数理解析研究所講究録
674巻 1988年 59-67

連続関数の空間の局所的ふるまいについて

北里大学教養部　羽鳥　理　（Osamu Hatori）

序．2つのBanach空間B_1，B_2に対する有界線形作用素

$$T : B_1 \longrightarrow B_2$$

はどのような条件を満たすとsurjectiveかという形の問題においてB_2が可換C^*環の場合について議論したい。一般に$T(B_1)$は$y \in T(B_1)$に対して$\|y\|' = \inf\{\|x\|_{B_1} : x \in B_1, Tx = y\}$により定義された$\|\cdot\|'$に関してBanach空間になる。さらに$B_1$のnormを適当に定数倍して修正することによって$\|\cdot\|_{B_2} \leqq \|\cdot\|'$とすることができるので考える問題は、Aが

i) Aは$C_0(Y)$（局所compact Hausdorff空間Y上の複素数値連続関数で無限遠点でvanishするもの全体）の複素部分空間

ii) Aはnorm $\|\cdot\|_A$に関して複素Banach空間で$\|\cdot\|_{\infty(Y)} \leqq \|\cdot\|_A$（$\|\cdot\|_{\infty(Y)}$はY上のsup norm）を満たす

の2条件をみたす空間のとき、どのような条件を満たせば $A = C_0(Y)$ となるか？ということになる。Aがuniformly closedであるときはmeasure theoryが有効でよく用いられる。ここでは別の観点から $A = C_0(Y)$ を示す方法について述べたい。その方法により関数環における諸結果がイデアルとの関連において述べなおされ、さらにuniformly closedとは限らない環における結果に拡張される。以下簡単のためYがcompactの場合について述べる。以下Xをcompact Hausdorff空間とし、$C(X)$ はX上の複素値連続関数全体とする。これから述べる方法を標語的に表すと：

A と $C(X)$ が "infinitesimally" localに一致する

$\Downarrow$

A と $C(X)$ が local に一致する

$\Downarrow$

Aがalgebraのときは、$A = C(X)$ となる

2つ目の$\Downarrow$は1の分解を用いれば示すことができる。"infinitesimally" localの内容と最初の$\Downarrow$の部分について述べるのがこの小論の重な内容である。

1. Eを $C(X)$ に含まれたnorm空間（完備でなくともよい）でnorm $\|\cdot\|_E$ は不等式 $\|\cdot\|_{\infty(X)} \leqq \|\cdot\|_E$ を満た

すものとする。Λをdiscrete空間とする。このとき

$$\widetilde{E}^\Lambda = \Lambda\text{上の}E\text{-値有界}(\|\cdot\|_E\text{に関して})\text{関数全体}$$

とおくと$\widetilde{E}^\Lambda$は、$\tilde{f}^\Lambda \in \widetilde{E}^\Lambda$に対して

$$\|\tilde{f}^\Lambda\|_{\widetilde{E}^\Lambda} \equiv \sup\{\|\tilde{f}^\Lambda(\lambda)\|_E : \lambda \in \Lambda\}$$

により定義されたnorm $\|\cdot\|_{\widetilde{E}^\Lambda}$ に関してnorm空間になる。$\|\cdot\|_E$が完備なnorm なら$\|\cdot\|_{\widetilde{E}^\Lambda}$ もそうであり, Eがnorm環なら$\widetilde{E}^\Lambda$もそうなる。一方$\tilde{f}^\Lambda \in \widetilde{E}^\Lambda$に対して

$$\mathring{f}(\lambda, x) \equiv (\tilde{f}^\Lambda(\lambda))(x)$$

により$\mathring{f}$を定義し$\tilde{f}^\Lambda$と$\mathring{f}$を同一視すると、$\|\cdot\|_{\infty(X)} \leqq \|\cdot\|_E$であることから、$\widetilde{E}^\Lambda$は$\Lambda\times X$上の有界連続関数の作る空間と同一視できる。よって$\beta(\Lambda\times X)$で$\Lambda\times X$のStone－Čechのcompact化を表すことにすると $\widetilde{E}^\Lambda \subset C(\beta(\Lambda\times X))$ であるとみなしてよいことになる。$\|\cdot\|_{\widetilde{E}^\Lambda}$ の定義より$\|\cdot\|_{\infty(\beta(\Lambda\times X))} \leqq \|\cdot\|_{\widetilde{E}^\Lambda}$となることは明らかである。特に$\widetilde{C(X)}^\Lambda = C(\beta(\Lambda\times X))$である。次に$x\in X$に対して

$$F_x^\Lambda = \bigcap[\Lambda\times G]$$

とおく(ここで $[\cdot]$ は$\beta(\Lambda\times X)$におけるclosureを表し、$\bigcap$はxのcompact近傍Gすべてに関してのintersectionを表す)。F_x^Λは$\beta(\Lambda\times X)$ の閉集合で次をみたす：

