数理解析研究所講究録
676巻 1988年 42-48
42

Ⅱ　９段数７次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法について

山梨大学　工学部　村松　茂　(Shigeru Muramatsu)
田中　正次　(Masatsugu Tanaka)
山下　茂　(Shigeru Yamashita)

１．はじめに

我々は昨年来、９段数７次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の一解系を導き、その特性の解明を試みている。ここでは我々によって得られた打ち切り精度に関して最適な公式を、現在文献等で紹介されている９段数７次公式及び１１段数８次公式と比較検討し、この方法の有効性を示すことにしたい。

２．９段数７次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の一般形

常微分方程式の初期値問題

$$y'=f(x,y) \qquad y(x_0)=y_0 \tag{2.1}$$

において、$x=x_n$におけるyの数値解y_nが得られているとき、$x=x_{n+1}$におけるyの数値解y_{n+1}を

$$y_{n+1}=y_n+\sum_{i=1}^{9}c_ik_i$$

$$k_i=h_nf(x_n+a_ih_n,\ y_n+\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}k_j) \tag{2.2}$$

$$a_1=b_{i0}=0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdot 9),\quad h_n=x_{n+1}-x_n$$

によって求める方法を９段数陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法という。a_i, b_{ij}, c_iは公式を特徴づける係数であり、a_iとb_{ij}の間には

$$a_i=\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij} \qquad (i=2,3,\cdots\cdot s)$$

が成り立つ。特に、a_i, b_{ij}, c_iが７次の打ち切り精度を持つように選ばれるとき、この方法を９段数７次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法（以下９段数７次法と略称する）と呼ぶ。

３．Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の評価の観点

９段数７次法の評価の観点と尺度として

（１）　打ち切り精度に関する性質
　　打ち切り精度判定基準（A_{73}，A_{72}）

（２）　安定性に関する性質
　　有効絶対安定領域S_eの面積（$A(S_e)$）
　　絶対安定区間S_iの長さα

（３）　丸め誤差に関する性質
　　丸め誤差特性判定基準（Ｒ）

を考える。（[9]参照）

４．既知公式

現在文献等で紹介されている（埋め込み型公式に使用されているものを除く）９段数７次法の公式は、著者の知る限りでは次の二つ[1][4]である。また、以下に示す８次法（１１段数）の公式[4]も比較のために用いる。

◄ ７次法公式
- ・Ｓｈａｎｋｓ(1966)
- ・Ｃｏｏｐｅｒ　＆　Ｖｅｒｎｅｒ(1972)

◄ ８次法公式
- ・Ｃｏｏｐｅｒ　＆　Ｖｅｒｎｅｒ(1972)

5．最適化

打ち切り誤差に関して我々が最適化した公式は次の２種類である。

・Ｍｅｓｈ９７　：　mesh法を用いて最適化した公式

・Ｎｏｌｌｓ９７　：　非線形最小二乗法パッケージ Nolls[8] を用いて最適化した公式

【Ｍｅｓｈ９７】

a2 = 0.71422222222222222222d-01	b61 = -.15947919471772952705d+01
a3 = 0.10713333333333333333d+00	b62 = 0.00000000000000000000d+00
a4 = 0.16070000000000000000d+00	b63 = 0.65332218361073787534d+01
a5 = 0.44550000000000000000d+00	b64 = -.49476785171192895484d+01
a6 = 0.57347877844021887331d+00	b65 = 0.58272740662942493886d+00
a7 = 0.86450000000000000000d+00	b71 = 0.31826865123465047020d+01
a8 = 0.91170000000000000000d+00	b72 = 0.00000000000000000000d+00
a9 = 0.10000000000000000000d+01	b73 = -.13316381817098599759d+02
	b74 = 0.11429110202962390538d+02
c1 = 0.46166859124963461157d-01	b75 = -.16469217740259453345d+01
c2 = 0.00000000000000000000d+00	b76 = 0.12160068758156498531d+01
c3 = 0.00000000000000000000d+00	b81 = 0.79693031482537380314d+01
c4 = 0.25446926240096597476d+00	b82 = 0.00000000000000000000d+00
c5 = 0.23160153027034919145d+00	b83 = -.34389946069279829035d+02
c6 = 0.16728312084340236191d+00	b84 = 0.29543895049125504665d+02
c7 = 0.42131321090920440436d+00	b85 = -.52319353106257860673d+01
c8 = -.18803738074360686617d+00	b86 = 0.31890801958529017220d+01
c9 = 0.67203397194721472537d-01	b87 = -.16869701332652931652d+00
	b91 = 0.47353216616399246938d+01
b21 = 0.71422222222222222222d-01	b92 = 0.00000000000000000000d+00

