

可解格子模型 (I)

京大教養 伊達 悦朗 (DATE Etsuro)

東大教養 国場 敦夫 (KUMABA Atsuo)

京大数理研 三輪 哲二 (MIWA Tetsuji)

京大数理研 尾角 正人 (OKADO Masahito)

京大数理研 神保 道夫 (JIMBO Michio)

格子模型の研究は、本来の統計物理系の模型としての他、連続体上の場の理論の格子近似という側面からも物理的に重要である。なかでも可解な模型は、限られた状況でしか構成できないながら、厳密な情報をひきだせる点で殊に興味深く、われわれに”自由度無限大の数学”における絶好のworking laboratoryを提供してくれている。本稿では可解格子模型とアフィン・リー環をめぐる最近の話題を紹介したい。

1. Ising 模型と1点関数

本稿を通じて考察の対象とするのは2次元の正方格子に限る。格子模型は、各格子点上の自由度(確立変数) s_i とそれらの間の局所的相互作用とを与えることによって設定される。変数 s_i のとる値のことを局所状態と呼ぶ。最も簡単な例は、上向き・下向きの2状態のみをとる変数 $s_i = +1, -1$ が隣り同志で相互作用するIsing 模型である。物理的には例えば鉄原子が格子上に並んだ磁石の模型と解釈される。Ising 模型は、格子上の一つの「配置」、即ち s_i 達の値の組 $s = \{s_i\}$ が実現する確率が

$$p(s) = \prod_{\langle ij \rangle} \exp(-E_1 s_i s_j) \prod_{\langle ik \rangle} \exp(-E_2 s_i s_k) / Z$$

であるものとして定義される。ここに E_1, E_2 は温度 T に逆比例する定数、 $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle$ はそれぞれ水平・垂直方向の隣接格子点の組にわたる積を表す。 Z は全確率を 1 に規格化するための定数である。

Onsager は、格子サイズ無限大の極限で $\log Z / (\text{lattice size})$ を explicit に求めることにより、この系がある臨界温度 $T = T_c$ で相転移をおこすことを示した。その際自然に E_1, E_2 の楕円関数による parametrization $E_i = E_i(u, q) (i=1, 2)$ が生じる。 $q=0$ が絶対零度、 $q=1$ が臨界温度に対応する。

ある決まった格子点 1 の上の変数 s_1 の期待値 $\langle s_1 \rangle$ は 1 点関数と呼ばれる。但し格子の境界上の変数は例えば +1 に固定しておく。 $\langle s_1 \rangle$ は Onsager, Yang により決定された。その結果はパラメタ u によらず、 q の関数として次のように与えられる ($q = \exp(i\pi\tau), p = \exp(-i\pi/\tau)$) :

$$\begin{aligned} \langle s_1 \rangle &= \prod_{n>0} (1 - q^{2n-1}) / (1 + q^{2n-1}) \\ &= \sqrt{2} p^{1/8} \prod_{n>0} (1 + p^{2n}) / (1 + p^{2n-1}) \end{aligned}$$

モジュラー変換 $\tau \rightarrow -1/\tau$ によって、摂動的方法では困難な臨界温度付近 $q \rightarrow 1$ ($p \rightarrow 0$) での振舞いがわかる点にこの結果の物理的な重要性がある。

2. face 模型

局所状態数が 2 以上である一般の状況を考えよう。相互作用の入れ方として、各単位正方形 (face) の四隅の配置 (a, b, c, d) ごとに重み $W(a, b, c, d)$ (Boltzmann weight) を与え、(大域的) 配置 s の実現確率を

$$p(s) = \prod W(a, b, c, d) / Z \quad (\text{積は全ての face にわたる})$$

と定めた物を face 模型と言う。Ising 模型は $W(a, b, c, d) = \exp(-E_{1ac})$ or $\exp(-E$

2bd)ととったface模型とみなすことができる。face模型の1点関数は

$$P_a = \text{Prob}(s_1 = a) = \sum \delta_{s_1 a} \prod W(a,b,c,d) / Z$$

で定義される。この量は境界条件にsensitiveに依存することに注意しておく。

face模型の可解性の条件として更に次の要請をおく。

<要請> $W(a,b,c,d)$ はextra parameter u を含み、Yang-Baxter方程式

$$W_1(u)W_2(u+v)W_1(v) = W_2(v)W_1(u+v)W_2(u)$$

を満たす。

ここに $W_1(u) = W(u) \otimes I$, $W_2(u) = I \otimes W(u)$, $W(u)$ は $V \otimes V \otimes V$ ($V = \mathbb{C}^N$, N は局所状態の数)における行列 $\sum W(a,b,c,d) E_{aa'} \otimes E_{bd} \otimes E_{cc'}$ を表す。

Ising模型では一般の n 点相関関数が求められているが、これには特殊な事情が効いており、上述の一般のクラスにはあてはまらない。しかし1点関数についてのみは、Yang-Baxter方程式と2、3の付加条件の下にそれを求める独自のアルゴリズムが開発されている(Baxter[1])。われわれは以下この1点関数を主題とする。

