数理解析研究所講究録
672巻 1988年 64-73

定常Gauss過程の同等問題

信州大 理 井上和行 (Kazuyuki Inoue)

§1. はじめに

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された平均 0 の定常Gauss過程 $\mathbb{X}=\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で，共分散関数 $R(s,t)=R(t-s)$ がスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ により与えられるものを考える：

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(\lambda)d\lambda \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

Gauss過程 $\mathbb{X}$ を与えることは，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のGauss測度 P を与えることを意味するが，これらは $f(\lambda)$ を与えることにより完全に決定される。 今，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の別のGauss測度 P_1 として，可測関数族 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が P_1 に関してもスペクトル密度関数 $f_1(\lambda)$ をもつような平均 0 の定常Gauss過程 $\mathbb{X}_1$ を定めるものを考える。 定常Gauss過程の同等問題において本質的に重要なのは，径数 t の変域が有界区間 $T=[0,\tau]$ に制限されている場合である。 そこで関数族 $\{X_t\}_{t\in T}$ に

より生成されるΩ上のσ-加法族を$\mathfrak{F}_T$と表わす。 この時，T上で$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{X}_1$が同等であるとは，$\mathfrak{F}_T$上でPとP_1が同等（$P \sim P_1$ on $\mathfrak{F}_T$）であること，即ち互に絶対連続であることをいう。 また，T上で$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{X}_1$が互に特異であるとは，$\mathfrak{F}_T$上でPとP_1が互に特異（$P \perp P_1$ on $\mathfrak{F}_T$）であることをいう。一般論により，$\mathfrak{F}_T$上のGauss測度PとP_1の関係は同等であるかまたは互に特異であるかのいずれかであって，中間の場合は存在しない。

この報告の目的は，スペクトル密度関数$f(\lambda)$と$f_1(\lambda)$がいずれも整関数の逆数として与えられる場合に，対応する$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{X}_1$が同等である為の判定条件を，整関数の間のできるだけ直接的で検証容易な関係として記述することである。 ここで，特にスペクトル密度関数が多項式の逆数として表わされるならば，この問題はより一般的な形で完全に解決されている。 即ち，$f(\lambda)$と$f_1(\lambda)$が有理関数である場合，$\mathfrak{F}_T$上でPとP_1が同等である為の必要十分条件は

$$(1.1) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)} = 1$$

で与えられる。 更に，$f(\lambda)$が有理関数とは限らない一般の関数であっても，$\lambda \to \infty$の時の減少度について

$$(1.2) \qquad \varliminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{\alpha} f(\lambda) > 0 \qquad (\alpha > 0 \text{ は定数})$$

なる仮定をおくことにより，いろいろな形の同等性の判定条件が得られている。しかしながら，条件(1.2)を仮定しない場合については，$f(\lambda)$が整関数の逆数の場合であっても，我々の立場からみて満足すべき結果は得られていないようである。

以下においては，条件(1.2)を仮定しない場合の同等問題を考察する。§2では，十分大きな$\lambda>0$に対する$f(\lambda)$および$f_1(\lambda)$の挙動に対して或る意味の単調性に関する仮定をおくことにより，同等性の判定条件が関数$h(\lambda)=\left|1-\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right|$の超関数の意味のFourier変換を用いて記述されることを示す。この判定条件は，$f(\lambda)$および$f_1(\lambda)$が単調増加な整関数の逆数である場合に適用可能である。§3では，$f(\lambda)$が特別な形に表わされる整関数の逆数である場合の同等問題について若干の考察をする。このような議論は一般に無限重のMarkov性をもつ定常Gauss過程に対して適用可能であり特に重要である([1])。

§2. 同等性の判定条件

まず，Rozanov [2]に従っていくつかの概念を準備しよう。可積分関数$\varphi(\lambda)$に対して，Fourier変換$\hat{\varphi}(t)$を次式で定義する：

