数理解析研究所講究録
672巻 1988年 49-63



# Gauss確率場に対する確率変分解析

愛知教育大学　野田明男 (Akio Noda)

## §1. 序

確率過程 $X(t)$ に対するLévyの基本的アプローチをなす確率変分方程式([7], 特にpp. 187-244)を思い起こそう:

$$(1.1) \qquad \delta X(t) = X(t+dt) - X(t) = \Phi(\{X(u); u \le t\}, Y_t, t, dt).$$

ここで、過去のσ-field $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(u); u \le t\}$ と独立な $Y_t$ は、微少区間 $(t, t+dt)$ の間に $X$ が新たに獲得するrandom element (innovation)である。

このLévyのアプローチを確率場 $X(x)$, $x \in R^n$, に拡張したい。多次元パラメータの場合、一次元の $t \in R^1$ のように単純に一方向に沿って進むというわけに行かず、$x \in R^n$ の動きの自由度は次元 $n$ と共に増す; それに伴って変分解析の困難さも十分な手応えが予想される。

飛田([15])が近年提唱するGauss確率場に対するvariational approachは、Lévyの精神を受け継ぐ一つの試みであろう。我々

followerはこの線に沿って歩みを進め、white noise表現（この巻の別稿で詳述）

$$(1.2)\qquad X(x)=\int_H F(x,h)\,dW(h)$$

を許すGauss確率場$X(x)$を対象に選んで、その性質を解明したいという宿望をもつ。

飛田のideaをここでは$n=2$に限って述べる；$R^2$内の曲線$C$を任意に選び、パラメータ$x\in R^2$の動きを$C$に沿う方向と法線方向に分けて取り扱う。具体的には、次のi),ii)を研究する：

i) パラメータを$C$上に制限して得られるGauss過程$X_C(t)=X(x(t))$, $x(t)\in C$, の確率変分方程式と標準表現；

ii) 条件付平均値$Y(C)=E[X(x_0)\,|\,X(x(t));x(t)\in C]$を曲線$C$のrandom functionalとみたときの変分$\delta Y(C)=Y(C+\delta C)-Y(C)$。

この小論の目的は、手始めに二つの基本的な確率場——Lévyの Brown運動$B(x,y)$, $(x,y)\in R^2$, とWiener過程$W(t_1,t_2)$, $(t_1,t_2)\in[0,\infty)^2$, を取り上げて、上記i)について研究した結果を報告することである。

我々がここで取り扱う$W_C(t)$（§3）及び$B_C(t)$（§4）の基本的特徴を前もって述べておく；曲線は、$C=C_1\cup C_2$と分解できて、各$X_{C_i}(t)$は単独に考えればそれぞれ簡明なMarkov過程となる。しかしながら、$X_{C_1}$と$X_{C_2}$との間には弱くない相関関係があり、二つのMarkov過程を合わせて一本の過程$X_C(t)$を作ると、

その確率変分方程式は、なじみ深い正規形(§2定義1)になるとは限らず、新しいタイプの非正規形が生じ十分注目に値しよう。

最後にii)に関して一言。種々の曲線Cに対して、$Y(C)$をexplicitに書くことができる(得られた式は興味ある事実を内包している;関連する結果として[2], [3], [10]を挙げる)。しかしながら、曲線のrandom functional $Y(C)$の研究には、越え難い困難さが付きまとい、現時点でii)についてまとめる事は断念せざるを得ぬ。

§2. 確率変分方程式

確率過程を調べるための基本的手法である変分方程式(1.1)について、平均0のGauss過程に話を限定して、若干の観察結果を述べると共に次節以降の準備となす。

共分散$\Gamma(t,t')$をもつGauss過程$X(t)$の場合、(1.1)は次のような簡明な形をとる:

$$(2.1)\quad \begin{cases} \delta X(t) = \mu_t(dt) + \sigma_t(dt)\,\xi, \\ \mu_t(dt) = E[\,\delta X(t)\,|\,\mathcal{F}_t\,], \quad \sigma_t^2(dt) = E[\,(\delta X(t) - \mu_t(dt))^2\,]. \end{cases}$$

