数理解析研究所講究録
674巻 1988年 20-37

Distance Formulae and Reflexivity in Operator Algebras

新潟大理　斎藤　吉助（Kichi-Suke Saito）

自己共役でない部分環の研究は1960年代以降、多くの研究者によってなされている。それは、正規でない作用素の構造研究と関連して発展し、現在では作用素環の1つの分野として発展している。その中で、多くの自己共役でない部分環、例えば、Nest環、triangular環、subdiagonal環，reflexive環など、多くのものがあり、ArvesonのCBMS Lecture Note[4]によくまとめられている。そこで、ここでは、reflexive環と距離公式に注目して、最近の結果までをまとめる事を目的とする。

reflexive環に対する距離公式に関する問題は最近の十数年間に多くの研究者によって、研究され発展している。この問題への関心はArveson[3]から生じた。即ち、Hを可分なHilbert空間とし、AをNest環とする。この時、任意の$T\in L(H)$に対して、

$$d(T,A) = \sup\{\|(1-P)TP\| : P\in \mathrm{Lat}(A)\}$$

が成り立つ。但し、$d(T,A)$はTとAとの距離、$\mathrm{Lat}(A)$はA-不変なHの部分空間とする。この結果は違った方法でLance[24]及び、Power[32]によって示された。この公式はNest環に対するCompact Perturbation とsimilarityを含む問題の研究に有用である。Nest環はreflexiveであることから、reflexive環に対して成り立つのかどうか興味のある問題である。即ち、任意の$T\in L(H)$に対して

$$d(T,A) \leq K \sup\{\|(1-P)TP\| : P \in Lat(A)\}$$

を満たすK(>0)が存在するか？[22]において、このようなK(>0)が存在しないreflexive環の例が示され、更に、[14]でDavidsonとPowerによって、この性質を持たないCSL環の例が示された。そこで、この性質を持つreflexive環をArvesonによって、hyperreflexive環と呼ばれている。

reflexive環が自己共役の時、正確にvon Neumann環になる。そこで、全てのvon Neumann環がhyperreflexiveかという問題があるが、現在まだ解けていない。この問題はC*環の微分子や準同型写像の*-表現との相似性の問題と関係して興味のある問題である。

そこで、まず、2節ではreflexive環とhyperreflexive環の定義を述べ、その違いをそのpreanihilatorの構造により説明する。3節では、von Neumann環がいつhyperreflexiveになるかを考える。更に、4節では、自己共役でないreflexive環のhyperreflexivityを考えると共に、作用素論との関係を考察する。

最近、Davidson[13]によって、Nest環についての本が纏められた。興味のある方は参考されることを期待いたします。

2. reflexive環とhyperreflexive環

HをHilbert空間とし、L(H)をH上の全ての有界線形作用素の全体とする。AをL(H)のσ-弱閉部分環とする。Lat(A)をHの全てのA-不変部分空間の全体とする。このとき、

$$\mathrm{alg}(\mathrm{Lat}(A)) = \{ T \in L(H) : (1-p)Tp = 0,\ \forall p \in \mathrm{Lat}(A) \}$$

と定義する。

定義2.1.AをL(H)のσ-弱閉部分空間とする。この時、Aがreflexiveであるとは、A=alg(Lat(A))である時を言う。

注意2.2.あらゆるvon Neumann環はreflexive環である。なんとなれば、Lat(A)は丁度、Aの可換子環 A'のprojectionの全体となるので、von Neumann環のdouble commutant Theoremより、$T \in \mathrm{alg}(\mathrm{Lat}(A))$ならば、$T \in A$が示せる。また、自己共役でないreflexive環の簡単な例を挙げよう。例えば、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

は$L(\mathbb{C}^2)$のreflexive環であり、また、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & a \end{pmatrix} : a,\ b\ \in \mathbb{C} \right\}$$

はreflexive環でない。

まず、reflexive環の特徴付をpreannihilatorにより示す。$L(H)_*$（簡単にL_*）をH上の全てのσ-弱連続線形汎関数とする。この時、L_*の全ての元fは $f(B) = tr(CB)$の形に書ける。但し、trはL(H)上のcanonical traceであり、Cはトレース クラスの作用素で、$\|f\| = tr(|C|)$を満たす。$(L_*)^* = L(H)$であるので、$B \in L(H)$に対して、