① $F_x^\Lambda = \{p\in\beta(\Lambda\times X) : \langle f\rangle(p) = f(x) \text{ for } \forall f \in C(X)\}$

さらにEがXの点を分離しているときは

$= \{ p \in \beta(\Lambda \times X) : \langle f \rangle (p) = f(x) \text{ for } \forall f \in E \}$

（ここで $f \in C(X)$ に対して $\langle f \rangle$ は $\langle f \rangle (\lambda) = f$ をみたす $\widetilde{C(X)^{\Lambda}}$ の関数を表す。）

② $\beta(\Lambda \times X) = \bigcup_{x \in X} F_x^{\Lambda}$，ここで右辺は disjoint union.

$\varphi \in \widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ に対して

$$N_E^x(\varphi) = \inf \{ \| \tilde{f}^{\Lambda} \|_{\widetilde{E}^{\Lambda}} : \tilde{f}^{\Lambda} \in \widetilde{E}^{\Lambda},\ \tilde{f}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda} = \varphi \}$$

により、$\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ は $N_E^x(\cdot)$ に関して norm 空間となり $\| \cdot \|_{\infty(F_x^{\Lambda})} \leqq N_E^x(\cdot)$ をみたす。さらに E が Banach 空間なら $\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ も Banach 空間になる。Λ は無限集合の場合が本質的であり、$F_x^{\Lambda} \supset [\Lambda \times \{x\}]$ であるが一般には = は成立しない。Λ の濃度が十分大きいと $\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ は E の x の近傍でのふるまいをはんえいするように思われる。$\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ の例を 2, 3 みてみる。

例 1. E = 定数関数全体　のとき

$$\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda} \cong C_b(\Lambda) \equiv \Lambda \text{上の複素数値有界関数全体}$$

例 2. $E = C(X)$　のとき

$$\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda} = C(F_x^{\Lambda})$$

例 3. $x \in X$ に対して $\exists f \in E$ s.t. $f(x) \neq 0$ なる

$$C_b(\Lambda) \subseteq \widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda} \subset C(F_x^{\Lambda})$$

となり $\widetilde{E}^{\Lambda} | F_x^{\Lambda}$ が $C_b(\Lambda)$ に近いと E の x の近くでのふるまいがおだやかで $C(F_x^{\Lambda})$ に近いとはげしいと考えられる.

例4.　$x \in X$ において E の ball が equicontinuous なる

$\hat{E}^{\wedge}|F_x^{\wedge} \cong C_b(\Lambda)$

例5.　$X = \mathbb{C}^n$ の ball で $A(X) = X$ 上で連続 X の内部で正則な複素数値関数全体　のとき

a)　$x \in X$ の内部　のとき

$\widehat{A(X)}^{\wedge}|F_x^{\wedge} \cong C_b(\Lambda)$

b)　$x \in X$ の境界 ∂X のとき

$C_b(\Lambda) \subsetneqq \hat{E}^{\wedge}|F_x^{\wedge} \subsetneqq C(F_x^{\wedge})$　ただし Λ は無限集合で $(A(X)|\partial X)^{\sim\wedge}|F_x^{\wedge\prime}$ は $F_x^{\wedge\prime}$ の点を分離する[1]。ここで $F_x^{\wedge\prime} = \cap [\Lambda \times G']$ で G' は ∂X における x の compact 近傍すべてを動かす。

ここで a)の示すことは $A(X)$ の関数が X の内点の近くでは激しい変化をしないということであるが実際 $A(X)$ の ball の関数は各内点の近くで equicontinuous である。

例6.　A を $C(X)$ に含まれる Banach 環, I を A のイデアル (closed である必要はない) とする。この時

a)　$x \notin \ker I$ (I の kernel) なる

$\hat{I}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = \hat{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$

b)　$x \in \ker I$ の内部 なる

$\hat{I}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = \{0\}$

2. この章で$\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$と$C(F_x^{\wedge})$が一致するための条件を述べるがもう少し一般的に$A \subsetneq B \subsetneq C(X)$のときに$\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$と$\widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$が一致するための条件を調べる。ここで$\|\cdot\|_{\infty(X)} \leqq \|\cdot\|_B \leqq \|\cdot\|_A$と仮定して一般性を失わない。具体的には次を述べる。