ここで、過去のσ-field $\mathcal{F}_t$と独立な$\xi$は、$N(0,1)$に従うrandom elementであり、

$$(2.2)\quad \xi\sqrt{dt} = dB(t) = \dot{B}(t)\,dt$$

を通じて標準Brown運動 $B(t)$、あるいはwhite noise $\dot{B}(t)$ に置き換えられる。

我々のこの節での興味は、$\mu_t(dt)$ と $\sigma_t(dt)$ の微少変量 $dt$ に関する主要項に集中する。$E[\mu_t^2(dt)] = S_t^2(dt)$ とおくと、(2.1)の両項は互いに独立故、

$$S_t^2(dt) + \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t))^2] = \Gamma(t+dt, t+dt) - 2\Gamma(t+dt, t) + \Gamma(t, t).$$

多くの場合、$S_t(dt)$ と $\sigma_t(dt)$ の主要項は次の形に書かれる：

(2.3) $$S_t(dt) = s(t)(dt)^{p_1} + o((dt)^{p_1}), \quad \sigma_t(dt) = \sigma(t)(dt)^{p_2} + o((dt)^{p_2}),$$

$0 < s(t), \sigma(t) < \infty$, $0 < p_1, p_2 < \infty$. 指数 $p_1$ と $p_2$ の間に一般的な大小関係を規定することはできない。比 $p_1/p_2$ が小さい程、変分 $\delta X(t)$ は過去の $\mathcal{F}_t$ に強いdependencyを有する。

定義 1. $p_1 = 1$, $p_2 = 1/2$ の場合、つまり、(2.1)が

(2.4) $$\delta X(t) = \mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dB(t), \quad \mu(t) = \mu_t(dt)/dt \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$$

と書き換えられるとき、Xの確率変分方程式は正規形であるという。

§3,4においては、確率微分方程式論でなじみの正規形(2.4)以外に、$p_1 = p_2 = 1/2$ となる著しい例が論じられる。我々は以下、興味深い $X(t)$ の例の中から、$1 \le p_1/p_2 \le 2$ となる非正規形の確率変分方程式を若干選んで論じる。

例 1. 非正規形の第一の例として、正規形(2.4)に準ずる次のような場合($p_2 = 1/2 < p_1 < 1$)を挙げる：確かに $E[\mu(t)^2] = \infty$

であるが、$\mu(t)$ は generalized Gaussian process として well-defined.

岡部[9]に従って、reflection-positivity を有する定常過程 $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, の中からこのような例を探す。$X(t)$ は標準表現

(2.5) $$X(t)=\int_{-\infty}^{t} E(t-u)\,dB(u)\ ,\quad E(s)=\int_0^\infty e^{-s\lambda}\,d\nu(\lambda)\ ,\ s>0,$$

によって $[0,\infty)$ 上の測度 $\nu$ を用いて書かれる。$\nu$ の分布関数は適当な指数 $1<p<3/2$ によって、

(2.6) $$\nu(\lambda)=\int_0^\lambda d\nu(\lambda')\underset{(\lambda\to\infty)}{\sim} c\,\lambda^{1-p}/\Gamma(2-p)\ ,\quad c>0,$$

と書けると仮定する。(2.5)から直ちに、

$$\mu_t(dt)=\int_{-\infty}^{t}\{E(t+dt-u)-E(t-u)\}\,dB(u)\,,$$
$$\sigma_t^2(dt)=E[(\int_t^{t+dt}E(t+dt-u)\,dB(u))^2]=\int_0^{dt}E(s)^2\,ds$$

が従う。

まず、$\sigma_t(dt)=E(0)\,(dt)^{1/2}$ がわかる。そして、$-E'(s)=\int_0^\infty e^{-s\lambda}\lambda\,d\nu(\lambda)$ に Tauber 型定理 (cf. [1]) を適用すれば、

$$S_t^2(dt)=\int_0^\infty ds\,\{\int_0^{dt}E'(h+s)\,dh\}^2\sim(\text{const.})\,(dt)^{2p-1}$$

