math. 109-155.

M. Hitsuda (1968), Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process.
Osaka J. Math. 5, 299-312.

M. Hitsuda (1973), Multiplicity of some class of Gaussian processes.
Nagoya Math. J. 52, 39-46.

M. Hitsuda (1984), Wiener-like integrals for Gaussian processes and the linear estimation problems.
Advances in Probability (Ed. by M. Pinsky ; Dekker Pub.)

Sh. R. Liptzer and A. N. Shiryaev (1974), Statistics of Stochastic Processes. (Russian) (Nauka). (English Version: Springer).

C. Stricker (1983), Semimartingales gaussiennes - application au problème de l'innovation.
Z.W. 64, 303-312.

総論として

飛田武幸 - 櫃田倍之, ガウス過程 — 表現と応用 (紀伊国屋書店 1976) がある.