

3次元境界要素法における特異及び擬似特異積分の 数値積分法について

日本電気(株) C&C情報研究所

速水 謙 (Ken Hayami)

1. まえがき

3次元境界要素法^[1]では

$$I = \int_{\Omega} f / r^{\alpha} d\Omega \quad (1)$$

という形の積分を計算する必要があり、その精度が手法全体の計算精度を支配する。ここで Ω は解析する3次元領域 V の境界面を離散化したときの曲面要素である。また、 r は空間に固定されたソース点 x_s と Ω 上の点 x の間の距離、 f は x の関数、 α は正の整数である。(多くの問題では $\alpha = 1 \sim 4$ と考えてよい。)

一般の曲面要素 Ω では(1)式の積分は解析的に積分できないので数値積分を行う必要がある。ソース点 x_s と曲面要素 Ω との距離 d が要素の大きさ(規格化して1とおく)に比べて十分大きい場合は Gauss の公式^[2]により比較的少ない積分点数で積分値が正確に求まる。

$\nu=3$ が α_s が ν 上にある場合 ($d=0$) は $\alpha = \alpha_s$ に於て $r=0$ となるため (1) 式の積分は特異になる。また、 $0 < d \ll 1$ の場合も積分核 f/r^α は α_s の付近で激しく変動するため擬似特異な性質を持つ。これらに対して通常の Gauss 公式を適用すると積分点数を 1000 点と、これも相対誤差は 10^{-2} 程度に留まる。

この様な境界要素法で生じる特異及び擬似特異積分を正確に求める様々な試みが行なわれているが、ここでは筆者が最近提案した Projection and Angular & Radial Transformation method (PART 法)^[3] について述べる。

2. 手法の説明

本手法は次の 6 段階から成る。

- ① ソース点 α_s から一番近い要素 N 上の点 $\bar{\alpha}_s$ を求める。
(ソース点の射影)
- ② (曲面要素) N を N の $\bar{\alpha}_s$ に於る接平面上の多角形 \bar{S} に近似射影する。
- ③ \bar{S} に於て極座標 (ρ, θ) を導入する。
- ④ 動径方向の変数変換 $R(\rho)$ により (1) 式の f/r^α の特異性又は擬似特異性を消去または緩和する。
- ⑤ 偏角方向の変数変換 $\tau(\theta)$ により、 $\bar{\alpha}_s$ が \bar{S} の辺に近いき

に生じる擬似特異性を緩和する。

- ⑥変換された変数 R, t に関して Gauss の積分公式を適用して数値積分を行う。

以下に各段階を詳しく説明する。なお、本手法は要素及び内そう関数な一般のものに適用できるが、ここでは説明のため図1の様な曲面四辺形を考え、内そう関数は

$$f(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\eta_1, \eta_2) f^i \quad (2)$$

で与えられるものとする。ここで f はスカラー関数又は空間座標 x である。 φ_i は内そう多項式、 f^i は要素のオノ節点 x^i での f の値とする。また、曲面四辺形要素 N は (η_1, η_2) 空間での正方領域 $-1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1$ に対応する。

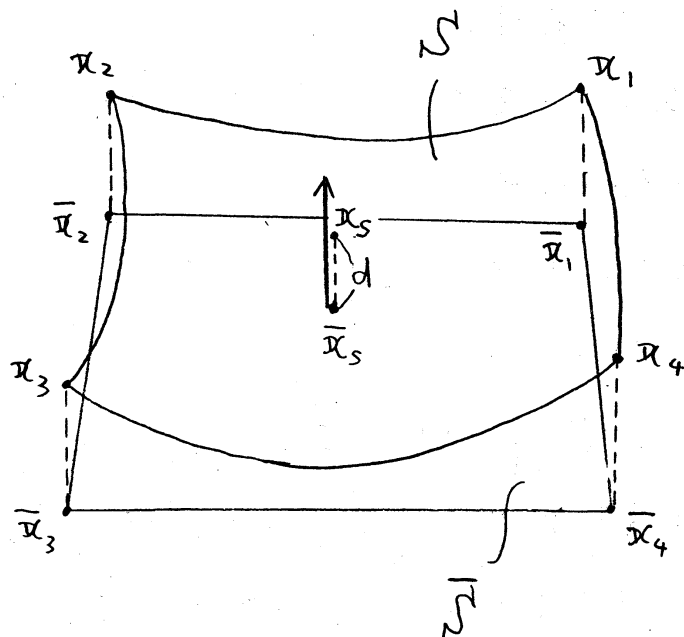


図1 曲面要素 N の近似射影 \bar{N}

従って求める積分(1)は

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f |\mathbf{G}|}{r^\alpha} d\eta_1 d\eta_2 \quad (3)$$

で表わされる。但し $|\mathbf{G}|$ はベクトル

$$\mathbf{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_2} \quad (4)$$

の長さである。

① ソース点の射影

要素 N 上の点 $\mathbf{x}(\eta_1, \eta_2)$ でソース点 \mathbf{x}_s に最も近い点

$\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{x}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ を求めるには、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ として

$$\left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

の(非線形)方程式を解けば良い。これは適当な初期解, 例えば $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$ 、をもとに Newton-Raphson 法により数反復で相対誤差 10^{-6} の精度の解 $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ が求まる。これに要する計算時間は全体の計算時間の1%程度で済む。

② 要素 N の近似射影

次に図1に示すように、要素 N を、 $\bar{\mathbf{x}}_s$ における N の接平面上の四辺形 \bar{N} に射影する。

このために、 N の頂点 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(-1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}(-1, -1)$, $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}(1, -1)$ を、 N の $\bar{\mathbf{x}}_s$ に於る単

