数理解析研究所講究録
675巻 1988年 79-86

"Fundamental Principle" と ϑ-zerovalue

京大 数理研 河合隆裕
(KAWAI Takahiro)
京大 理 竹井義次
(TAKEI Yoshitsugu)

§0. 無限階の（擬）微分方程式系の構造に就ての理解は徐々に深まってきた（例えば［2］及びそこに所載の文献参照）けれど（$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$-加群としてでなく）$\mathcal{D}^{\infty}$-加群として扱った時の困難さと利点に就ての考察は未だ十分でないと思われる。具体的な解析は、まず

(a) リーマン Θ に関連した物

(b) 定数係数の物

に就て試みるのが自然であろう。例えば［3］は（b）に関する物で、はじめて無限階の方程式系で余り特殊でない物を扱った，と云う点で面白いけれど不幸にして（a）の目的には役立たないようである。以下では，逆に（a）の研究に於て現われる系の具体的構成を与えることを目標とする。即ち本稿では［1］の解析を，理論のその後の進展に応じてより具体的に遂行することを目標とする。以下記述の簡単の為、2次元のリーマン Θ を扱うこととする。また，その超局所化に就ては，問題点を "(a)∩(b)"（"(a)∪(b)" でなく）に絞る為ここでは触れない。即ち $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$-加群としてでなく $\mathcal{D}^{\infty}$-加群としての扱いに徹することとする。

§1. $$\vartheta(\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\exp(\pi i\langle\tau m, m\rangle)\qquad\left[\begin{array}{l}\tau\in M(2\times 2,\mathbb{C})\\ {}^t\tau=\tau\end{array}\right]$$

に対し $$\vec{\vartheta}(\tau)=\begin{bmatrix}\vartheta(\tau)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$ と定める時.

8い

$$
(1.1)\begin{cases}
(\exp P_j - 1)\,\vec{\vartheta} = 0\,, & j = 1, 2 \\
(\exp Q_j - 1)\,\vec{\vartheta} = 0\,, & j = 1, 2
\end{cases}
$$

但し [$\partial/\partial\tau_{ij} = \partial_{ij}$ と略記して]

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ 2\pi i(1 + 2\tau_{11}\partial_{11} + \tau_{12}\partial_{12}) & 0 & 0 \\ 2\pi i(\tau_{11}\partial_{12} + 2\tau_{12}\partial_{22}) & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{22} \\ 2\pi i(2\tau_{12}\partial_{11} + \tau_{22}\partial_{12}) & 0 & 0 \\ 2\pi i(1 + \tau_{12}\partial_{12} + 2\tau_{22}\partial_{22}) & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4\pi i\,\partial_{11} & 0 & 0 \\ 2\pi i\,\partial_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\pi i\,\partial_{12} & 0 & 0 \\ 4\pi i\,\partial_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

なる関係式が成立することは容易に判る。(例えば [1])
ただ [1] に於て強調されているように、$\{P_j, Q_k\}_{1 \leqq j, k \leqq 2}$ はそのままでは (一変数の場合から "simple-minded" 予想される) 正準交換関係を満たさない。事実,

$$D_{11}=4\pi i\,\partial_{11},\qquad D_{12}=2\pi i\,\partial_{12}\quad,\qquad D_{22}=4\pi i\,\partial_{22}$$

と記すこととして $\vec{\vartheta}(\tau)$ は、更に

(1.2) $$R_\ell\,\vec{\vartheta}=0\qquad \ell=0,1,2\quad,$$

但し

$$R_0\underset{\mathrm{def}}{=}[Q_2,\ Q_1]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ & D_{12} & -D_{11}\\ & D_{22} & -D_{12}\end{bmatrix}$$

$$R_1\underset{\mathrm{def}}{=}[Q_1,\ R_0]=\begin{bmatrix}0 & D_{12} & -D_{11}\\ 0 & 0 & 0\\ D_{12}^2-D_{11}D_{22} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_2\underset{\mathrm{def}}{=}[Q_2,\ R_0]=\begin{bmatrix}0 & D_{22} & -D_{12}\\ D_{11}D_{22}-D_{12}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

なる関係式をも亦満足する。[註] 本稿は §0 (b) を主たる問題意識とするので P_j と R_ℓ の関係に就ては以下では触れないこととする。これに就ては [1] を参照され度い。

§2. 前節で導入した作用素を用いて解析的に扱い易そうで…

[註] 文献 [1] に用いられている R_j の $2\pi i$ 倍となっているので注意。

しかも [3] では cover されていない方程式系の例を与えよう。また厳密な証明はしていないが [3] の方法により以下の方程式系に対して "fundamental principle" が成立つことを示すことは可能であろうと思っている。

さて、$\exp Q_j - 1$ の形のままでは $\det[\exp Q_j - 1] \equiv 0$ となり、扱いにくいので

(2.1) $$F_1 = (\exp Q_1 - 1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{\sim}{c}(D_{11}) & 0 \end{bmatrix} R_0 ,$$

(2.2) $$F_2 = (\exp Q_2 - 1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\sim}{c}(D_{22}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_0 ,$$

但し $$\underset{\sim}{c}(\zeta) = (\cosh\sqrt{\zeta} - 1)/\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^{k-1}}{(2k)!} ,$$

という2つの作用素を導入する。尚、

(2.3) $$\begin{cases} \tilde{c}(\zeta) = \zeta\, \underset{\sim}{c}(\zeta), \\ \tilde{s}(\zeta) = (\sinh\sqrt{\zeta})/\sqrt{\zeta} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^{k-1}}{(2k-1)!} \end{cases}$$