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\varphi(\lambda)\,d\lambda \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$上で定義された無限回微分可能な実関数 $c(t)$ で，台が区間 $T=[0,\tau]$ に含まれるものの全体を $C_0^\infty(T)$ とする。　また関数 $c(t) \in C_0^\infty(T)$ の Fourier 逆変換

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} c(t)\,dt = \int_T e^{i\lambda t} c(t)\,dt \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

として表わされる関数 $\varphi(\lambda)$ の全体を $\mathbb{L}$ とする。　次に，$\mathbb{R}$上の関数 $g(\lambda)$ に対して T上の関数 $\alpha(t)$ が存在して次の等式をみたす時，$\alpha(t)$ を，T上での超関数の意味の $g(\lambda)$ の Fourier 変換という：

$$\int_T \overline{\alpha(t)}\,c(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\lambda)}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda\,, \qquad \varphi \in \mathbb{L}\,,$$

ただし，$\varphi(\lambda)$ は $c(t) \in C_0^\infty(T)$ の Fourier 逆変換を表わす。　特に，$\lambda \to \infty$ の時の増大度が $g(\lambda) = O(\lambda^\alpha)$ $(\alpha > 0)$ で与えられるような関数 $g(\lambda)$ に対しては，T上での超関数の意味の Fourier 変換 $\alpha(t)$ の存在を示すことができる。　関数 $r(\lambda)$ が $[0,\infty)$上で概ね単調 (coarsely monotone) であるとは，適当な単調関数 $r_0(\lambda)$ に対して

$$0 < \varliminf_{\lambda\to\infty} \frac{r(\lambda)}{r_0(\lambda)} \leqslant \varlimsup_{\lambda\to\infty} \frac{r(\lambda)}{r_0(\lambda)} < \infty$$

が成立つことをいう。

以下我々は同等問題をスペクトル密度関数に対する次の条件(F.1)〜(F.3)の下で考える：

$$\begin{cases} (\mathrm{F}.1) & \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \dfrac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)} \leqq 1 \ ; \\ (\mathrm{F}.2) & f(\lambda) \text{ および } h(\lambda) = \left|1 - \dfrac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right| \text{ は } [0,\infty) \text{ 上で概ね単調 ;} \\ (\mathrm{F}.3) & f_1(\lambda) > 0 \quad \text{a.e. on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

<u>主定理</u>　$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 が同等である為の必要十分条件は，T 上での超関数の意味の $h(\lambda)$ の Fourier 変換 $\beta(t)$ に対して

$$(2.1) \qquad \iint_{T\times T} \beta(s-t)^2 ds dt < \infty$$

が成立つことである。　ただし，$t\in T$ に対して $\beta(-t)=\beta(t)$ とおく。

<u>注意</u>　Rozanov は条件(F.1), (F.2) および (1.2) を仮定することによりこの定理を導いている ([2], Chapter II, Theorem 12)。我々は条件(1.2)の代りに(F.3)を仮定したのであるが，Rozanov の場合と同様の議論を通じてこの定理を示すことができる。

<u>系</u>　$h(\lambda)\in L^2(\mathbb{R})$ ならば，$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 は同等である。更に

$$(2.2) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} h(\lambda) > 0$$

ならば，$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 は互に特異である。

§3. 同等性と整関数の零点分布

ここではスペクトル密度関数が

$$\begin{cases} f(\lambda) = \dfrac{1}{p(\lambda)} \quad および \quad f_1(\lambda) = \dfrac{1}{p_1(\lambda)}, \\ p_1(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda), \end{cases}$$