$F_B(f) = f(B)$ ($B \in L_*$)と定義する。この時、$\|F_B\| = \|B\|$であり、BよりF_Bの対応により、L(H)上のσ－弱位相とL_*の共役空間の弱*位相が同一視される。

今、AをL(H)のσ－弱閉部分空間とするとき、

$$A_\perp = \{f \in L_* : f(a) = 0, \text{ for all } a \in A\}$$

とAのpreanihilatorを定義する。

定義2.3.fをL_*の任意の元とするとき、fに対応するトレイスクラスの作用素をCとする。このとき、fがelementaryであるとは、Cがrank 1 或は0であるときを言う。

この時、容易に、fがelementaryであることと$f(a) = (ax,y)$ ($x,y \in H$)の形に書けることが同値になることが分かる。

定理2.4([25]). AをL(H)の単位元を持つσ-弱閉部分環とする。この時、Aがreflexiveであることと、$A_\perp$が$A_\perp$の中に含まれるelementary functionalにより生成された閉部分空間になることが同値である。

証明. Dを$A_\perp$の中に含まれるelementary functionalによって生成された閉部分空間とする。いま、Aをreflexive環と仮定する。$D \subset A_\perp$であることは明らかに成り立つので、$D \neq A_\perp$と仮定する。この時、

2※

Hahn-Banach拡張定理より$F_B(d)=0(d\in D)$かつ$F_B(f)\neq 0$(ある$f\in A_\perp$)となる$B\in(L_*)^*$が存在する。この時、$B\in alg(lat(A))$である事を示そう。$p\in Lat(A)(p=0,1)$とする。$x\in pH, y\in(1-p)H$ ($\|x\|=\|y\|=1$)をとる。$w_{x,y}(T)=(Tx,y)$とおくと、$a\in A$ならば、

$$w_{x,y}(a)=(ax,y)=((1-p)apx,y)=0.$$

従って、$w_{x,y}\in A_\perp$であるから、$w_{x,y}\in D$。よって、

$$(Bx,y)=w_{x,y}(B)=F_B(w_{x,y})=0。$$

これより、$(1-p)Bp=0$であるので、$B\in alg(lat(A))=A$が示せる。一方$F(f)\neq 0$なる任意の$f\in A_\perp$に対して、$f(B)=F_B(f)=F(f)\neq 0$。従って、$B\notin(A_\perp)^\perp=A$となるので、矛盾がでる。従って、$D=A_\perp$が示せる。

逆に、$D=A_\perp$と仮定する。このとき、$B\in alg(latA)$ならば、$B\in(A_\perp)^\perp=A$を示せば十分である。Aはσ-弱閉であるので、任意の$f\in A_\perp$に対して、$f(B)=0$.そこで、$D=A_\perp$より、$w_{x,y}(B)=0(\forall w_{x,y}\in A_\perp)$を示せば十分。$w_{x,y}\in A_\perp$を固定する。$P=P_{[Ax]}$を$[Ax]$の上への射影作用素とする。$P\in lat(A)$で、$1\in A$より、$x=Px$.従って、任意の$a\in A$に対して、$(ax,y)=w_{x,y}(a)=0$。そこで、$y\perp[Ax](=PH)$。よって、$y=(1-P)y$。そこで、

$$w_{x,y}(B)=(Bx,y)=(BPx,(1-P)y)=((1-P)BPx,y)=0.$$

従って、$w_{x,y}(B)=0$.　　　　　　　　　　q.e.d.