単位法線 m_s に平行に接平面 \bar{S} に射影し各々 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ とする。つまり、

$$\bar{x}_j \equiv x_j - \{ (x_j - x_s) \cdot m_s \} m_s, \quad (j=1 \sim 4) \quad (6)$$

但し、

$$m_s \equiv G(\bar{n}_1, \bar{n}_2) / |G(\bar{n}_1, \bar{n}_2)| \quad (7)$$

で、 G は (4) 式と同様に定義する。

上記の $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ を頂点とする四辺形 \bar{S} を、曲面四辺形要素 \bar{S} の (\bar{x}_s に於る接平面 \bar{T} の) 近似射影と定義する。

次に、図2の様に \bar{S} を \bar{x}_s を頂点として共有する4つの三角形 $\bar{\Delta}_j$: $\bar{x}_j \bar{x}_{j+1} \bar{x}_s$, $j=1 \sim 4$, ($\bar{x}_5 \equiv \bar{x}_1$) に分割し、各分割三角形 $\bar{\Delta}_j$ に於る幾何学的諸量を図3の様に定義する。

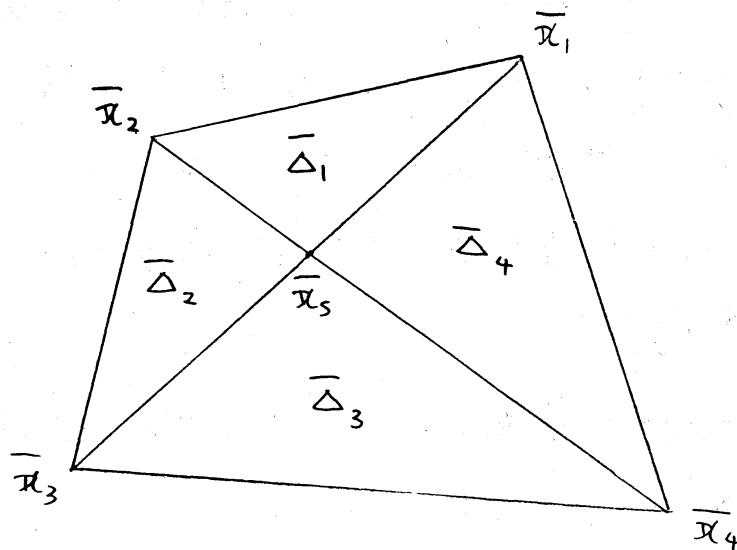


図2 \bar{S} の三角分割

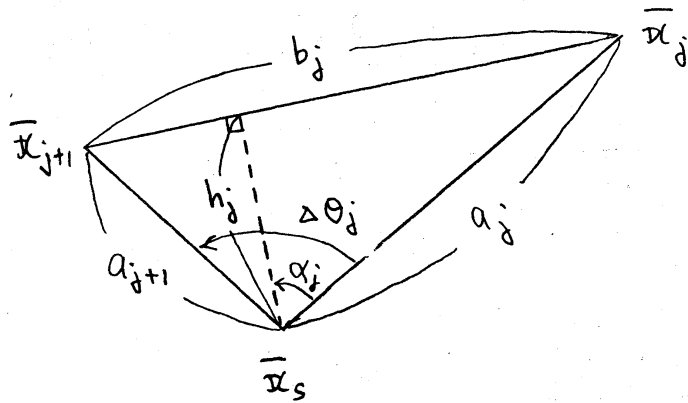


図3 分割三角形 $\bar{\Delta}_j$ の諸量

③ $\bar{\Delta}$ に於る極座標 (ρ, θ)

次に各分割三角形 $\bar{\Delta}_j$, ($j=1\sim 4$) に於て、 \bar{x}_s を原点とし、 $\bar{x}_j - \bar{x}_s$ を $\theta=0$ の方向とする極座標 (ρ, θ) を導入する。更に、 (η_1, η_2) 空間の正方領域 $-1 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1$ を $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ を頂点として共有する3角形 $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ に分割し、 $\bar{\Delta}$ 上の各三角形 $\bar{\Delta}_j$ から対応する (η_1, η_2) 空間の三角形 Δ_j の線形変換 L_j を考える。 L_j の行列要素は図3の諸量 $a_j, a_{j+1}, b_j, \Delta\theta_j$ 及び $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ の値より求められ、 $\bar{\Delta}_j$ から Δ_j の写像は、

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = L_j \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

により与えられる。従って求める積分は(3)式より

$$I = \sum_{j=1}^4 I_j,$$

$$I_j = |\det L_j| \int_0^{\Delta\theta_j} d\theta \int_0^{\rho_j(\theta)} \frac{f|G|}{r^2} \rho d\rho \quad (9)$$