で与えられる場合の同等問題を考察する。 ただし，$p(\lambda)$ および $q(\lambda)$ は整関数であって次のような無限積の形に表わされるものと約束する。

$$(3.1)\quad \begin{cases} p(\lambda) = p(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\lambda^2}{a_n^2}\right), & p(0)>0,\ a_n>0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}<\infty\ ; \\ q(\lambda) = q(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{\lambda^2}{b_n^2}\right), & q(0)>0,\ b_n>0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}<\infty\ ; \end{cases}$$

$$(3.2)\qquad a_n \leqq b_n \qquad (n \geqq 1)$$

__補題__　(3.1) および (3.2) の仮定の下で，(F.1)〜(F.3) が成立つ。

__証明__　(F.1) と (F.3) は明らか。 (F.2)，即ち $h(\lambda)$ が概ね単調なことを示そう。 まず $\dfrac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)} = \dfrac{p(\lambda)}{p_1(\lambda)} < 1$ に注意して，

$$(3.3)\qquad h(\lambda) = \left|1-\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)}\right| = 1-\frac{p(\lambda)}{p_1(\lambda)} = \frac{1}{\dfrac{p(\lambda)}{q(\lambda)}+1}.$$

一方

$$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{p(0)}{q(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\dfrac{\lambda^2}{a_n^2}}{1+\dfrac{\lambda^2}{b_n^2}} = \frac{p(0)}{q(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{b_n^2-a_n^2}{\lambda^2+b_n^2}\right)\cdot\frac{b_n^2}{a_n^2}\right\}$$

だから (3.2) により，$\dfrac{p(\lambda)}{q(\lambda)}$ は $[0,\infty)$ 上で単調増加となり，従っ

て (3.3) により $h(\lambda)$ は $[0,\infty)$ 上で単調減少となる。

これで，(3.1) および (3.2) の仮定の下で主定理とその系が適用できることがわかった。次に，$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 が同等または互に特異である為の十分条件をいくつか与えよう。

<u>命題 1</u>　適当な部分列 $\{a_{i_n}\}_{n\geq 1} \subsetneqq \{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して

(3.4) $$a_{i_n} \leqq b_n \qquad (n \geq 1)$$

がみたされるならば，$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 は同等である。

<u>証明</u>　数列 $\{i_n\}_{n\geq 1}$ に属さない自然数の全体を $\mathbb{N}_0$ とすると，$\mathbb{N}_0$ は空でない。また

(3.5) $$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} = \frac{p(0)}{q(0)} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{\lambda^2}{a_{i_n}^2}}{1+\frac{\lambda^2}{b_n^2}} \right) \prod_{j\in\mathbb{N}_0} \left(1+\frac{\lambda^2}{a_j^2}\right).$$

従って，仮定 (3.4) により $1+\frac{\lambda^2}{b_n^2} \leqq 1+\frac{\lambda^2}{a_{i_n}^2}$ であることに注意すれば，或る定数 $C_1>0$，$C_2>0$ に対して

(3.6) $$\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \geqq C_1 (1+C_2\lambda^2)$$

となることがわかる。これと (3.3) とから $h(\lambda)\in L^2(\mathbb{R})$ を得て，主定理の系により，$\mathfrak{F}_T$ 上で P と P_1 が同等であることが示される。

<u>命題2</u>　適当な部分列 $\{a_{i_n}\}_{n\geq 1} \subsetneqq \{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して2条件

(3.7)　$b_n \leqq a_{i_n} \qquad (n \geqq 1)$

(3.8)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{a_{i_n}} < \infty \qquad (\rho_n = a_{i_n} - b_n)$

がみたされるならば，$\mathcal{F}_T$ 上で P と P_1 は同等である。

<u>証明</u>　命題1の証明と同様に評価式(3.6)が成立つことを示せばよい。　まず(3.7)により，

$$\frac{1+\frac{\lambda^2}{a_{i_n}^2}}{1+\frac{\lambda^2}{b_n^2}} = \frac{b_n^2}{a_{i_n}^2} \cdot \frac{a_{i_n}^2+\lambda^2}{b_n^2+\lambda^2} \geqq \frac{b_n^2}{a_{i_n}^2}.$$

