数理解析研究所講究録
675巻 1988年 41-46

Conformal Field Theory over $\mathbb{Z}$

京大・理・数 上野健爾
(UENO Kenji)

2次元共形的場の理論(conformal field theory)は2次元の場の量子論の一つであるが、理論が無限小共形変換

$$(0.1) \qquad z \longmapsto z + \varepsilon f(z)$$

で不変であることを要請する。ここでzは局所複素座標であり、$f(z)$は$z=0$で有理型であると仮定する。本来の共形変換であれば$f(z)$は$z=0$で正則とすべきであるが、$z=0$で有理型としたことで、数学的には大変興味深い理論となる。すなわち、$f(z)$が$z=0$で極を持つ場合、(0.1)は複素構造の無限小変形を与え、従ってconformal field theory (CFT)はリーマン面のモジュライと関係を持って来る。

CFTを閉リーマン面上で考えると、CFTが定める物理量は、閉リーマン面と関係した種々のモジュライ空間の上のベクトル束の切断としてとらえることができる。しかも、閉リーマン面を完備代数曲線として代数幾何学的にとらえるとモジュライ空間やベクトル束は整数環上定義されている場合

があり，数論的代数幾何との関係を示唆するものがある。

筆者は桂利行，清水勇二の両氏と共同で，CFTで最もよく研究されている free fermion の場合に数論的代数幾何学の立場から理論そのものを $\mathbb{Z}$ 上構成することを試みた。研究集会でそのことに関して報告したが，詳細はプレプリント [KSU] にゆずることにして，ここでは理論を $\mathbb{Z}$ 上で展開するための key となるボゾン化について述べることにする。なお記号は [KNTY] をそのまま流用する。ただそこで使われている Boson Fock 空間は以下に導入する新しい Boson Fock 空間 $\mathcal{H}(A)$ と区別するため $\mathcal{H}_T$ と記すことにする。

§1 New Bosonization

以下可換環 A は特に記さないかぎり単位元を持つものとする。charge p の Fermion Fock space $\mathcal{F}_p(A)$ とその dual Fermion Fock space $\overline{\mathcal{F}_p}(A)$ を

$$\mathcal{F}_p(A) = \prod_{\substack{M \\ \text{charge } p \text{ の} \\ \text{Maya 図形}}} A|M\rangle, \qquad \overline{\mathcal{F}_p}(A) = \bigoplus_{\substack{M \\ \text{charge } p \text{ の} \\ \text{Maya 図形}}} \langle M|A$$

と定義し，fermion Fock space $\mathcal{F}(A)$ とその dual space $\overline{\mathcal{F}}(A)$ とを

$$\mathcal{F}(A) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_p(A), \quad \overline{\mathcal{F}}(A) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{F}_p}(A)$$

で定める。また dual pairing を

$$\langle M | N \rangle = \begin{cases} 1 & M = N \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める。さて $A = \mathbb{C}$ のとき Bosonization は current algebra $\{J_n\}$ を使って，$|\Psi\rangle \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ に対して

$$B(|\Psi\rangle) := \sum_p \langle p|\, e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n J_n} |\Psi\rangle u^p \in \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots]] \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$$

と定める。Boson Fock space $\mathcal{H}_T(A)$ を

$$\mathcal{H}_T(A) = A[[t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots]] \otimes A[u, u^{-1}]$$

と定義すると，

$$B : \mathcal{F}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_T(\mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}$ - 線型同型写像である。B を Bosonization と呼ぶ。