(1) $\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = \widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$となる十分条件

特に (1)－i $F_x^{\wedge}$上における関数族の条件

(1)－ii xの近傍における関数族の条件

(2) $\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = C(F_x^{\wedge})$のとき$A$に対してどのようなことが言えるか？

まず(1)について。$\|\cdot\|_B \leqq \|\cdot\|_A$であるので$\widetilde{A}^{\wedge} \subset \widetilde{B}^{\wedge}$であり、だから各$x \in X$に対して$\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} \subset \widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$であって、さらに$N_B^x(\cdot) \leqq N_A^x(\cdot)$をみたす。(1)－i については

定理1. $\forall \tilde{f}^{\wedge} \in \widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$に対して$\exists \tilde{g}^{\wedge} \in \widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$
s.t. $N_B^x(\tilde{f}^{\wedge} - \tilde{g}^{\wedge}) < N_B^x(\tilde{f}^{\wedge})$

$\Rightarrow \widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = \widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$

系1.1. $\widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$が$\widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$で($N_B^x(\cdot)$による位相に関して) dense

$\Rightarrow \widetilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = \widetilde{B}^{\wedge}|F_x^{\wedge}$

次に(1)－iiについては

定理2.　$x\in X$とする。L_n ($n=1,2,\cdots$) はBの部分集合で、xにおいて B-equicontinuous (i.e. $\forall\varepsilon>0$に対して $^\exists G_\varepsilon$: xの近傍 s.t. $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon\|f\|_B$ for $\forall f\in L_n$, $\forall y\in G_\varepsilon$) とする。この時 $A+\bigcup_{n=1}^{\infty}L_n=B$であり, $^\exists f\in A$が$f(x)\neq 0$を満たすかまたは$\forall g\in B$が$g(x)=0$を満たす

$$\Rightarrow\quad \tilde{A}^\Lambda|F_x^\Lambda=\tilde{B}^\Lambda|F_x^\Lambda$$

注 定理2の逆は一般には成立しない(たとえばΛの濃度が有限であると, xがAの共通零点でない限り常に$\tilde{A}^\Lambda|F_x^\Lambda=\tilde{B}^\Lambda|F_x^\Lambda\cong C_b(\Lambda)$である。)が$\Lambda$の濃度がBの濃度以上の時には逆も成立する。$\Lambda$の濃度が$x$のある一組の近傍基の濃度以上である時に逆が成立するかどうか筆者には不明である。

系2.1.　LがBの線形部分空間でその(線形空間としての)次元が可算以下であるものとする。$A+L=B$であり, $^\exists f\in A$が$f(x)\neq 0$を満たすかまたは$\forall g\in B$が$g(x)=0$を満たす

$$\Rightarrow\quad \tilde{A}^\Lambda|F_x^\Lambda=\tilde{B}^\Lambda|F_x^\Lambda$$

注 系2.1.の条件を満たすAはBでclosedでcodimensionは有限(0も含めて)になる。

最後に(2)について。

定理3.　xの一組の近傍基以上の濃度をもつΛに対して

$\tilde{A}^{\wedge}|F_x^{\wedge} = C(F_x^{\wedge})$

$\Rightarrow$ $\exists G$：xのcompact近傍 s.t.

$$A|G = C(G)$$

注 定理1と定理3から測度論を用いないでStone-Weierstrassの定理の証明ができる。

系3.1.　Aが$C(X)$に含まれているBanach環でXの点を分離しさらに$\forall x \in X$に対して$\exists f_x \in A$ s.t. $f_x(x) \neq 0$をみたすものとする。L_n $(n=1,2,\cdots)$は$C(X)$の部分集合で各点$x \in X$でA-equicontinuousなるものとする。今、

$$A + \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = C(X)$$

$$\Rightarrow \quad A = C(X)$$

この特別な場合にČerych [2]により示された定理が得られる。

系3.2.　Aが関数環で$C(X)$と異なるならば、Aの$C(X)$での（線形空間としての）codimensionは無限である。

参　考　文　献

1. A. Bernard and A. Dufresnoy, Calcul symbolique sur la frontièr de Šilov de certains algèbres de fonctions holomorphes, Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 33-43

2. J. Čerch, On linear codimensions of function algebras,
Complex Analysis and Applications '85 141 — 146