

双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形について

統計数理研究所 土谷 隆 (Takashi TSUCHIYA)

1. はじめに

Karmarkar [1] が線形計画問題に対して射影変換を用いた多項式オーダの内点法を提案して以来、線形計画問題の内点法に関して精力的な研究が進められている。標準形の線形計画問題の双対問題 $\langle D \rangle$ (n 変数 m 制約式; $m > n$):

$$\min c^t x, \quad \text{subject to } A^t x \leq b, \quad A \in R^{n \times m}, x, c \in R^n, b \in R^m \quad (1)$$

については、山下 [2] と Freund [3] によって、射影の概念を用いた多項式性を持つ解法が提案されている。山下法をその本質は損なわないようにして少し修正したものと Freund 法とは同一の方向を与える。用いる射影変換も導出の仕方も異なる両者が同じ方向を与える事情は [4] において解析されている。一方、Freundの方法は双対標準形線形計画問題に対する Karmarkar 法のアナロジーを与えるものであることが Freund 自身によって指摘されている。ここでは、双対標準形線形計画問題 $\langle D \rangle$ を、Karmarkar 法自身がそのまま適用できるいわゆる“Karmarkarの正準形”に直接変換できることを示し、“双対標準形に適用した Karmarkar 法”と山下法との関係について考察する。また、ここで述べる変換を使うと、Karmarkar の原論文 [1] での仮定“目的関数の最小値 = 0”をはずして Karmarkar 法を適用するために Todd-Burrell [5] によって提案された (Karmarkar 正準形に対する) 目的関数の下界値の更新法を、双対標準形の問題に対しても適用することができる。双対標準形に適用した場合の Todd-Burrell の目的関数の下界値の更新法と、山下法で使われている (目的関数値未知の場合の) 目的関数値の下界値の更新法との関係についても述べる。

2. 同次化された問題と Karmarkar ポテンシャル関数

ここでは $\langle D \rangle$ に関して次のことを仮定する。

- (i) $\langle D \rangle$ の制約領域は内点を持つ。

- (ii) A の rank は n である.
- (iii) 解集合は有界である.
- (iv) 目的関数の最小値は c_0^* で既知とする.

ここで,

$$A_H = \begin{bmatrix} -A \\ b^t \end{bmatrix}, \quad x_H = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_H(c_0) = \begin{bmatrix} c \\ -c_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

と記すことにすると, $\langle D \rangle$ は次のようにも書ける:

$$\min c_H^t(c_0^*) x_H, \quad \text{subject to } A_H^t x_H \geq 0, \quad x_H \in R^{n+1}. \quad (3)$$

問題 $\langle D \rangle$ を同次化した問題 $\langle DH \rangle$ を次のように定義する:

$$\min c_H^t(c_0^*) z_H, \quad \text{subject to } A_H^t z_H \geq 0, \quad z_H \in R^{n+1}. \quad (4)$$

$\langle DH \rangle$ の制約に加えてもう一つ等式線形制約条件 $p_H^t z_H = q$ ($p_H \in R^{n+1}$, $q (\neq 0) \in R$)

を適当に付加して得られる形の線形計画問題 $\langle Dp \rangle$ を考える. (特に, $p_H = (0, \dots, 0, 1)^t$, $q = 1$ とすると, $\langle D \rangle$ そのものが得られる.) $\langle Dp \rangle$ は, も

しそれが有界な解集合を持つならば, $\langle DH \rangle$ の制約領域で定義されている Karmarkar のポテンシャル関数の乗法版

$$F(z_H, c_0) \equiv \frac{(c_H^t(c_0) z_H)^m}{\prod A_H^t z_H} \quad (c_0 \leq c_0^*) \quad (5)$$

(ベクトル v について記号 $\prod v$ で v の各要素の積を表す; この式の \log をとったものが Karmarkar のポテンシャル関数である.) の値が十分に 0 に近いような $\langle DH \rangle$ の制約領域内の点を求めることにより解くことができる. すなわち, 各 $z_H^{(i)}$ が $\langle DH \rangle$ の制約領域内にあり, $c_0^{(i)} \leq c_0^*$, $F(z_H^{(i)}, c_0^{(i)}) \rightarrow 0$ であるような数列 $(z_H^{(i)}, c_0^{(i)})$ が存在すれば, $i \rightarrow \infty$ で, $u^{(i)} = q z_H^{(i)} / p^t z_H^{(i)} (\in R^{n+1})$ と $\langle Dp \rangle$ の解集合との距離が 0 に収束し, この時 $c_0^{(i)} \rightarrow c_0^*$ である.