今、AをL(H)のσ－弱閉部分環とする。この時、任意の$T\in L(H)$に対して、

$$d(T,A)=\inf\{\|T-a\|:\ a\in A\}$$

により、TよりAの距離を定義する。この時、

$$\inf\{\|T-a\|:a\in A\}=\|[T]\|=\|F_{T|A_\perp}\|$$

$$=\sup\{|F_T(f)|:f\in A_\perp,\|f\|\leq 1\}.$$

従って、$d(T,A)=\sup\{\|f(T)\|:f\in A_\top,\|f\|\leq 1\}$を得る。

一方、次の事が容易に成り立つ。任意の$B\in L(H)$に対して、、

(2.1)　　$\sup\{\|(1-p)Bp\|:p\in \mathrm{lat}(A)\}\leq d(B,A)$。

何となれば、$B\in L(H)$を固定する。この時、任意の$a\in A$と任意の$p\in \mathrm{lat}(A)$に対して、

$$\|(1-p)Bp\|=\|(1-p)Bp-(1-p)ap\|\leq\|B-a\|$$

が成り立つので。

定義2.5.AをL(H)のノルム閉部分環とする。Aをhyperreflexiveであるとは、$\sup\|(1-P)b_n p\|\to 0(n\to\infty)$を満たす任意のL(H)の列$\{b_n\}$に対して、$\|a_n-b_n\|\to 0(n\to\infty)$を満たすAの列$\{a_n\}$が存在する。

容易に分かるように、Aがhyperreflexiveならば、reflexiveになり、自動的に、Aは弱閉になる。

今簡単のために、任意の$b\in L(H)$に対して、

$$\alpha(b)=\sup\{\|(1-p)bp\|:p\in \mathrm{lat}A\}$$

と$L(H)$上の半ノルムを定義する。この時、いつも、任意の$b\in L(H)$に対して、$\alpha(b)\leqq d(b,A)$が成り立つ。さらに、

定理2.6. Aがhyperreflexiveであることと$L(H)$上の２つの半ノルム$\alpha(b)$と$d(b,A)$が同値である事が必要十分条件である。即ち、任意の$b\in L(H)$に対して、

(2.2) $$d(b,A)\leqq K\alpha(b)$$

を満たす$K(>0)$が存在することが必要十分条件である。

そこで、次の事が問題となるので、次節以降で考える。

問題2.7. あらゆるreflexive環はhyperreflexiveか？ 特に、全てのvon Neumann環はhypereflexiveか？

問題2.8. (2.2)を満たす$K(>0)$が存在するとき、その下限を$K(A)$と置くとき、$K(A)$の大きさはどのくらいか？

次に、hyperreflexive環のpreanihilatorの構造を考える。

定理2.9([4,Theorem7.4]). Aを$L(H)$のσ－弱閉部分環とする。この

時、Aがhyperreflexive環であるための必要十分条件は任意の$f \in A_{\perp}$は$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$で各$f_n$は$A_{\perp}$に含まれるelementary functionalで$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < \infty$を満たすものに表せることである。

定理2.4より、Aがreflexive環ならば、$A_{\perp}$は$A_{\perp}$に含まれるelementary functionalによって生成されるので、任意の$f \in A_{\perp}$は$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$で各$g_n$は$A_{\perp}$に含まれるelementary functionalの一次結合で、$\sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \| < \infty$を満たすものである。従って、任意の$f \in A_{\perp}$は$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$（$f_n$は$A_{\perp}$のelementary functional)と書ける。しかしながら、$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < \infty$の条件は保証されない。この条件を満たすように$f_n$を取ることが出来れば、問題2.7は解決する。

3. von Neumann環とhyperreflexivity

AをL(H)のselfadjoint reflexive環とする。即ち、Aをvon Neumann環とする。この時、この節では、von Neumann環がいつhyperreflexiveになるかを考える。序論でも触れたように、これが微分子のノルムと関係してくる。

定義3.1.δをAよりL(H)への線形写像とする。この時、δが微分子であるとは、任意のS,T$\in$Aに対して、$\delta(ST)=\delta(S)T+S\delta(T)$を満たすときを言う。

今、T$\in$L(H)に対して、$\Delta_T(S)=ST-TS(S\in A)$と定義すると、$\Delta_T$はAよりL(H)への微分子になる。この形の微分子をinnerという。[20,Lemma1.2]から、任意のAからL(H)への微分子はノルムの意味で連続になるのでその微分子のノルムを考えることができる。

命題3.2([35]).任意のb$\in$L(H)に対して、

$$\|\Delta_{b|A'}\|\leqq 4\sup\{\|(1-p)bp\|:p\in lat(A)\}\leqq 2\|\Delta_{b|A'}\|$$