更に(3.8)により，無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_{i_n}^2} = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\rho_n}{a_{i_n}}\right)\right\}^2$ は或る正数に収束する。　故にこれらと(3.5)とから(3.6)を得る。

<u>命題3</u>　$\sigma_n = b_n - a_n \quad (n \geqq 1)$ とおく時，

(3.9)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{a_n} < \infty$

がみたされるならば，$\mathcal{F}_T$ 上で P と P_1 は互に特異である。

<u>証明</u>　まず(3.2)により，$\dfrac{1+\frac{\lambda^2}{a_n^2}}{1+\frac{\lambda^2}{b_n^2}} \leqq \dfrac{b_n^2}{a_n^2}$.　更に(3.9)により，無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{a_n^2} = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sigma_n}{a_n}\right)\right\}^2$ は或る正数に収束する。故に $\dfrac{P(\lambda)}{g(\lambda)}$ は有界関数であることが示され，(3.3)から或る定数 $C>0$ に対して，$h(\lambda) \geqq C \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ となることがわかる。よって主定理の系により，$\mathcal{F}_T$ 上で P と P_1 は互に特異となる。

<u>注意 1</u>　命題3の条件(3.9)が成立つ為には，数列$\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$が有界であれば十分である。しかしこの有界性は必要ではない。例えば条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s} < \infty \qquad (0 < s < 1)$$

の下では，$\sigma_n = O(a_n^{1-s})$ $(n \to \infty)$ をみたす数列$\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$に対して(3.9)が成立つ。

<u>注意 2</u>　条件(3.2)を次の条件(3.2)′でおきかえた場合にも$h(\lambda)$が$[0,\infty)$上で概ね単調であることが示され，上で行なったのと同様の議論ができる。

(3.2)′　或る$n_0 \geq 1$に対して，$a_n \leq b_n$ $(n \geq n_0)$.

<u>注意 3</u>　(3.1)において，$g(\lambda)$が多項式で

$$g(\lambda) = g(0) \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{\lambda^2}{b_n^2}\right), \quad g(0) > 0, \quad b_n > 0 \ . \ (1 \leq n \leq N).$$

と表わされる場合は，$p(\lambda)$と$g(\lambda)$の複素平面上の零点の分布状態に関係なく，つねに$h(\lambda)$は$[0,\infty)$上で概ね単調であり，主定理の系を用いることにより，$\mathfrak{F}_T$上でPとP_1が同等であることが示される。

§4. 補足

定常Gauss過程の同等問題において，スペクトル密度関数$f(\lambda)$に対して減少度の条件(1.2)も単調性(F.2)も仮定しない場合については，Yoshihara[5]によって同等である為の十分条件が与えられている。しかし，我々の仮定(F.1)~(F.3)よりも弱い条件の下での必要十分条件は知られていないようである。一般に定常Gauss過程XがMarkov性をもつ為の必要十分条件は，スペクトル密度関数$f(\lambda)$が最小指数型(minimal exponential type)の整関数$p(\lambda)$の逆数として表わされることである([1])。そのような$p(\lambda)$の中でも(3.1)の形に表わされるものは特に重要である。同等性と整関数の零点分布，もしくは増大度との関係についてのより詳しい結果を得ることは今後の課題である。

References

[1] Levinson, N. and McKean, H. P.,Jr.: Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise. Acta Math. 112 (1964), 99-143.

[2] Rozanov, Yu. A.: Infinite-dimensional Gaussian distributions. Proceedings of the Steklov Institute of Math. 108 (1968).

[3] Skrokhod, A. V. and Yadrenko M. I.: On absolute continuity of measures corresponding to homogeneous Gaussian fields. Theory Probab. Appl. 18 (1973), 27-40.

[4] Titchmarsh, E. C.: The Theory of Functions. (1932).

[5] Yoshihara, K.: A criterion for the equivalence of two stationary Gaussian processes with, not necessarily rational, spectral densities. Science Reports of the Yokohama National University, Section I, 16 (1970), 19-32.