射影変換を用いて $\langle Dp \rangle$ を解く方法は, $\langle Dp \rangle$ の制約領域内を進む代わりに $\langle DH \rangle$ の制約領域の中を進むことによって, $F(z_H, c_0)$ を最小化していると解釈できる.

F が同次関数なので, 一旦 $\langle DH \rangle$ の制約領域の内点で F を十分に小さくする点 $z_H^{(i)}$ が見つければ, $\langle Dp \rangle$ の制約領域の内点で F を十分に小さくする点は上述した通りに $u^{(i)}$ を

求めることで簡単に得られ、このとき $u^{(i)}$ は、 $\langle D p \rangle$ の十分に良い近似解になっている。
大雑把にいて、 $F(z_H, c_0)$ を一回の反復で一定比率（問題に依らない定数）だけ小さくすることができれば、 $\langle D p \rangle$ を解く多項式オーダーの算法が得られることになる。

3. 双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形

$\langle D \rangle$ のある可能解 x_0 が与えられているとする。このとき $x_{OH} = (x_0^t, 1)^t$ は $\langle DH \rangle$ の可能解である。一般の線形等式・不等式系について、制約領域内で“各不等式に対するスラックの積の値を最大化する点”は“center”と呼ばれ、特別によい性質を持つ点であることが知られている（“center”が存在するための必要十分条件は、制約領域が有界であることである）。そこで、 x_{OH} がcenterになるように付加等式制約条件 $p_H^t z_H = q$ を選んで $\langle D \rangle$ と等価な問題 $\langle D p \rangle$ を作ることを考える。すると、問題 $\langle DH \rangle$ の制約に対する log barrier function $-\log \prod A_H^t z_H$ の x_{OH} における gradient $\eta_H(x_{OH}) = A_H [A_H^t x_{OH}]^{-1} 1$ （ここではベクトル v に対して記法 $[v]$ によって、 v の各要素をその成分とする対角行列を表す；また、 1 によってその全要素が 1 であるようなベクトルを表す。）を法線方向に持ち、 x_{OH} を通るような線形等式制約式

$$\eta_H(x_{OH})^t z_H = m \quad (6)$$

を $\langle DH \rangle$ に新たに付け加えることによって、 $\langle D \rangle$ と等価で、しかも、現在自分がいる点 x_{OH} が“center”となるような線形計画問題 $\langle D \eta \rangle$ が得られることが分かる。（ $\langle D \rangle$ と $\langle D \eta \rangle$ の等価性は、 $\langle D \eta \rangle$ の制約領域が“center”を持ち、したがって有界であることから導ける。）この問題は、 $\langle D \rangle$ に対して Freund の考えた射影変換を行って得られる問題と密接な関係がある。

変数 z_H の代わりにスケーリングされたスラック変数 $s = [A_H^t x_{OH}]^{-1} A_H^t z_H \in R^m$ （すなわち s は z_H の線形関数となる）を導入して $\langle D \eta \rangle$ を表現することを考える。 $\langle D \eta \rangle$ が

$$\min c_H^t (c_0^*) z_H, \quad \text{subject to} \quad [A_H^t x_{OH}]^{-1} A_H^t z_H - s = 0, \quad 1^t s = m, \quad s \geq 0 \quad (7)$$

と等価であることは明らかである。 $[A_H^t x_{OH}]^{-1} A_H^t z_H - s = 0$ は overdetermined だが consistent な方程式であるから、これを z_H について解いて、

$$z_H = B_H^{-1} A_H [A_H^t x_{OH}]^{-1} s, \quad B_H = A_H [A_H^t x_{OH}]^{-2} A_H^t \quad (8)$$