3. 1点関数と分岐係数

前節の問題は数学的には2つのステップにわけられる。

- 1) 可解格子模型の構成、即ちYang-Baxter方程式の解を見付けること。
- 2) その1点関数の計算。

この方向で最初の組織的な成果であるAndrewsらの仕事[2]において、各自然数 $L (> 3)$ に応じ、局所状態 $s_i = 1, 2, \dots, L-1$ をもつ無限系列の模型がつくられ、モジュラー関数による1点関数の表示が与えられた(Ising模型は $L=4$ の場合と

して含まれる)。その後2パラメタ(L,N)をもつ形に拡張される過程を通じて、この結果の持つリー環的な背景が解ってきた[3]。これらの(拡張された)模型は次の様な構造をもっている。

i) 局所状態の集合は、アフィン・リー環 $A_1^{(1)}$ の level L-2 の dominant integral weight 全体と同一視される。

ii) 隣り合う格子点上に許される局所状態 b,cは次の拘束条件を満たす。

b-c は $A_1 = \mathfrak{sl}(2)$ の N次対称テンソル表現のweight

言い換えればBoltzmann weight $W(a,b,c,d)$ は(a,b),(b,c),(a,d),(d,c) が全て上の条件を満たす時に限り0でない。

Ising 模型と同様Boltzmann weightは楕円テータ関数 $\theta(u,q)$ によって表示され、 $q=0$ が絶対零度、 $q=1$ が臨界温度に相当する。

以下level r の最高weight a をもつ既約加群 $L(a)$ の指標を記号 $\chi_a^{(r)}(z,q)$ によって表す。今 ξ, η をそれぞれlevel l, N の dominant integral weight とする。このときリー環のペア $(A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}, A_1^{(1)})$ に付随して既約表現 $L(\xi) \otimes L(\eta)$ の分解が生じる：

$$\chi_{\xi}^{(l-N)}(z,q) \chi_{\eta}^{(N)}(z,q) = \sum b_{\xi\eta a}(q) \chi_a^{(l)}(z,q), \quad l = L-2$$

係数 $b_{\xi\eta a}(q)$ はbranching coefficient とよばれ、モジュラー関数になることが知られている。以上の言葉を用いて、求める1点関数の結果は次の形にまとめられる：

<1点関数>

$$P_a = b_{\xi\eta a}(q) \chi_a(z, q) / \chi_\xi(z, q) \chi_\eta(z, q), \quad z = \sqrt{q}$$

ここに ξ, η は 1 点関数の定義における境界条件と対応している。

導出の詳細はここでは述べる事ができないが、Baxterの方法により、問題はリー環の weight lattice 上のある種の partition sum の計算に帰着する。

$N=1$ の場合上述の模型は、"minimal" unitary series と呼ばれる基本的な conformal field theory と同一の臨界指数を格子上に実現している点で注目を浴びた。一般に branching coefficient は Virasoro 代数の指標 (特に $N=1$ なら既約指標) になる事が知られているので、臨界指数の一致は上の結果の corollary になる。しかし 1 点関数が何故 branching coefficients で記述されるのか、その理由は未だに不明である。

4. $X_n^{(1)}$ 型模型

前節の模型は更にリー環的な拡張が可能である。






データとして、 $X_n^{(1)}$ 型のアフィン・リー環、level l , および classical part X_n の有限次元既約表現 π を与える。level l の dominant integral weight 全体を局所状態の集合にとり、隣接局所状態 b, c の間に拘束条件

$$b-c \text{ は } \pi \text{ の weight}$$

を要請する。

<予想> この設定の下に Yang-Baxter 方程式の解が存在し、1 点関数について同様の結果がなりたつ。

ただし、 π の weight 重複度が 1 を越え得る場合には定式化に修正を要する。(これについては本講演の (II) を参照。) 現在解っている場合の表を下に掲げる (cf. [4]).

型	π	リ-環のペア	level
$A_n^{(1)}$		$(A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)}, A_n^{(1)})$	$l-N, N^*$
$A_n^{(1)}$		$(A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)}, A_n^{(1)})$	$l-1, 1^*$
$B_n^{(1)}$		?	
$C_n^{(1)}$		$(C_l^{(1)} \oplus A_{2l-1}^{(1)}, C_l^{(1)})$	$n-1, 1^{**}$
$D_n^{(1)}$		$(D_n^{(1)} \oplus D_n^{(1)}, D_n^{(1)})$	$l-1, 1$

* $n=1$ または $N=1$ の場合以外は予想

** regime II

正確には今まで述べてきた結果は模型の Boltzmann weight が実になる領域のうちの一つ (regime III) に関するものである。他の領域でも知られている限りにおいて 1 点関数はモジュラー関数になるが、リ-環のペアは異なったり、リ-環的解釈を許さなかったりする [3]。さらに C 型の regime III では例外的に Baxter の方法を形式的に適用できない事情が生じており、事態は単純ではない。統一的な理解を模索しているのが現状である。

文献

- [1] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic, 1982.
- [2] G.E. Andrews, R.J. Baxter and P.J. Forrester, Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan identities, *J. Stat. Phys.* 35 (1984) 193-266.
- [3] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, Exactly solvable SOS models, I, *Nucl. Phys. B* 290 [FS20] (1987) 231-273; II, *Adv. Stud. Pure Math.* 16 (1988) 17-122.
- [4] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras, *Commun. Math. Phys.* 116 (1988) 507-525.