と計算できる。つまり、$p_2=1/2<p_1=p-1/2<1$ が示される。その上、generalized な定常過程 $\mu(t)=\int_{-\infty}^{t}E'(t-u)\,dB(u)$ の共分散は、次の漸近挙動をもつ：

$$\int_0^\infty E'(h+s)\,E'(s)\,ds\underset{(h\downarrow 0)}{\sim}(\text{const.})\ h^{-(3-2p)}.$$

(2.6) の指数が $p>3/2$ となると、$\mu(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ がわかり正規形(2.4)が従う。その上、$\mu(t)$ は $X$ 自身の言葉で書けて、(2.4) は <u>KMO-Langevin 方程式</u>([9])の形と一致する：

$$\delta X(t) = -\left(\beta X(t) + \int_{-\infty}^{t} \gamma(t-u)\, dX(u)\right) dt + E(0)\, dB(t). \tag{2.7}$$

ここで、$\beta \geqq 0$ と $\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} d\rho(\lambda)$ は $\nu$ から Stieltjes 変換の表現定理を通して一意的に定まる。

又 $1/2 < p < 1$ の場合は、$p_1 = p_2 = p - 1/2 < 1/2$ となって、ちょうど例2として取り上げる fractional Brown 運動 $B_{p-\frac{1}{2}}(t)$ と同じ型の確率変分方程式が生じる。

例2. index $\alpha$ をもつ fractional Brown 運動 $B_\alpha(t)$, $t \geqq 0$, に対しては、$o((dt)^\alpha)$ の誤差項なしに、$E[(\delta X(t))^\alpha] = (dt)^\alpha$ となる。ここで、$0<\alpha<1$ と $1<\alpha<2$ とに分けて扱う。

I) $0<\alpha<1$ の場合：$B_\alpha(t)$ の標準表現は、

$$\begin{cases} B_\alpha(t) = c_\alpha \int_0^t f_\alpha(u/t)\, u^{\frac{\alpha-1}{2}}\, dB(u), \quad c_\alpha^2 = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{4B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2})}, \\ f_\alpha(x) = \int_0^x (1-y)^{\frac{\alpha-3}{2}} y^{-\alpha} dy + B(1-\alpha, \frac{\alpha+1}{2}), \end{cases} \tag{2.8}$$

で与えられる。これから、

$$\sigma_t^2(dt) \sim c_\alpha^2 t^\alpha \int_{1-dt/t}^{1} f_\alpha^2(u)\, u^{\alpha-1} du \sim c_\alpha^2 t^\alpha \frac{4}{(1-\alpha)^2} \int_{1-dt/t}^{1} (1-u)^{\alpha-1} du$$
$$= (dt)^\alpha / (1-\alpha) B(1-\alpha, \tfrac{\alpha+1}{2}),$$
$$S_t^2(dt) = \{1 - 1/(1-\alpha) B(1-\alpha, \tfrac{\alpha+1}{2})\} (dt)^\alpha + o((dt)^\alpha),$$

が従い、$0 < p_1 = p_2 = \alpha/2 < 1/2$ がわかる。

II) $1<\alpha<2$ の場合：標準表現 (2.8) は、

$$c_\alpha^2 = \sin(\tfrac{\pi\alpha}{2})\, \Gamma(\alpha+1) / \Gamma^2(\tfrac{\alpha-1}{2}), \quad f_\alpha(x) = \int_x^1 (1-y)^{\frac{\alpha-3}{2}} y^{-\alpha} dy,$$

に変更され、$\sigma_t^2(dt) \sim \{\sin(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(\alpha)/\Gamma^2(\frac{\alpha+1}{2})\} (dt)^\alpha$ を得る。従って、$1/2 < p_1 = p_2 = \alpha/2 < 1$。

<u>例3</u>. 例2の $B_\alpha(t)$ に関連して、次式の標準表現をもつGauss過程 $X_\alpha(t)$ ([7], p.213～214) を最後に取り上げる：

(2.9) $$X_\alpha(t) = \int_0^t (t-u)^{\frac{\alpha-1}{2}} dB(u) , \quad t \geqq 0.$$