を得る。(8)を用いて $\langle D\eta \rangle$ から z_H を消去して、スラック変数 s のみで $\langle D\eta \rangle$ を表現すると次のようになる：

$\langle DK \rangle$

$$\min c_K^t(c_0^*)s, \quad \text{subject to } (I-P)s=0, \quad 1^t s = m, \quad s \geq 0. \quad (9)$$

ここで、

$$P = [A_H^t x_{OH}]^{-1} A_H B_H^{-1} A_H [A_H^t x_{OH}]^{-1}, \quad c_K(c_0^*) = [A_H^t x_{OH}]^{-1} A_H B_H^{-1} c_H(c_0^*). \quad (10)$$

現在いる点 x_{OH} が s の空間で $1 \in R^m$ に移ることを考えると、このように書き換えられた問題は Karmarkar の正準形そのものである。 $\langle DK \rangle$ に Karmarkar 法を適用することによって得られる方向は次のようになる：

$$\Delta s = -P(I - \frac{11^t}{m}) c_K(c_0^*), \quad \Delta s \in R^m. \quad (11)$$

これを関係 $z_H = B_H^{-1} A_H [A_H^t x_{OH}]^{-1} s$ を利用して z_H の空間での表現に直して

$$d_K(x_{OH}, c_0^*) \equiv \Delta z_H = B_H^{-1} (-c_H(c_0^*) + m^{-1} c_H^t(c_0^*) x_{OH} \eta_H) \quad (12)$$

を得る。この方向は、計量 B_H に関する F の無制約最急降下方向にもなっている。

一方、山下法（をその本質は失わないようにして、少しだけ修正したもの；これは [4] で（修正）山下法として取り上げられているものと同じである。オリジナルな山下法 [2] とどこが異なるかについては [4] を参照のこと。）では、 x_{OH} において、付加等式制約条件として $c_H^t(c_0^*) z_H = c_H^t(c_0^*) x_{OH}$ を考え、この制約を満たした上で (5) の分母を最大化するための Newton 方向を探索方向としている。より具体的には x_{OH} での（修正）山下法の $\langle DH \rangle$ の制約領域内の探索方向 $d_Y(x_{OH}, c_0^*)$ は次のようになる：

$$d_Y(x_{OH}, c_0^*) \equiv B_H^{-1} \left(\eta_H - c_H(c_0^*) \frac{c_H^t(c_0^*) x_{OH}}{c_H^t(c_0^*) B_H^{-1} c_H(c_0^*)} \right). \quad (13)$$

(12)と(13)より分かるように, $d_K(x_{0H}, c_0^*)$ も $d_Y(x_{0H}, c_0^*)$ も共に, $B_H^{-1}c_H(c_0^*)$, $B_H^{-1}\eta_H$ の一次結合として表現される. 実は, [4]で示されているように, $B_H^{-1}\eta_H$ の成分は $\langle D \rangle$ の空間での探索方向として表現しなおすと消えてしまう ($\langle D \rangle$ での探索方向に影響を与えない) ようになっていて, 結局, d_K と d_Y は $\langle D \rangle$ の制約領域内の探索方向としてはまったく同じものになってしまう構造になっている.

このように, 今いる点を “center” に持ってくるという考え方に基づいて, Karmarkar法の双対標準形版を導くことができ, そしてそれは(修正)山下法と本質的には同じものになることが分かる.

4. 下界値の更新について

ところで, Karmarkarの論文[1]では, 目的関数の最小値が0であると仮定している. この仮定を取り除くため, (iv) (最小値既知の仮定) の代わりに次の仮定

(iv)' 目的関数の最小値の下界 c_0 ($\leq c_0^*$) が分かっている (最小値は未知でもよい). を置いて, 以下のような方針で目的関数の最小値の下界値の更新を行うことが考えられる.