と表わされる。ここで、 $p_j(\theta)$ は図3の h_j, α_j より

$$p_j(\theta) = \frac{h_j}{\cos(\theta - \alpha_j)} \quad (10)$$

によつて与えられる。

④ 軌径方向の変換 $R(p)$

次に (9) 式の $1/r^\alpha$ の特異性は \bar{s} 上の軌径方向の変数 p によるみに依存する事に着目し、(9) 式の軌径方向の積分

$$J(\theta) = \int_0^{p_j(\theta)} \frac{f|G|}{r^\alpha} p dp \quad (11)$$

に於て、

$$p dp = r'^\beta dR \quad (12)$$

を充すような軌径方向の変数変換 $R(p)$ を導入する。ここで β は正の整数である。また r' は r に対する「近似距離」で、図4に示すように

$$r' = \sqrt{p^2 + d^2} \quad (13)$$

で与えられる。

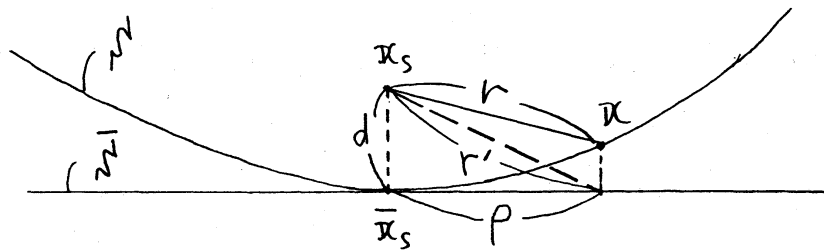


図4 r の近似距離 r'

(12) 式より

$$R(p) = \int \frac{p}{\sqrt{p^2 + d^2}^\beta} dp \quad (14)$$

となる、 $R(p)$ は容易に解析的に求まり $\beta = 1 \sim 4$ に対して $R(p)$, $p(R)$, $r'(R)$ は表1により与えられた。

表1. $R(p)$, $p(R)$, $r'(R)$ の式

| β | $R(p)$ | $p(R)$ | $r'(R)$ |
|---------|-------------------------------|------------------------------|------------------------|
| 1 | $\sqrt{p^2 + d^2}$ | $\sqrt{R^2 - d^2}$ | R |
| 2 | $\log \sqrt{p^2 + d^2}$ | $\sqrt{e^{2R} - d^2}$ | e^R |
| 3 | $-\frac{1}{\sqrt{p^2 + d^2}}$ | $\sqrt{\frac{1}{R^2} - d^2}$ | $-\frac{1}{R}$ |
| 4 | $-\frac{1}{2(p^2 + d^2)}$ | $\sqrt{-\frac{1}{2R} - d^2}$ | $\sqrt{-\frac{1}{2R}}$ |

従、(11)式は動径方向の変数変換 $R(p)$ により

$$J(\theta) = \int_{R(0)}^{R[p_j(\theta)]} f |G| \frac{r'^\beta}{r^\alpha} dR \quad (14)$$

となる。

\mathcal{N} が平面要素 (正確には平行四辺形又は三角形) で、

f が定数関数の場合は $r \equiv r'$ となるため、 $\beta = \alpha$ とする事により (14) 式の軌径方向の (変数 R による) 積分は積分点一点のみで正確に求まる。つまり、軌径方向に関しては変数変換 $R(p)$ により解析的に積分された事になる。

ところが、一般の曲面要素、または平面要素でも f が定数関数でない場合は、 $\beta = \alpha$ の変換よりも、 α によらず $\beta = 2$ に固定した軌径方向の変数変換

$$R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2} \quad (15)$$

を用いる方が、相異なる ($\alpha = 1 \sim 4$) 擬似特異積分 ($0 < d \ll 1$) に対して最も有効で、比較的少ない軌径方向の積分点数で積分が正確に求まる事が数値実験より判明した。

また、 $\alpha = 1$ の場合の特異積分に対しては、 $\beta = 1$, $d = 0$ に対応する $R(p) = p$ が最も有効である。

⑤ 偏角方向の $\tau(\theta)$

(9) 式の偏角方向の積分は、一般には Gauss の積分公式を適用すれば良い。しかし、ソース点の射影 \bar{x}_s が四辺形 \bar{S} の辺に近づくと、偏角 θ に関して必要な積分点数が急増する。これは図 5 に示すように、 \bar{x}_s が辺 $\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j$ に接近するにつれて $|\theta - \alpha_j| \sim \frac{\pi}{2}$ となるため、(10) 式の $p_j(\theta)$ が θ に関して擬似特異な性質を示すためである。

そこで軌径方向の場合と同様の発想で、上記の擬似特異性

を緩和する偏角方向の変数変換 $t(\theta)$ を導入する。

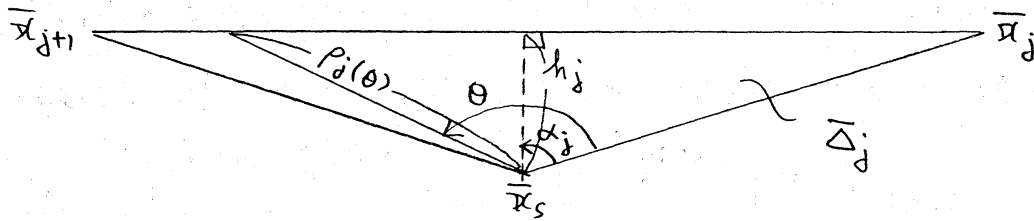


図5 偏角方向の疑似特異性の原因を示す図

具体的には、(9)式の積分で軌径方向の積分 $J(\theta)$ ((11)式) の θ に関する変重みにおいて $\rho_j(\theta)$ が支配的であると考えると、

$$J(\theta) \sim \rho_j(\theta) \quad (16)$$

とおく。次に

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho_j(\theta)} = \frac{\cos(\theta - \alpha_j)}{h_j} \quad (17)$$

を充す偏角方向の変数 $t(\theta)$ を各領域 Δ_j , ($j=1\sim 4$) 毎に導入する。 $t(\theta)$ は解析的に求まり、各 Δ_j 毎に

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \int \rho_j(\theta) d\theta \\ &= \frac{h_j}{2} \log \frac{1 + \sin(\theta - \alpha_j)}{1 - \sin(\theta - \alpha_j)} \end{aligned} \quad (18)$$