容易に、$E[X_\alpha^2(t)] = t^\alpha/\alpha$, $\sigma_t^2(dt) = (dt)^\alpha/\alpha$ を得、

$$\begin{aligned} S_t^2(dt) &= E[X_\alpha^2(t+dt) - X_\alpha^2(t)] - 2E[(\delta X_\alpha(t))X_\alpha(t)] - \sigma_t^2(dt) \\ &\sim t^{\alpha-1}\cdot dt - (dt)^\alpha/\alpha - 2E[\mu_t(dt) X_\alpha(t)] \end{aligned}$$

が従う。こうして、$\mu_t(dt) = \tilde{\mu}(t)\cdot(dt)^{\alpha\wedge 1} + o((dt)^{\alpha\wedge 1})$, $\tilde{\mu}(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ とおけて、$p_1 = \alpha\wedge 1$, $p_2 = \alpha/2$ がわかる。$0<\alpha<1$ のとき、$p_1/p_2 = 2$ となる点は、正規形と変わらぬことに注意。

この節を閉じるに当って open problem を述べたい；<u>周期的な Gauss過程 $X(t)$, $X(0) = X(\ell)$, を確率変分方程式の立場から特徴付けよ</u>。これの典型として pinned Brownian motion ($B(0) = B(\ell) = 0$) があり、又Gauss確率場 $X(x)$ を閉曲線 C 上に制限すれば、自然にこのような周期性が生じる。

## §3. 2-parameter の Wiener過程

この節は、Wiener過程 $W(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \geqq 0$, を種々の曲線 $C_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \geqq 0\}$ 上に制限して得られるGauss過程 $W_\varphi(t) = W(t, \varphi(t))$ の研究に当てられる；$W_\varphi(t)$ の確率変分方程式と、それから導かれる標準表現を求める。

この巻の別稿で述べた如く、単調増加な $\varphi$ に対し、$W$ の

2-parameter white noise $\dot{W}(p_1,p_2)$ による表現

(3.1) $$W(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\dot{W}(p_1,p_2)\,dp_1\,dp_2$$

の直接の産物として、$W_\varphi(t)$ は加法過程となる。そして、別稿の補題2に留意する。

単調な曲線の次に考えるべきものとして、$C_\varphi$ が一つの谷をもつ場合をこの節で論じる。$C_\varphi$ の山や谷の数が多くなるにつれて、なるほど $W_\varphi(t)$ の解析は複雑で実行し難くなるけれども、注目すべき確率変分方程式の非正規形は、既に谷(又は山)が一つだけの曲線の場合に生じる。従って、このような unimodal な $\varphi$ に対する $W_\varphi(t)$ の変分解析は、十分述べる価値ありと思われる。

以上の理由に対称性を加味して、次のような $C^1$-関数 $\varphi(t)\geq 0$ を考える; $\varphi(t)$ は $[1,\infty)$ 上で単調増加、$\varphi$ の $[0,1]$ の部分は $[1,2]$ の部分を $t=1$ で折り返したもの, i.e., $\varphi(t_*)=\varphi(t)$, $t_*=2-t$ $(1<t\leq 2)$。このとき、$W_\varphi(t)$ の確率変分方程式

(3.2) $$\delta W_\varphi(t)=\mu_t(dt)+\sigma(t)\,dB(t),$$

及び標準表現

(3.3) $$W_\varphi(t)=\int_0^t F(t,u)\,\sigma(u)\,dB(u)$$

は、explicit に次表のように与えられる; $h(u)=-u\varphi'(u)(\varphi(u)-u\varphi'(u))^{-1/2}$, $0<u<1$, とおく。