証明。任意のb$\in$L(H)に対して、

$$2\sup_{p\in lat(A)}\|(1-p)bp\|$$

$$=2\sup_{p\in lat(A)}(\max\{\|(1-p)bp\|,\|pb(1-p)\|\})$$

$$=2\sup_{p\in lat(A)}\|(1-p)bp-pb(1-p)\|=2\sup_{p\in lat(A)}\|pb-bp\|$$

$$=\sup_{p\in lat(A)}\|(2p-1)b-b(2p-1)\|=\sup_{p\in lat(A)}\|\Delta_b(2p-1)\|$$

$$\leqq\|\Delta_{b|A'}\|。$$

逆に、$\sup_{p\in lat(A)}\|(1-p)bp\|=c$とおく。この時、任意の$p\in lat(A)$に対して、

$$\|\Delta_b(2p-1)\|=2\|pb-bp\|\leqq 2c。$$

KをA′の自己共約部分の単位球とする。この時、Kの端点の全体は、{2p-1:pはA′のprojection}となるので、

$$\|\Delta_{b|K}\| \leqq 2c。$$

任意の$a \in (A')_1$に対して、$a=a_1+ia_2$ $(a_1, a_2 \in K)$と書けるので、

$$\|\Delta_b(a)\| \leqq \|\Delta_b(a_1)\| + \|\Delta_b(a_2)\| \leqq 4c。$$

従って、命題を得る。

この様な微分子の研究はKadison-Kastler[21], Johnson-Parrott [20]及びChristensen[7],[8]等に詳しく書かれている。微分子のノルムとAとの距離の関係として、Johnsonは[19]で次の問題を出している。

問題3.3.AをL(H)のvon Neumann環とする。この時、任意の$b \in L(H)$に対して、$(1/2)\|\Delta_{b|A'}\| \leqq d(b,A) \leqq K\|\Delta_{b|A'}\|$を満たす$k(>0)$が存在するか?

しかしながら、命題3.2より、問題3.3が成り立つことと、Aがhyperreflexiveが同値になる事が分かる。更に、Christensinは次の事を示している。

定理3.4([8.Theorem3.1]).AをL(H)のvon Neumann環とする。この時、次の事は同値である。

(1)Aがhyperrelexiveである。

(2)任意の$b \in L(H)$に対して,$d(b,A) \leqq K\|\Delta_{b|A'}\|$をみたす$K(>0)$

が存在する。

(3)A′からL(H)への任意の微分子はinnerである。

(4)A′からL(H)への任意の微分子は完全有界である。

今、δをA′よりL(H)への任意の微分子とする。この時、

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} x & \delta(x) \\ 0 & x \end{pmatrix}, \qquad x \in A'$$

と定義すると、πはA′からL(H⊕H)へのnon-degenerate表現となる。従って、Haagerup[18]により、この形の表現πが*-表現と相似であることと、Aがhyperreflexiveが同値である事が解る。しかしながら、必要十分条件を並べても問題の解決にはならない。そこで、どんなvon Neumann環がhyperreflexiveであるのか興味のある問題である。次の結果はChristensenによる。

定理3.5.Aをseparating vectorを持つvon Neumann環とする。この時、任意の$b \in L(H)$に対して、

$$d(b,A) \leqq 12\|\Delta_{b\,|\,A'}\| \leqq 48 \sup_{p \in \mathrm{lat}(A)} \|(1-p)bp\|$$

が成り立つ。従って、Aはhyperreflexiveであり,$K(A) \leqq 48$である。

この定理より、Aが標準形(Standard form)ならば、Aはhyperreflexiveである。また、Rosenoer[35]により、A′がproperly infiniteならば、いつもseparating vectorが存在するので、Aはhyperreflexiveであり、この時、$K(A) \leqq 6$を満たす。また、Aが単射的(injective)ならば、$K(A) \leqq 4$であり、A或はA′が可換の時は、$K(A) \leqq 2$が成り立つ。以上より、Aがseparating vectorを持たないときは

現在の所未解決である。

4. 自己共役でないreflexive環

この節では、reflexive環が自己共役でない場合に付いて、距離公式との関係を考察する。その中で、reflexive環の２つの重要なクラスを定義する。

定義4.1.LをL(H)のprojectionからなる族とする。この時、Lがsubspace latticeであるとは、0と1を含むL(H)のprojectionからなる強閉な束を言う。また、Pがnestであるとは、全順序であるsubspace latticeを言う。