所で current algebra $\{J_n\}$ は $\mathbb{Z}$ 上の Fermion Fock space $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ 上の operators として意味を持つ，任意の可換環上 A に $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ と考えて自然に拡張できている。この事実と Bosonization B の定義より，B は実は $\mathbb{Q}$ 上定義されており，

$$B : \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_T(\mathbb{Q})$$

であることが分かる。ところで

$\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ は $\mathcal{F}(\mathbb{Q})$ の lattice と考えられるが，B の定義に指数函数を使っていることから，$\mathrm{B}(\mathcal{F}(\mathbb{Z})) \neq \mathcal{H}_T(\mathbb{Z})$ である。$\mathrm{B}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}))$ を特徴づけるために Schur 多項式 $p_\ell(t) = p_\ell(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)$ を使うことができる。Schur 多項式 $p_\ell(t)$ は

$$e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell(t) z^\ell$$

で定義する。

<u>Proposition.</u> $\mathrm{B}(\mathcal{F}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[[p_1, p_2, \cdots, p_\ell, \cdots]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$

この事実をさらに見やすい形にするために $\{t_i\}$ にかわる新しい変数 $\{x_i\}$ を次の様に導入する。

$$(*) \qquad n t_n = \sum_{d|n} d x_d^{n/d}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

この変数を使って新しい Boson Fock space $\mathcal{H}(A)$ を

$$\mathcal{H}(A) = A[[x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots]] \otimes_A A[u, u^{-1}]$$

で定める。このとき $(*)$ より k が標数 0 の体であれば

$$W^* : \mathcal{H}_T(k) \longrightarrow \mathcal{H}(k)$$

なる k 上の環の同型が定まる。従って，特に $\mathcal{H}_T(\mathbb{Q}) \cong \mathcal{H}(\mathbb{Q})$ である。

<u>Proposition</u> $W^*B\,\mathcal{F}(\mathbb{Z}) = \mathcal{H}(\mathbb{Z})$.

すなわち

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathbb{Q}) \arrow[r, "B", "\sim"'] & \mathcal{H}_T(\mathbb{Q}) \arrow[r, "W^*", "\sim"'] & \mathcal{H}(\mathbb{Q}) \\
\mathcal{F}(\mathbb{Z}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\sim"] & B(\mathcal{F}(\mathbb{Z})) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

この同型を使って、B, W^* は標数0の体上でしかそれぞれ定義されていないにもかかわらず、W^*B は $\mathbb{Z}$ 上で、従って任意の可換環A上で定義できる。

$$W^*B : \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(A)$$

を new Bosonization と呼ぶ。W^*B によって $\mathcal{F}(A)$ 上の operator を $\mathcal{H}(A)$ 上の operator として表示することができる。たとえば vertex operator は

$$\prod_{d=1}^{\infty} (1 - x_d z^d)^{-k}\, u^k \cdot M^*_{z^k} \cdot T^*_{\iota(k[\frac{1}{z}])}$$

となる。ここで $[\frac{1}{z}] = (\frac{1}{z}, 0, 0, \cdots)$ は Witt vector, Witt vector の加法で $(-k)$ 回足すことによる平行移動 $T_{\iota k[\frac{1}{z}]}$ による引き戻しが $T^*_{\iota k[\frac{1}{z}]}$ であり、$M^*_{z^k}\cdot f(u) = f(z^k u)$ である。

§2　Universal Witt scheme との関係

前節の(*)によって Spec $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$ 上に ring scheme の構造が入る。これを Witt scheme と呼び，以下 W と記す。このとき $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]]$ は W の座標環の原点での completion と見ることができ，Spf $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \cdots]]$ は無限次元可換形式群 $\hat{W}$ と見ることができる。このようにして，New Bosonization を通して，自然に可換形式群が登場し，Cartier の second theorem によって，$(C, Q, \hat{u})$ (curve C とその上の点Q，Qでの formal parameter) と $\hat{W}$ の関係を奇麗な形で書くことができる。これらのことは目下研究が進展中であり，いずれまとまった形で発表する予定である。

References

[KNTY]　Kawamoto, N., Y. Namikawa, A. Tsuchiya and Y. Yamada: Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Comm. Math. Phys. 116(1988), 247-308.

[KSU]　New bosonization and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, pre print, 1988