定理1. 上記 $\varphi$ に関する仮定の下、次の結果を得る:

| $t$ の範囲 | $\mu_t(dt)$ | $\sigma(t)$ | $F(t,u)$ |
|---|---|---|---|
| $0\le t\le 1$ | $\{\varphi'(t)W_\varphi(t)/\varphi(t)\}dt$ | $\varphi(t)\sqrt{(t/\varphi(t))'}$ | $\varphi(t)/\varphi(u)$ |
| $1\le t\le 2$ | $-\{\varphi'(t_*)W_\varphi(t_*)/\varphi(t_*)\}dt$ $+h(t_*)\,dB(t_*-)$ | $\sqrt{(t\varphi(t))'-h^2(t_*)}$ | $F(t_*,u)+\{1-u\varphi'(u)/\varphi(u)\}^{-1}\times$ $\times 1_{(t_*,1)}(u)+1_{(1,t)}(u)$ |
| $t>2$ | $0$ | $\sqrt{(t\varphi(t))'}$ | $F(2,u)+1_{(2,t)}(u)$ |

$W_\varphi(t)$ の確率変分方程式 (3.2) の特徴は、$1\le t\le 2$ の範囲にあり、過去の時点 $t_*$ における white noise $dB(t_*-)=B(t_*-dt)-B(t_*)$ が再び $\mu_t(dt)$ の主要項として現われてくる。

問題の $1\le t\le 2$ の範囲に限定して、定理 1 の証明の筋道を辿ろう。次の補題から出発する。

補題 2. $1<t<t'\le 2$ のとき、$\mathcal{F}_t=\sigma\{W_\varphi(u);\,0\le u\le t\}$ と書いて、

i) $\displaystyle E[W_\varphi(t')\,|\,\mathcal{F}_t]-W_\varphi(t)=-\int_{t'_*}^{t_*}u\,(1-\varphi(u)/u\varphi'(u))^{-1}\,d[\,W_\varphi(u)/u\,]$ ;

ii) $\displaystyle E[(W_\varphi(t')-E[W_\varphi(t')\,|\,\mathcal{F}_t])^2]=t'\varphi(t')-t\varphi(t)-\int_{t'_*}^{t_*}h^2(u)\,du$ .

補題 2 の証明の key point は、

(3.4) $$E[\{\text{i) の右辺}\}W_\varphi(v)]=E[\{W_\varphi(t')-W_\varphi(t)\}W_\varphi(v)]\,,\quad t'_*<\forall v<t_*,$$

を示すことにある。$W_\varphi(u)$ の共分散を計算して (3.4) は示される。

補題 2 に、$t'=t+dt$ を代入して、

$$\begin{aligned}\mu_t(dt)&=-\int_{(t+dt)_*}^{t_*}u\,(1-\varphi(u)/u\varphi'(u))^{-1}\,d\Big[\frac{\varphi(u)}{u}\int_0^u\sqrt{(v/\varphi(v))'}\,dB(v)\Big]\\&=-\int_{t_*-dt}^{t_*}\varphi'(u)\,du\int_0^u\sqrt{(v/\varphi(v))'}\,dB(v)-\int_{t_*-dt}^{t_*}h(u)\,dB(u)\\&\sim-\Big\{\varphi'(t_*)\int_0^{t_*}\sqrt{v/(\varphi(v))'}\,dB(v)\Big\}dt-h(t_*)\{B(t_*)-B(t_*-dt)\}\\&=-\{\varphi'(t_*)W_\varphi(t_*)/\varphi(t_*)\}dt+h(t_*)\,dB(t_*-)\,,\end{aligned}$$

及び、

$$\sigma_t^2(dt) = (t+dt)\varphi(t+dt) - t\varphi(t) - \int_{t_*-dt}^{t_*} h^2(u)\,du = \{(t\varphi(t))' - h^2(t_*)\}\,dt$$

を得る。こうして、(3.2) が explicit に求められる。

$W_\varphi(t)$ の標準表現 (3.3) における核 $F(t,u)$ は、(3.2) を 1 から t まで積分することによって導き出される：

$$\begin{aligned} W_\varphi(t) &= W_\varphi(1) + \int_1^t \delta W_\varphi(\tau) = \varphi(1)\int_0^1 \sqrt{(u/\varphi(u))'}\,dB(u) - \int_0^1 \left\{\int_{t_* \vee u}^1 \varphi'(v)\,dv\right\} \times \\ &\qquad \times \sqrt{(u/\varphi(u))'}\,dB(u) + \int_1^{t_*} h(u)\,dB(u) + \int_1^t \sigma(u)\,dB(u) \\ &= \varphi(t_*)\int_0^{t_*} \sqrt{(u/\varphi(u))'}\,dB(u) + \int_{t_*}^1 \left\{\varphi(u)\sqrt{(u/\varphi(u))'} - h(u)\right\} dB(u) + \\ &\qquad + \int_1^t \sigma(u)\,dB(u) \\ &= W_\varphi(t_*) + \int_{t_*}^1 \{1 - u\varphi'(u)/\varphi(u)\}^{-1}\sigma(u)\,dB(u) + \int_1^t \sigma(u)\,dB(u). \end{aligned}$$