と定めれば、実は

(2.4) $$\begin{cases} F_1 = \tilde{c}(D_{11}) + \tilde{s}(D_{11})\, Q_1 \\ F_2 = \tilde{c}(D_{22}) + \tilde{s}(D_{22})\, Q_2 \end{cases}$$

とまとめることが出来る。より具体的には，例えば

$$F_1 = \begin{bmatrix} \tilde{c}(D_{11}) & \tilde{s}(D_{11}) & 0 \\ D_{11}\tilde{s}(D_{11}) & \tilde{c}(D_{11}) & 0 \\ D_{12}\tilde{s}(D_{11}) & 0 & \tilde{c}(D_{11}) \end{bmatrix}$$

と書き直すことが出来，従って

$$\det F_1 = -2\,\tilde{c}(D_{11})^2 \neq 0$$

となることに注意しておく。ここで F_1, F_2, R_0, R_1, R_2 の交換関係を求めておこう:

$$(2.5)\quad \begin{cases} [F_1, F_2] = -\tilde{s}(D_{11})\tilde{s}(D_{22})R_0 \\ [F_1, R_0] = \tilde{s}(D_{11})R_1, \quad [F_2, R_0] = \tilde{s}(D_{22})R_2 \\ [F_1, R_1] = \tilde{s}(D_{11})D_{11}R_0, \quad [F_2, R_1] = \tilde{s}(D_{22})D_{12}R_0 \\ [F_1, R_2] = \tilde{s}(D_{11})D_{12}R_0, \quad [F_2, R_2] = \tilde{s}(D_{22})D_{22}R_0 \\ [R_0, R_1] = -D_{12}R_1 + D_{11}R_2 \\ [R_0, R_2] = -D_{22}R_1 + D_{12}R_2 \\ [R_1, R_2] = (D_{12}^2 - D_{11}D_{22})R_0 \end{cases}$$

以下，記号を統一的にする為，$L_j = F_j$ $(j=1,2)$，$L_j = R_{j-3}$ $(j=3,4,5)$ と定め，(2.5) の関係式をまとめて

$$(2.6)\qquad [L_j, L_k] = \sum_{\ell=1}^{5} c_{jk}^{\ell} L_\ell$$

と記すこととする。（従って c_{jk}^{ℓ} は無限階微分作用素。）

今 $\mathcal{O} = \mathcal{O}^3$ とし、$\varphi_{(p-1)} \underset{\mathrm{def}}{=} (\varphi_{j_1,\dots,j_{p-1}}) \in \mathcal{O}^{\binom{5}{p-1}}$

［但し φ は index に関し交代的］に対し p-cochain

$$(2.7)\qquad \psi_{(p)} = d_{p-1}\varphi_{(p-1)}$$

を

$$(2.8)\qquad \psi_{j_1,\dots,j_p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} L_{j_k}\varphi_{j_1,\dots,\hat{j}_k,\dots,j_p}$$

$$+ \sum_{1\leqq k_1<k_2\leqq p} \sum_{\alpha=1}^{5} (-1)^{k_1+k_2} c_{j_{k_1},j_{k_2}}^{\alpha} \varphi_{\alpha,j_1,\dots,\hat{j}_{k_1},\dots,\hat{j}_{k_2},\dots,j_p}$$

により与えれば、$d_p \circ d_{p-1} = 0$ が成立し、これにより、一つの complex が与えられる。（尚、今の場合 $d_p \circ d_{p-1} = 0$ は自明ではないことを注意しておく。）

最後に $d_1\varphi_{(1)} = \psi_{(2)}$ の具体的表示を与えておこう。

$$
\begin{pmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{1,3} \\ \psi_{1,4} \\ \psi_{1,5} \\ \psi_{2,3} \\ \psi_{2,4} \\ \psi_{2,5} \\ \psi_{3,4} \\ \psi_{3,5} \\ \psi_{4,5} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-F_2 & F_1 & \tilde{\delta}(D_{11})\tilde{\delta}(D_{22}) & 0 & 0 \\
-R_0 & 0 & F_1 & -\tilde{\delta}(D_{11}) & 0 \\
-R_1 & 0 & -\tilde{\delta}(D_{11})\, D_{11} & F_1 & 0 \\
-R_2 & 0 & -\tilde{\delta}(D_{11})\, D_{12} & 0 & F_1 \\
0 & -R_0 & F_2 & 0 & -\tilde{\delta}(D_{22}) \\
0 & -R_1 & -\tilde{\delta}(D_{22})\, D_{12} & F_2 & 0 \\
0 & -R_2 & -\tilde{\delta}(D_{22})\, D_{22} & 0 & F_2 \\
0 & 0 & -R_1 & R_0 + D_{12} & -D_{11} \\
0 & 0 & -R_2 & D_{22} & R_0 - D_{12} \\
0 & 0 & D_{11}D_{22} - D_{12}^2 & -R_2 & R_1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix}
$$

References.

[1] Kawai, T. : ϑ函数の超局所解析についての一、二の注意. 数理研講究録, No. 410, pp. 76-87, 1980.

[2] ——— : Systems of linear differential equations of infinite order. To appear in Proc. AMS Summer Institute "Theta functions".

[3] Kawai, T. and D. C. Struppa : On the existence of holomorphic solutions of systems of linear differential equations of infinite order and with constant coefficients.