によ、 t が与えられる。

(18)式の $t(\theta)$ によ、 t 偏角方向の変数変換を行なう事により $\rho_j(\theta)$ に帰因する疑似特異性を緩和する事ができる。

⑥ 変換された変数 R, t に関する数値積分

④の動径方向の変数変換 $R(\rho)$ 及び⑤の偏角方向の変数変換 $t(\theta)$ により(近似)特異性が緩和され、(9)式の積分は、

$$I_j = |\det L_j| \int_{t(0)}^{t(\infty_j)} \frac{dt}{\rho_j\{\theta(t)\}} \int_{R(0)}^{R[\rho_j\{\theta(t)\}]} f|\mathbb{H}| \cdot \frac{r^\beta}{r^\alpha} dR \quad (19)$$

となる。従って(19)式を変数 R 及び t に関して Gauss の積分公式^[2]を用いて数値積分する事により I_j , 従って求める(1)式の積分が少ない積分点数で高精度で求める事が可能になる。

3. 数値実験結果

次に本手法の有効性を数値実験により示す。

(1) 特異積分 ($d=0, \alpha=1$) での偏角方向の変数変換の効果

積分を行なう曲面要素として

$$\begin{cases} x = \sin \psi \cos \phi \\ y = \sin \psi \sin \phi \\ z = \cos \psi \end{cases},$$

$$60^\circ \leq \psi \leq 120^\circ, \quad -30^\circ \leq \phi \leq 30^\circ \quad (20)$$

で表わされる半径1の球面上の曲面四辺形を、

$$\phi(\eta_1 = -1) = -30^\circ, \quad \phi(\eta_1 = 0) = 0^\circ, \quad \phi(\eta_1 = 1) = 30^\circ, \text{ また}$$

$$\psi(\eta_2 = -1) = 120^\circ, \quad \psi(\eta_2 = 0) = 90^\circ, \quad \psi(\eta_2 = 1) = 60^\circ$$

として Lagrange 要素^[1];

$$x = \sum_{j=-1}^1 \varphi_j(\eta_1) \sum_{i=-1}^1 \varphi_i(\eta_2) x(i, j),$$

$$\begin{cases} \varphi_{-1}(\eta) = \eta(\eta+1)/2 \\ \varphi_0(\eta) = 1-\eta^2 \\ \varphi_1(\eta) = \eta(\eta+1)/2 \end{cases} \quad (21)$$

により補間した曲面四辺形 \mathcal{N} を例にとる。

\mathcal{N} 上での特異積分

$$I = \int_{\mathcal{N}} \frac{\varphi_{ij}}{r} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_{ij}}{r} |G| d\eta_1 d\eta_2 \quad (22)$$

但し、

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi_i(\eta_1) \cdot \varphi_j(\eta_2) \quad (23)$$

又 $r \equiv |x - x_s|$ で、ソース点 x_s は \mathcal{N} 上の点 $x(\bar{\eta}, \bar{\eta})$ を考える。

(22) 式の特異積分を相対誤差 10^{-6} 以下の精度で求めるのに必要な積分点数を本手法で、偏角方向の積分を Gauss の公式を (a) 偏角 θ に関して適用した場合と、

(b) (18) 式の偏角方向の変数変換 $t(\theta)$ に関して適用した場合とを表 2 に比較する。但し、動径方向の変数は $R(\rho) = \rho$ とする。

又、ソース点 $x_s = x(\bar{\eta}, \bar{\eta})$ の位置は要素の中心 ($\bar{\eta}=0$) から角 ($\bar{\eta}=1$) に向って対角線方向に変化させた。

積分点数は φ_{ij} で $-1 \leq i \leq 1$, $-1 \leq j \leq 1$ の各ケースで必要としたものの最大値を示した。又、相対誤差が記してあるのは、偏角方向で 32 点の Gauss 公式の積分点を用いても相対誤差が 10^{-6} の範囲内に納まらなかった場合である。

表 2. 特異積分 $\int_{\mathcal{N}} \frac{\varphi_{ij}}{r} d\mathcal{N}$ に要する積分点数

| η | (a) 偏角 θ のままで積分 | | | (b) $t(\theta)$ に関して積分 | |
|--------|------------------------|------|--------------------|-------------------------|------|
| | $\theta \times \rho$ | 積分点数 | 相対誤差 | $t(\theta) \times \rho$ | 積分点数 |
| 0 | 8 × 5 | 160 | | 6 × 5 | 120 |
| 0.25 | 9 × 5 | 180 | | 7 × 5 | 140 |
| 0.5 | 16 × 6 | 384 | | 10 × 7 | 280 |
| 0.75 | 20 × 6 | 480 | | 11 × 6 | 264 |
| 0.9 | 32 × 7 | 896 | 4×10^{-6} | 14 × 7 | 392 |
| 0.95 | 32 × 7 | 896 | 2×10^{-4} | 14 × 7 | 392 |
| 0.99 | 32 × 7 | 896 | 2×10^{-2} | 14 × 7 | 392 |

表 2 より、ソース点 \mathcal{N}_s が要素の角(頂)に近づくにつれて偏角方向に必要な積分点数が増加するが、偏角方向の変数変換 $t(\theta)$ を用いる事によりそれが大幅に緩和できる事がわかる。

また、変数 η_1, η_2 に対して従来の Gauss 公式を適用したり、後述の Telles の方法 [4] を適用したのでは上記の様な特異積分は正確に求まらない事も付記する。