こうして、定理 1 の表の結果が確立される。

## § 4. Lévy の Brown 運動

広義 Lévy の Brown 運動 $B(x,y)$, $(x,y) \in R^2$, は直線上にパラメータを制限すると、加法過程になるという著しい特性をもつ。では、パラメータが直線から逸れて動き出すと、どのような過程を描くかという問題に取り組みたい。その第一歩として、直線の小さな変形として、折れ線 $C_\Delta = \{(x,y) \in R^2;\ y = \tan\Delta \cdot |x|\}$ $(0 < \Delta < \pi/2)$ をとり、$C_\Delta$ 上への制限 $B_{C_\Delta}(t) \equiv B_\Delta(t)$, $t \in R^1$, がどんな確率微分方程式をもつかという問題を考察する。$C_\Delta$ を選択するもう一つの動機として、reflection positivity に関する研究 [8] が

あることを付言する。

記述を簡単にするため、最初から、対象とする $B(x,y)$ のクラスを限定する；平均 0 の Gauss 確率場 $B(x,y)$, $B(0,0)=0$, は、$\mathbb{R}^2$ 上の $l_p$-norm $\|(x,y)\|_p=\{|x|^p+|y|^p\}^{1/p}$ $(1\le p\le\infty)$ を増分の分散にもつ，i.e.,

$$(4.1)\qquad E[(B(x,y)-B(x',y'))^2]=\|(x-x',y-y')\|_p .$$

$e=(\cos\Delta,\sin\Delta)/\|(\cos\Delta,\sin\Delta)\|_p$ ，$e'=Re$，$R$ は $y$ 軸に関する reflection，と記して、折れ線 $C_\Delta$ を、$C_\Delta^+\cup C_\Delta^-$ ，$C_\Delta^+=\{re;r\ge0\}$，$C_\Delta^-=\{se';s\ge0\}$，と分ければ、半直線上の過程 $B_+(r)=B(re)$ と $B_-(s)=B(se')$ は、それぞれ標準 Brown 運動と一致する。$0<l<\infty$ を任意に選び、$B_+$ と $B_-$ を合わせて一本の過程

$$B_\Delta(t)=B_+(t)\quad(0<t\le l),\ =0\quad(t=0),\ =B_-(-t)\quad(-l\le t<0)$$

を作ると、R-positivity をもつ非定常過程 $B_\Delta(t)$ を得る。

さて、二本の Brown 運動 $B_\pm$ は、共分散

$$(4.2)\qquad K(r,s)=E[B_+(r)B_-(s)]=\{r+s-\|re-se'\|_p\}/2$$

で関係付けられている。norm の表現式

$$\|(x,y)\|_p=\int_{-\pi}^{\pi}|x\cos\theta+y\sin\theta|\,d\sigma_p(\theta)$$

によって、$S^1$ 上の両軸対称な有界測度 $d\sigma_p(\theta)$ を導入すると、(4.2) は、

$$(4.3)\qquad K(r,s)=\int_{-\Delta}^{\Delta}\{r\sin(\Delta-\alpha)\wedge s\sin(\Delta+\alpha)\}\,d\sigma_p(\alpha+\tfrac{\pi}{2})\Big/\int_{\Delta-\pi}^{\Delta}\sin(\Delta-\alpha)\,d\sigma_p(\alpha+\tfrac{\pi}{2})$$