Pをnestとする。この時、

$$\mathrm{alg}(P)=\{a\in L(H):(1-p)ap=0,(\forall p\in P)\}$$

と定義する。このL(H)のσ-弱閉部分環をnest環という。Loebl-Muhly[28]により、alg(P)はL(H)上の一係数同型群$\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$が存在して、これより定義される解析的部分環となる。

更に、Lをsubspace latticeとする。LがCSL(commutative subspace lattice)であるとは、Lの元が互いに可換である時を言う。LをCSLとするとき、alg(L)($=\{a\in L(H):(1-p)ap=0,(\forall p\in L\}$)をCSL環という。

容易に分かるように、nest環はCSL環であり、CSL環はreflexive環である。まず、Arveson[3]は次の結果を示した。

定理4.2.Aをnest環とする。この時、任意の$b \in L(H)$に対して、

$$d(b,A)=\sup_{p\in \mathrm{lat}(A)}\|(1-p)bp\|$$

が成り立つ。また、この時、$K(A)=1$である。

問題2.7の解答として、Kraus-Larsonはhyperreflexiveでないreflexive環の例を[23]で示した。まず、

$$S_n=\left\{\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \mu & -n(\lambda+\mu)\end{pmatrix} : \lambda,\ \mu\in\mathbb{C}\right\}$$

と置き、更に、

$$A_n=\left\{\begin{pmatrix}\lambda 1 & S\\ 0 & \mu 1\end{pmatrix} : \lambda,\ \mu\in\mathbb{C},\ S\in S_n\right\}$$

とする。この時、$n>3$のとき、A_nはhyperreflexive環で$K(A_n)>(n/3)$となる。そこで、$A=\sum_{k=4}^{\infty}A_n$、$H=\sum_{k=4}^{\infty}\oplus H_n$ ($H_n=\mathbb{C}^4$)とすると、AはL(H)上でhyperreflexive環でない。更に、Davidson-Power[14]でhyperreflexiveでないCSL環の例を示した。

次に、L(H)の元Tをとる。A(T)をTと1によって生成されたL(H)のσ-弱閉部分環とする。Sarason[37]によって、Tが正規作用素ならば、A(T)はreflexive環であり、更に、Rosenoer[35]でA(T)はhyperreflexiveであり、$K(A(T))\leqq 3$であることが示された。Sarasonはまた、multiplicity one の片側シフトSとすると、A(S)はreflexiveである事を示したが、A(S)がhyperreflexiveであることは未解決であっ

たが、最近、Davidson[12]において、それを示した。実際、A(S)は解析的なToeplitz作用素全体からなり、$L(H^2)$のある極大可換部分環である。更に、$K(A(S)) \leqq 39$である事を示した。また、未解決の問題としては、Tがsubnormalのとき、Oin-Thmoson[30]はA(T)がreflexiveである事を示したが、A(T)はhyperreflexiveか？更に、TがHyponormalのとき、A(T)はreflexiveか？

最後に、von Neumann環の解析的部分環に対する距離公式を示そう。Mをvon Neumann環とし、$\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$をM上の一径数同型群とする。$H^\infty(\alpha)$を$\alpha$によって定義される解析的部分環とする。この時、$\alpha_t = ad(W_t)$で$W_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dp_s$とする。この時、次の結果がある。

定理4.3([38]).上の条件を仮定する。もしMが単射的ならば、この時、任意の$x\in M$に対して、

$$d(x, H^\infty(\alpha)) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \|(1-p_s)xp_s\|$$

しかしながら、最近、定理4.3はMが単射的でなくても成り立つことが示された(cf.[36])。

参考文献

[1] N. T. Andersen, Compact perturbations of reflexive

algebras, J. Funct. Anal., 38(1980), 366-400.

[2] N. T. Andersen, Similarity of continuous nests, Bull. London Math. Soc., 15(1983), 131-132.

[3] W. B. Arveson, Interpolation problems in nest algebras, J. Funct. Anal, 20(1975), 208-233.

[4] W. Arveson, Ten lectures on operator algebras, CBMS Reginal Conference Series 55(AMS, 1984).