(2) 擬似特異積分 ($0 < d \ll 1$)

実際に計算してみると前記の特異積分よりも、擬似特異積分の方がはるかに手ごわい事がわかる。

(i) Telles の方法

ここで、比較のために擬似特異積分を求める手法として従来高く評価されている Telles の方法^[4] を簡単に紹介する。

一次元の積分

$$I = \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta \quad (24)$$

で $F(\eta)$ が (1) 式の様な種類の擬似特異性を有するとする。

ここで (5) 式と同様にしこ求めたソース点の射影に対応する η 座標の値を $\bar{\eta}$ とする。またソース点と射影の距離を d とする。ここで $\eta(-1) = -1$, $\eta(1) = 1$ となる様な η の 3 次関数

$$\eta(\bar{\eta}) = a\bar{\eta}^3 + b\bar{\eta}^2 + c\bar{\eta} + e \quad (25)$$

を考える。ここで $\eta(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$ とし、 $J(\bar{\eta}) = \frac{d\eta}{d\bar{\eta}}$ が $\bar{\eta} = \bar{\eta}$ で最小値 $F(d)$ をとる様に a, b, c, e を定める。

但し、 $F(d)$ は d によって (積分点数が最小になるように) 「最適化」された関数で

$$F(d) = \begin{cases} 2.62 d, & (0 \leq d < 0.05) \\ 0.85 + 0.24 \log d, & (0.05 \leq d < 1.3) \\ 0.893 + 0.0832 \log d, & (1.3 \leq d \leq 3.618) \end{cases}$$

$$\leq 1, \quad (3.618 \leq d) \quad (26)$$

但し、 $0 \leq d \leq 0.05$ については PART 法と比べると
 $F(0) = 0$ と $F(0.05)$ の間を筆者が線形補間したもので
 ある。($d \leq 0.05$ についてはこれ以上最適化しても
 積分点数は変わらない。) (25) の変換により (24) の積分は

$$I = \int_{-1}^1 F(\eta(\theta)) \cdot J(\theta) d\theta \quad (27)$$

となり、 $F(\eta)$ の $\eta = \bar{\eta}$ における疑似特異性が $J(\theta)$ に
 よって緩和されるしくみになっている。

2次元の積分(曲面要素上の積分)の対応は

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta_1(r_1), \eta_2(r_2)) J(r_1) J(r_2) dr_1 dr_2 \quad (28)$$

として η_1, η_2 の各方向に各々 (25) 式の様な変換 $\eta_1(r_1),$
 $\eta_2(r_2)$ を適用する。但し各々に対して (26) 式に代入する距
 離 d_1, d_2 は

$$\begin{aligned} d_1 &= 2d / |x(1, \bar{\eta}_2) - x(-1, \bar{\eta}_2)|, \\ d_2 &= 2d / |x(\bar{\eta}_1, 1) - x(\bar{\eta}_1, -1)| \end{aligned} \quad (29)$$

によって与える。但し (5) 式と同様にして $\bar{x}_s = x(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$
 とする。

(ii) S が平面要素で、 f が定数関数の場合

数値例として N が正方形: $x \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$
 上で擬似特異積分 $\int_N \frac{d_N}{r}$, 但し $x_s = (0, 0, d)$

とする。PART法は、重力径方向の変換として $\beta = \alpha = 1$ に対応する $R(\rho) = \sqrt{\rho^2 + d^2}$ 及び偏角方向の変換として(18)式の $t(\theta)$ を適用する。相対誤差 10^{-6} 以内にするために要する積分点数を2変数 (η_1, η_2) に関する Gauss 法及び Telles 法と比較したものを表3に示す。

表3. 正方形領域上の擬似特異積分

| 距離 d | Gauss 法 | | Telles 法 | | PART 法 | |
|--------|--------------------------|------|--------------------------|------|----------------------------|------|
| | $\eta_1 \times \eta_2$ | 積分点数 | $\eta_1 \times \eta_2$ | 積分点数 | $t(\theta) \times R(\rho)$ | 積分点数 |
| 4 | 5 × 5 | 25 | 5 × 5 | 25 | 4 × 1 | 16 |
| 1 | 9 × 9 | 81 | 7 × 7 | 49 | 4 × 1 | 16 |
| 0.1 | 32 × 32 (10^{-4}) | 1024 | 20 × 20 | 400 | 5 × 1 | 20 |
| 0.01 | 32 × 32 (10^{-3}) | 1024 | 32 × 32 (10^{-3}) | 1024 | 4 × 1 | 16 |
| 0.001 | 32 × 32 (10^{-3}) | 1024 | 32 × 32 (10^{-5}) | 1024 | 4 × 1 | 16 |
| 0 | — | — | — | — | 1 × 1 | 4 |

但し (10^{-3}) 等は各方向に Gauss 法の積分点を 32 とし、 t を用いたときの相対誤差を 10^{-6} を越えるものについて記した。

表3より Gauss 法, Telles 法は距離 d が 0 に近づくにつれて必要な積分点数が著しく増加するが、本手法 (PART 法) はソース点 α_s の距離によらず重力径方向の積分は 1 点で正確に求まる。又、 $d=0$ で特異な場合は、偏角方向も各分割する角領域毎に 1 点で済んでいる。これはこの場合偏角方向の積分が変換 $t(\theta)$ により解析的に行なわれているためである。