と書き直される。( $l_p$-norm に結びつく $\sigma_p$ から一般の $\sigma$ に対象

を広げたいときには、この(4.3)が key expression となる。) 実際、次式が成立：

$$(4.4)\qquad d\sigma_p(\alpha+\pi/2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=0}^{3}\delta_{\{-j\frac{\pi}{2}\}}(d\alpha) & (p=1)\\[2ex] \dfrac{p-1}{4}\dfrac{|\sin\alpha\cos\alpha|^{p-2}}{(|\sin\alpha|^{p}+|\cos\alpha|^{p})^{2-1/p}} & (1<p<\infty)\\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{j=0}^{3}\delta_{\{-j\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\}}(d\alpha) & (p=\infty)\end{cases}.$$

以下、測度$\sigma_p$が、I) discrete な場合($p=1,\infty$) と II) 絶対連続な場合($1<p<\infty$) に分けて、$B_\Delta(t)$ の確率差分方程式を述べる。くわしい証明、及び標準表現を導く手順については、紙数に余裕がないため、割愛せざるを得ぬ。

I) $p=1,\infty$ の場合： 両者をまとめて書くため、(4.3)における$\sigma_p$を、$\alpha=0$ で point mass $a\geq 0$ をもち、$\alpha=\pm\delta$ ($0<\delta<\Delta$) で point mass $b/2\geq 0$ をもつ測度$\sigma$に置き換える。さらに、$\int_{\Delta-\pi}^{\Delta}\sin(\Delta-\alpha)\,d\sigma(\alpha+\pi/2)=1$ と正規化を施し、$\beta=\sin(\Delta+\delta)/\sin(\Delta-\delta)>1$, $a\sin\Delta=A$, $b\sin(\Delta-\delta)=B$ とおく。(4.4)を見ればちょうど、$p=1$ の場合は $a>0=b$, $p=\infty$ の場合は $\delta=\pi/4<\Delta$ として、$a=0<b$ に相当する。記法

$$(4.5)\qquad \delta B_\Delta(t;c\,dt)=B_\Delta(t+c\,dt)-B_\Delta(t),\quad -l<t<l,\ -\infty<c<\infty,$$

を用いる。

定理3. 上記$\sigma$に関する仮定の下に、

$$\delta B_\Delta(t;dt)=\xi\sqrt{dt}\qquad (t\leq 0);$$

$$\delta B_\Delta(t;dt) = g_4\, 1_{(0,l/\beta)}(t)\, \delta B_\Delta(-\beta t; -\beta dt) + g_3\, \delta B_\Delta(-t;-dt)$$
$$+ g_2\, \delta B_\Delta(-t/\beta; -dt/\beta) + g_1\, \delta B_\Delta(-t/\beta^2; -dt/\beta^2)$$
$$- f_1\, \delta B_\Delta(t/\beta^2; dt/\beta^2) - f_2\, \delta B_\Delta(t/\beta; dt/\beta)$$
$$+ \left\{1 - \frac{B}{2} g_2 - A g_3 - \frac{\beta B}{2} g_4\, 1_{(0,l/\beta)}(t)\right\}^{1/2} \xi \sqrt{dt} \quad (t>0)$$

を得る。ここで、係数 $f_1, f_2, g_1 \sim g_4$ は、$(A, B, \beta)$ から次式で定まる：

$$f_1 = \frac{\beta B^2\{1+(4\beta-1)A^2 - \frac{\beta}{2}B^2\}}{4(1-A^2)^2 - \beta B^2(3+A^2-\frac{\beta}{2}B^2)}, \quad f_2 = \frac{\beta A B\{4(1-A^2)-(\beta-1)B^2\}}{4(1-A^2)^2 - \beta B^2(3+A^2-\frac{\beta}{2}B^2)},$$

$$g_1 = Af_1 + \frac{\beta}{2}Bf_2, \quad g_2 = \frac{\beta}{2}B + \frac{B}{2}f_1 + Af_2, \quad g_3 = A + \frac{B}{2}f_2, \quad g_4 = \frac{B}{2}.$$