<下界値の更新の考え方>

今, z_H にいるとして, ある探索方向 $d(z_H, c_0)$ が与えられた時に,

(0) $d(z_H, c_0)$ 方向に進むと $F(z_H, c_0)$ を一定比率だけ (すなわち多項式性を保証するだけ) 小さくできるかどうかのテストを行い,

(1-1) $d(z_H, c_0)$ 方向に進むことで, $F(z_H, c_0)$ を一定比率だけ小さくできるならばその方向に進み,

(1-2) そうでない時は今いる点 z_H の情報から $c_0 < c_0^+ \leq c_0^*$ となるような c_0^+ を作り出す.

この時, $d(z_H, c_0^+)$ 方向に進むと $F(z_H, c_0^+)$ を一定比率だけ減らせるように c_0^+ を “うまく” 構成する. そして $c_0 = c_0^+$ として (0) に戻る. ■

山下は, $\langle D \rangle$ の目的関数の下界値を z_H において次のようにして更新することを提案している. 以下,

$$w(\alpha) \equiv [A_{HH}^t]^{-2} A_{HH}^t B_H(z_H)^{-1} c_H(\alpha) \quad (14)$$

と置く. (以降, $B_H(z_H) = A_H [A_{HH}^t]^{-2} A_H^t$, $\eta_H(z_H) = A_H [A_{HH}^t]^{-1} \mathbf{1}$ とする.)

<山下法の下界値の更新>

(0) 今いる点 z_H において, $w(c_0)$ を計算する.

(1-1) もし, $w(c_0) \neq 0$ ならば,

$$d_Y(z_H, c_0) \equiv B_H^{-1} \left(\eta_H(z_H) - c_H(c_0) \frac{c_H^t(c_0) z_H}{c_H(c_0)^t B_H^{-1} c_H(c_0)} \right) \quad (15)$$

方向に進むことで, $F(z_H, c_0)$ を一定比率小さくできる.

(1-2) もし, $w(c_0) > 0$ ならば, $c_0^+ = c_0$ より始めて, $w(c_0^+) \neq 0$ となるまで c_0^+ を増加させる. そして, $c_0 = c_0^+$ として(0)に戻る. ■

山下は, 上記の手順を提案し, <D>の目的関数値の最小値の下界さえあらかじめ分かっていたら多項式性を持つ<D>の解法が構成できることを示した.

一方, Todd-Burrellは[5]において, Karmarkarの正準形問題に対して前ページで述べたのと同様の方針に基づいて目的関数の下界値を更新する方法を提案している. 3節で述べた問題の変形を利用すれば, Todd-Burrellによる下界値の更新法を双対標準形線形計画問題に適用できる. 2つの下界値の更新法を比較すると, Todd-Burrellの下界値更新法を双対標準形に適用したものは, その導出の手順はまったく異なるものの, 山下のそれと本質的な部分, すなわち, (0)下界値 c_0 の更新を行うかどうかの判定基準, (1-1)下界値の更新を行う必要がない場合の(<D>の制約領域での)探索方向, そして, (1-2)下界値の更新を行うときに c_0^+ をどのようにして決定するか, について一致することが分かる. この点についてのより詳細な議論に関しては[6]を参照されたい.

参考文献

- [1] N. Karmarkar: A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, Vol. 4, No. 4 (1984), pp. 373-395.
- [2] H. Yamashita: A Polynomially and Quadratically Convergent Method for Linear Programming, Mathematical Systems Institute Inc. Technical Report (1986).
- [3] Robert M. Freund: An Analog of Karmarkar's Algorithm for Inequality Constrained Linear Programs, with a 'New' Class of Projective Transformations for Centering a Polytope, *Operations Research Letters*, Vol. 7, No. 1 (1988), pp. 9-13.
- [4] 土谷隆: 山下法とFreund法について, 統計数理研究所共同研究リポート, Vol. 10 (1988), pp. 105-116.

- [5] M. J. Todd and B. P. Burrell: An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables, *Algorithmica*, Vol. 1 (1986), pp. 409-424.
- [6] 土谷隆: 山下による下界値の更新とTodd-Burrellによる下界値の更新の比較, 原稿(準備中) (1988).