[5] E. Azoff, K-reflexivity in finite-dimensional spaces, Duke Math. J., 40(1973), 821-830.

[6] H. Bercovici, C. Foias and C. Pearcy, Dual algebras with applications to invariant subspaces and dialation theory, CBMS Reginal Confernce Series 56(1985).

[7] E. Christensen, Perturbations of operator algebras II, Indiana Univ. Math. J., 26(1977), 891-904.

[8] E. Christensen, Extensions of derivations II, Math. Scand., 50(1982), 111-122.

[9] E. Christensen, On non self-adjoint representations of C*-algebras, Amer. J. Math., 103(1981), 817-833.

[10] K. Davidson, Commutative subspace lattices, Indiana Univ. Math. J., 27(1978), 479-490.

[11] K. Davidson, Similarity and compact perturbations of nest algebras, J. Reine Angew. Math., 348(1984), 72-87.

[12] K. Davidson, The distance to the analytic toeplitz operators,Illinois J. Math., 31(1987),265-273.

[13] K. Davidson, Nest algebras, Pitman Research Notes in

Mathematics Series 191(1988).

[14] K. Davidson and S. C. Power, Failure of the distance formula, J. London Math. Soc., 32(1985), 157-165.

[15] J. Erdos, Nonselfadjoint operator algebras, Proc. Roy. Irish Acad. 81(1981),127-145.

[16] T. Fall, W. Arveson and P. S. Muhly, Perturbations of nest algebras, J. London Math. Soc., 1(1979), 137-150.

[17] F. Gilfeather andD. Larson, Nest subalgebras of von Neumann algebras: commutants modulo compacts and distance estimates, J. Operator Theory, 7(1982), 279-302.

[18] U. Haagerup, Solution of the similarity problem for cyclic representations of C^*-algebras, Ann. of Math., 118(1983), 215-240.

[19] B. E. Johnson, Characterization and norms on von Neumann algebras, Lectures Note in Math., 725(1979), 228-236.

[20] B. E. Johnson and S. K. Parrott, Operators commuting with a von Neumann algebra modulo the set of compact operators, J. Funct. Anal., 11(1972), 39-61.

[21] R. V. Kadison and D. Kastler, Perturbations of von Neumann algebras I, Amer. J. Math., 94(1972), 38-54.

[22] J. Kraus and D. Larson, Some applications of a technique for constructing reflexive operator algebras, J. Operator Theory, 13(1985), 227-236.

[23] J. Kraus and D. Larson, Reflexivity and distance formulae, Proc. London Math. Soc., 53(1986),340-356.

[24] E. C. Lance, Cohomology and perturbations of nest algebras, Proc. London Math. Soc., 43(1981), 334-356.

[25] D. Larson, Annihilator of operator algebras, Topic in modern opertor theory 6(1982), 119-130.

[26] D. Larson, Nest algebras and similarity transformations Ann. of Math., 121(1985), 409-427.

[27] D. Larson, Hyperreflexivity and a dual product construction, Trans. AMS, 294(1986),79-88.

[28] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.

[29] A. Loginov and V. Sulman, Hereditary and intermediate reflexivity of W*-algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR, 39 (1975),1260-1273;Math. USSR-Izv., 9(1975), 1189-1201.

[30] R. F. Olin and J. E. Thomson, Algebras of subnormal operators, J. Funct. Anal., 37(1980), 271-301.

[31] F. Pop, Perturbations of nest-subalgebras of von Neumann algebras, preprint(1988).

[32] S. Power, The distance to upper triangular operators, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 88(1980), 327-329.

[33] J. Ringrose, On some algebras of operators, Proc. London Math. Soc., 15(1965),61-83.

[34] J. Ringrose, On some algebras of operators II, Proc.

London Math. Soc. 16(1966), 385-402.

[35] S. Rosenoer, Distance estimates for von Neumann algebras, Proc. AMS, 86(1982),248-252.

[36] K. -S. Saito, The distance formulae for analytic subalgebras in von Neumann algebras, in preparation.

[37] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966),511-517.

[38] B. Solel, Distance formula for anlalytic operator algebras, Bull. London Math. Soc., 20(1988), 345-349.