(iii) N が曲面要素の場合, $I = \int_N \frac{d_N^N}{r^d}$

ところが、曲面要素の場合は話はそううまくは行かない。
 例として (20), (21) 式で与えられる単位球面上の曲面四辺形
 (サイズは各辺 ~ 1) を Lagrange 要素で補間したものについて
 $I = \int_N \frac{d_N^N}{r}$ を (ii) で述べた $\beta = \alpha$ の変換 $R(p) = \sqrt{p^2 + d^2}$,
 及び $t(\theta)$ で計算すると表 4 の様になる。但しソース点 x_s
 は N 上の $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = (0.5, 0.5)$ に対応する点が \bar{x}_s となるよ
 うな点で N からの距離が (球の中心に向って) d になる様
 に設定してある。

表 4. $\beta = \alpha = 1$: $R(p) = \sqrt{p^2 + d^2}$ による $\int_N \frac{d_N^N}{r}$ の積分

| 距離 d | 積分点数 | |
|-----------|---------------------------|-----|
| | $t(\theta) \times R_i(p)$ | 合計 |
| 10 | 5 × 20 | 400 |
| 1 | 5 × 14 | 280 |
| 0.1 | 5 × 16 | 320 |
| 0.01 | 6 × 28 | 672 |
| 0.001 | 6 × 32 (10^5) | 768 |
| 0 | 6 × 4 | 96 |

(相対誤差は $d = 0.001$ を除いて 10^{-6} 以下)

しかし、ここであきらめずに、ために $\alpha = 1$ の特異性
 に対して表 1 に示した $\beta = 2, 3, 4$ に対応する軌径方向の変
 数変換を適用してみると、 $\beta = 2$ に対応する変換

$R(\rho) = \log \sqrt{\rho^2 + d^2}$ が $\alpha = 2$ は「かりでなく、 $\alpha = 1, 3, 4$ に対しても最適に働く事が表5よりわかる。

表5. 軌径方向の変換 $\beta = 2$: $R(\rho) = \log \sqrt{\rho^2 + d^2}$,
 $t(\theta)$ による $\int_{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{r^\alpha}$ の積分。

| d | $\alpha = 1$ | | $\alpha = 2$ | | $\alpha = 3$ | | $\alpha = 4$ | |
|-------|----------------------------|-----|---------------|-----|---------------|-----|---------------|-----|
| | $t(\theta) \times R(\rho)$ | 計 | $t \times R$ | 計 | $t \times R$ | 計 | $t \times R$ | 計 |
| 10 | 5×20 | 400 | 5×20 | 400 | 5×20 | 400 | 5×20 | 400 |
| 1 | 5×14 | 280 | 5×14 | 280 | 6×14 | 336 | 6×14 | 336 |
| 0.1 | 5×5 | 100 | 8×12 | 384 | 7×16 | 448 | 7×20 | 560 |
| 0.01 | 6×8 | 192 | 7×9 | 252 | 9×12 | 432 | 9×14 | 504 |
| 0.001 | 6×10 | 240 | 9×11 | 396 | 9×14 | 504 | 9×16 | 576 |

$(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = (0.5, 0.5)$, 相対誤差 10^{-6} 以下

次に上記のPART法 $\{ R(\rho) = \log \sqrt{\rho^2 + d^2}, t(\theta) \}$ を Gauss 法, Telles 法と比較する。上記と同じ曲面要素で積分 $\int_{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{r}$ を各手法で計算したときの相対誤差対積分点数のグラフを図6 ($d = 0.01$), 図7 ($d = 0.003$) に示す。Gauss法では積分点数を1000点としても相対誤差は 10^{-2} 程度にとどまっている。また、Telles法では $d = 0.01$ では積分点数400点でようやく相対誤差 10^{-6} に到達するが、ソース点が要素に非常に近い $d = 0.003$ では1000点をもっても 10^{-5} 程度の精度しか得られはり。これに対して本手法 (PART法) では距離 d によらず、200点程度