II) $1<p<\infty$ の場合： この場合、$K(r,s)$ よりもむしろ、対称・正値・正定値な斉次核

(4.6) $$J(r,s) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} K(r,s) = c_p(\Delta) \frac{4rs|r^2-s^2|^{p-2}}{\{(\cos\Delta)^p(r+s)^p + (\sin\Delta)^p|r-s|^p\}^{2-1/p}} \quad (r \neq s),$$

$$c_p(\Delta) = 2(p-1)(\sin\Delta\cos\Delta)^p / \{(\sin\Delta)^p + (\cos\Delta)^p\}^{1/p},$$

が重要な役割を果たす。$r>0$ を固定すると、$J(r,s) \in L^{q(p)}((0,l),ds)$ となることに注意する。ここで、$q(p) = \infty$ $(p \geq 2)$, $1 < q(p) < (2-p)^{-1}$ $(1<p<2)$.

補題4. 核 $J(r,s)$ は、任意の $1 \leq q \leq \infty$ に対し、$L^q((0,l),ds)$ から $L^q((0,t),dr)$ への有界な積分変換を induce し、その operator norm は、$\|J\|_{q\to q} \leq \int_0^\infty J(r,s)\,ds = (\sin\Delta)^p/\{(\sin\Delta)^p + (\cos\Delta)^p\} < 1$ となる。

この補題から、次の積分方程式系は、解 $F_t(r) \in L^{q(p)}((0,t),dr)$ と $G_t(s) \in L^{q(p)}((0,l),ds)$ をもつことが従う：

$$(4.7)\quad \begin{cases} F_t(r) = \int_0^{\ell} J(r,s)\,G_t(s)\,ds\,, & 0<r<t\,, \\ G_t(s) - \int_0^t F_t(r)\,J(r,s)\,dr = J(t,s)\,, & 0<s<\ell\,,\ s\neq t\,. \end{cases}$$

正値核 $F_t(r)$, $G_t(s)$ を手に入れた今、$B_\Delta(t)$, $-\ell\le t\le\ell$, の確率変分方程式を述べることができる。

定理 5. $3/2 < p < \infty$ の場合、$B_\Delta(t)$ の確率変分方程式は正規形となる：

$$\delta B_\Delta(t) = \xi\sqrt{dt}\quad (t\le 0)\,,\ = \mu(t)\,dt + \xi\sqrt{dt}\quad (t\ge 0)\,,$$

ここで、$\mu(t) = \int_{-\ell}^{0} G_t(-v)\,dB_\Delta(v) - \int_0^t F_t(u)\,dB_\Delta(u)$.

他方、$1<p\le 3/2$ の場合は、$\mu(t)\notin L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ で、正規形とはなり得ない。

課題. $1<p\le 3/2$ の場合、§2, 例 1 の状況に似て、定理 5 の $\mu(t)$, $t\ge 0$, は、generalized Gaussian process とみれば well-defined になると期待される。$\mu(t)$ の共分散の $h\downarrow 0$ における singularity を調べて、この予想を正当化するには、(4.7) の解 $F_t(r)$, $G_t(s)$ の挙動をくわしく知る必要があり、この仕事は我々に残された課題である。

## References

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[2] L. Carraro, Problèmes de prediction pour le processus de Wiener a deux parametres, Probab. Th. Rel. Fields 72 (1986), 619-635.

[3] A. Goldman, Techniques biharmoniques pour l'etude du mouvement brownien de P. Lévy a trois parametres, preprint.

[4] 飛田武幸・櫃田倍之, ガウス過程, 紀伊国屋, 1976 (第二刷 1987).

[5] 飛田武幸, ブラウン運動とレヴィの関数解析, 上.中.下, 数学セミナー 3, 4, 5 月号 (1988), 日本評論社.

[6] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, 1976 (第二版).

[7] P. Lévy, Oeuvres de Paul Lévy, Ⅳ, Gauthier-Villars, Paris, 1980.

[8] 野田明男, Lévy's Brownian motion and reflection positivity, Second P. Lévy Seminar in Nagoya 報告集, 1987.

[9] Y. Okabe, On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian processes with T-positivity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 33 (1986), 1-56.

[10] Si Si, A note on Lévy's Brownian motion, Nagoya Math. J. 108 (1987), 121-130; Part II, 114 (to appear in 1989).