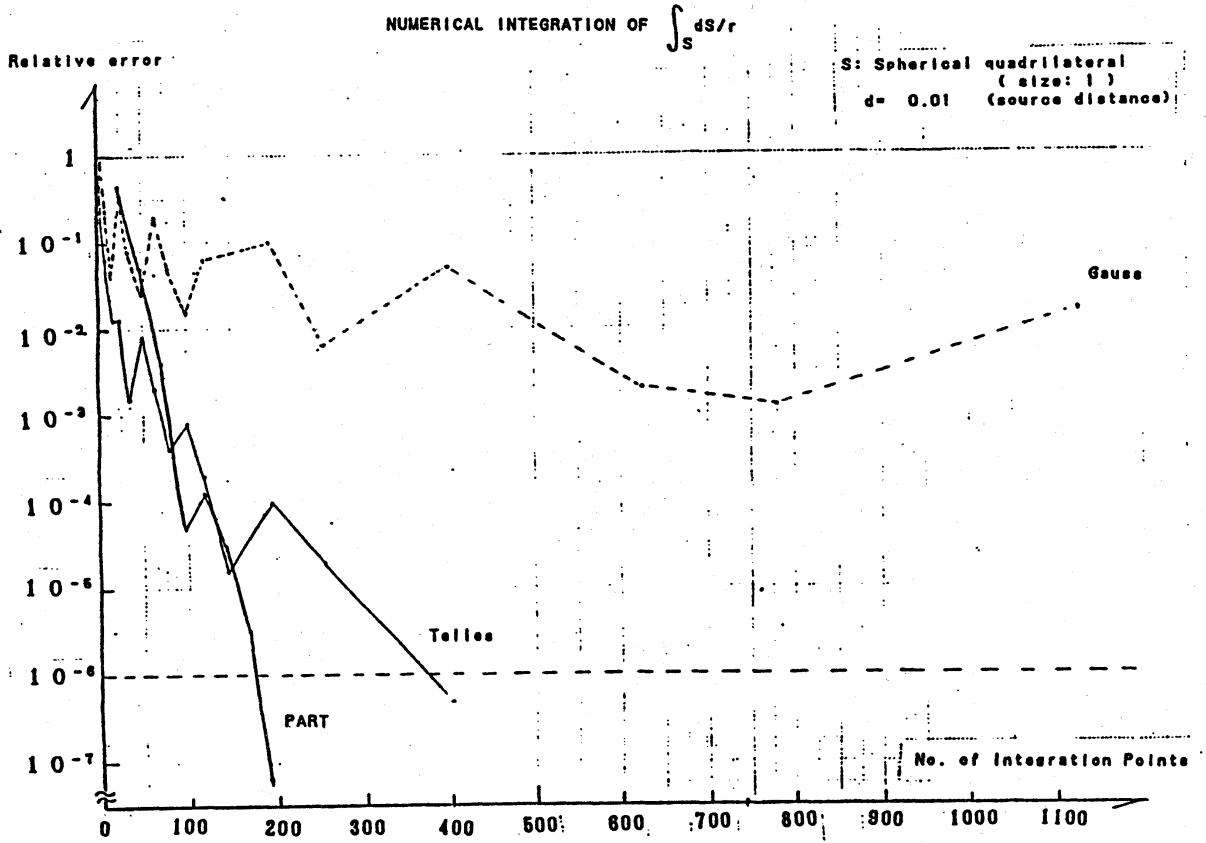


図6 d = 0. 0 1 の場合

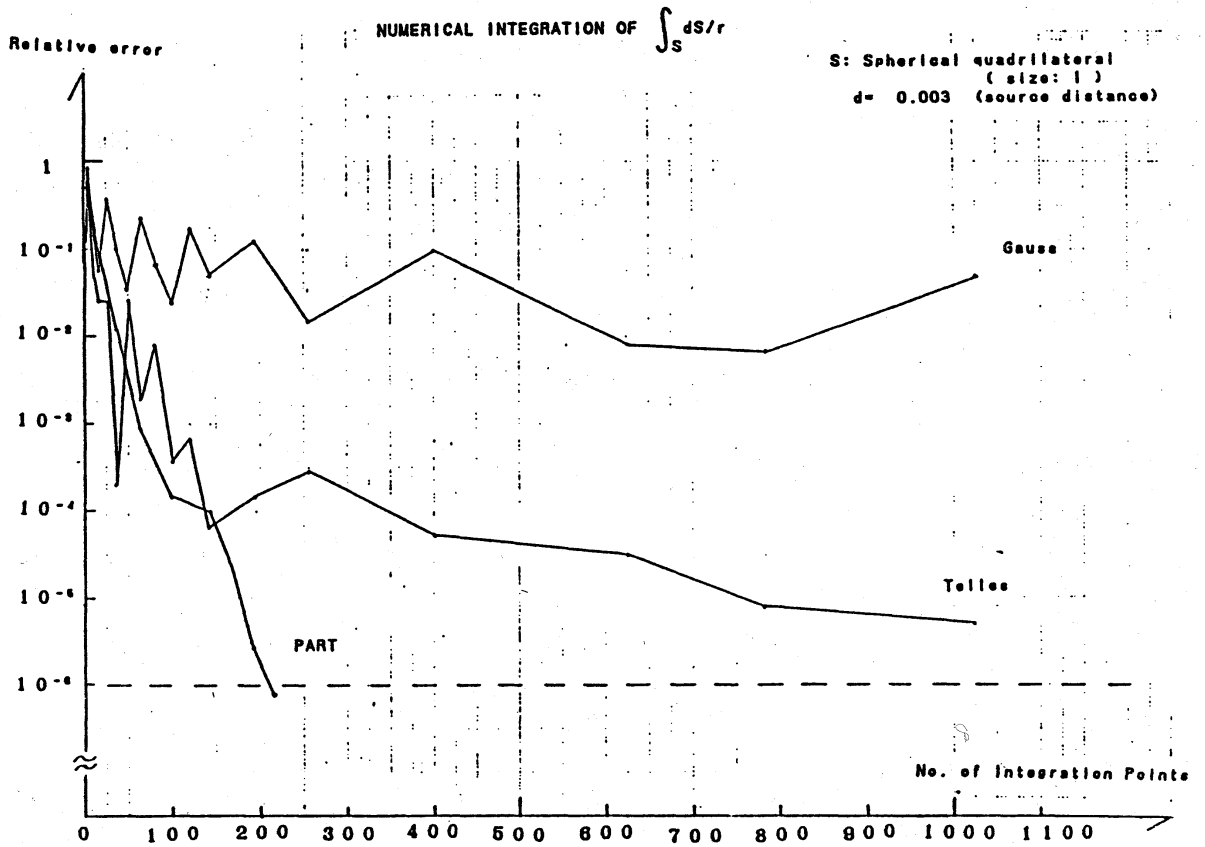


図7 d = 0. 0 0 3 の場合

の積分点で所望の 10^{-6} の精度が得られる。また積分点数の増加に対する収束が速い。

表6に相対誤差が 10^{-6} に到達するのに要する各手法の積分点数も異なる α に対して示す。但し 32×32 点で相対誤差が 10^{-6} に達しない場合はそのときの相対誤差を()内に示す。

表6 曲面四辺形上の擬似特異積分

$$\int_{\Omega} \frac{d\Omega}{r} \text{ に要する積分点数 } [(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)]$$

| α | Gauss 法 | | Telles 法 | | PART 法 | |
|----------|---------------------------------|------|---------------------------------|------|-----------------------|-----|
| | $\eta_1 \times \eta_2$ | 計 | $\delta_1 \times \delta_2$ | 計 | $t(0) \times R(\rho)$ | 計 |
| 10 | 4×5 | 20 | 4×5 | 20 | 5×20 | 400 |
| 1 | 4×4 | 16 | 5×5 | 25 | 5×14 | 280 |
| 0.1 | 25×25 | 625 | 9×9 | 81 | 5×5 | 100 |
| 0.03 | 32×32 (10^{-3}) | 1024 | 11×16 | 176 | 6×7 | 168 |
| 0.01 | 32×32 (10^{-2}) | 1024 | 20×20 | 400 | 6×8 | 192 |
| 0.003 | 32×32 (10^{-1}) | 1024 | 32×32 (10^{-5}) | 1024 | 6×9 | 216 |
| 0.001 | 32×32 (10^{-1}) | 1024 | 32×32 (10^{-5}) | 1024 | 6×10 | 240 |

なお、1積分点当りの計算時間はどの手法もほぼ同じオーダーである。また、 $\alpha = 2, 3, 4$ と特異性の次数が高くなるにつれて Gauss 法, Telles 法は、PART 法に比べて増々不利になる。

(iv) N^d が曲面要素の場合, $I = \int_N \frac{\phi_{ij}}{r} dN$

次に先の例と同じ要素で, 積分核が内添う多項式 ϕ_{ij} ((23)式) を含む場合の結果を表7に示す. 但し, 積分点数は $-1 \leq i, j \leq 1$ のうち最大のものを示す. また, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$ である.

表7. 曲面四辺形上の擬似特異積分

$\int_N \frac{\phi_{ij}}{r} dN$ に要する積分点数

| d | Gauss 法 | | Tetles 法 | | PART 法 | |
|-------|--------------------------|------|--------------------------|------|----------------------------|------|
| | $\eta_1 \times \eta_2$ | 計 | $\xi_1 \times \xi_2$ | 計 | $t(\theta) \times R(\rho)$ | 計 |
| 1 | 5 × 5 | 25 | 6 × 6 | 36 | 9 × 32 (10^{-4}) | 1152 |
| 0.1 | 25 × 28 | 700 | 9 × 10 | 90 | 8 × 32 (10^{-6}) | 1024 |
| 0.03 | 32 × 32 (10^{-2}) | 1024 | 20 × 25 | 500 | 7 × 28 | 784 |
| 0.01 | 32 × 32 (2) | 1024 | 32 × 32 (10^{-5}) | 1024 | 10 × 28 | 1120 |
| 0.003 | 32 × 32 (2) | 1024 | 32 × 32 (10^{-3}) | 1024 | 10 × 20 | 800 |
| 0.001 | 32 × 32 (2) | 1024 | 32 × 32 (10^{-3}) | 1024 | 10 × 20 | 800 |

内添う関数 ϕ_{ij} が与ると各手法とも必要な積分点数は増加するが, $0 < d \ll 1$ の擬似特異積分に対する PART 法の優位性は変わらない。高次の特異性 $\alpha = 2, 3, 4$ についても同様の結果が得られる。

4. まとめ

以上より、PART法は3次元境界要素法で生じる、特異及び擬似特異積分に対して従来の手法に比べてはるかに有効である事が示された。

但し、実用に当っては、次の指針が有益となるであろう。

要素サイズ ~ 1 とし、ソース点の距離 d に関して

- (1) $d \geq 1$ の場合は Gauss 法^[2] を用いる。
- (2) $1 \geq d \geq 0.03$ の場合は Tettes 法^[4] を用いる。
- (3) $0.03 \geq d > 0$ の場合は PART 法 (本手法) を用いる。

但し、 $R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2}$,

$$t(\theta) = \frac{h_j}{2} \log \frac{1 + \sin(\theta - \alpha_j)}{1 - \sin(\theta - \alpha_j)}.$$

[注1] 興味深い事に両者とも \log を含む。これが擬似特異性に対して有効に働いていると考えられる。

[注2] $R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2}$ の特異性 $\alpha = 1 \sim 4$ に対する

robust 性は境界要素法の実用上重要である。それは、

1) の変換、従って同じ積分点を用いて、いわゆる H, G

行列の両方の行列要素をできるからである。

(4) 特異積分 ($d=0$, $\alpha=1$) に対しては PART 法

で $R(p)=p$, $t(\theta)$ を用いれば良い。

なお、平面一定要素においては (1) ~ (4) の距離 d

によらず、PART法で $\beta=2$ とおいた重力径方向の変換 $R(\rho)$ により 重力径方向の積分点は1点のみで良く、偏角方向には $\tau(\theta)$ を適用するのが最も効果的である。

今後、PART法が薄い構造や複雑な構造の境界要素法に於ける解析（境界近傍の flux の計算も含む）に威力を発揮する事が期待される。

<文献>

- [1] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. (1984) "Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering", Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Stroud, A.H. and Secrest, D. (1966), "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, New York.
- [3] Hayami, K. and Brebbia, C.A. (1988) "Quadrature Methods for Singular and Nearly Singular Integrals in 3-D Boundary Element Method.", Boundary Elements 10, 1, 237-264. (Proc. Int. Conf. BEM 10, U.K)
- [4] Telles, J.C.F. (1987) "A Self Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", Int. J. Num. Meth. Engng. 24, 959-973.