b31 = 0.26783333333333333333d-01
b32 = 0.80350000000000000000d-01
b41 = 0.40175000000000000000d-01
b42 = 0.00000000000000000000d+00
b43 = 0.12052500000000000000d+00
b51 = 0.61361703614476026438d+00
b52 = 0.00000000000000000000d+00
b53 = -.23569047798717419008d+01
b54 = 0.21887877437269816364d+01

b93 = -.21337205463127031229d+02
b94 = 0.18963834301206884983d+02
b95 = -.38537772308673409018d+01
b96 = 0.23614331022666242398d+01
b97 = 0.37746001856881894776d+00
b98 = -.24706638968788073419d+00

【Nolls97】

a2 = 0.78166465105555555556d-01
a3 = 0.11724969765833333333d+00
a4 = 0.17587454648750000000d+00
a5 = 0.49874011019850000000d+00
a6 = 0.77212169008853851458d+00
a7 = 0.99118566901896000000d+00
a8 = 0.99950195827682000000d+00
a9 = 0.10000000000000000000d+01

c1 = 0.51260142501324166934d-01
c2 = 0.00000000000000000000d+00
c3 = 0.00000000000000000000d+00
c4 = 0.27521638457225584784d+00
c5 = 0.33696650338197282587d+00
c6 = 0.18986072226268125901d+00
c7 = 0.84610982530609745495d+01
c8 = -.13015942351679011923d+03
c9 = 0.12184502151101091058d+03

b21 = 0.78166465105555555556d-01
b31 = 0.29312424414583333333d-01
b32 = 0.87937273243750000000d-01
b41 = 0.43968636621875000000d-01
b42 = 0.00000000000000000000d+00
b43 = 0.13190590986562500000d+00
b51 = 0.73618348368951701066d+00
b52 = 0.00000000000000000000d+00
b53 = -.28337999620895936428d+01
b54 = 0.25963565885985766322d+01

b61 = -.12062819383206433867d+02
b62 = 0.00000000000000000000d+00
b63 = 0.48208380969581863884d+02
b64 = -.38058630439276117840d+02
b65 = 0.26851905429892263371d+01
b71 = 0.10521957191441549257d+03
b72 = 0.00000000000000000000d+00
b73 = -.41792888289184693851d+03
b74 = 0.33231554777416396863d+03
b75 = -.19827591022983800454d+02
b76 = 0.12125398952702377699d+01
b81 = 0.11467755704762585743d+03
b82 = 0.00000000000000000000d+00
b83 = -.45556121644503529877d+03
b84 = 0.36224095511111329723d+03
b85 = -.21671904400175272020d+02
b86 = 0.13189132017914745150d+01
b87 = -.48025570432383756836d-02
b91 = 0.11521334849065519043d+03
b92 = 0.00000000000000000000d+00
b93 = -.45769356483840412265d+03
b94 = 0.36393688151944545632d+03
b95 = -.21776682042397576180d+02
b96 = 0.13250670890163702596d+01
b97 = -.45181914604453402742d-02
b98 = -.53202685487284736142d-03

6. 各公式の特性値

上述の諸公式の特性値は表6-1のようになる

表 6-1 公式の特性値

7次法	A_{72}	A_{73}	$A(S_e)$	α	R
Shanks	0.1493454e-2	0.1678949e-6	25.60985	4.4731	0.6976e+2
C & V - 7	0.4664776e-2	0.7481319e-6	10.91974	2.6662	0.2183e+2
Mesh97	0.1199154e-3	0.3516996e-9	32.91478	4.6143	0.1836e+3
Nolls97	0.2517475e-4	0.9862175e-11	36.43435	4.9125	0.3161e+4
8次法	A_{82}	A_{83}	$A(S_e)$	α	R
C & V - 8	0.8753811e-3	0.1504023e-7	28.60439	4.3136	0.3499e+2

7. 数値実験

例題として、次に示す安定性にそれぞれ特徴がある3問題、及び非線形問題1題を選んだ。

1. $y'=-y+\sin(2x)$　　$y(0)=-0.4$　　$\left(\frac{\partial f}{\partial y}<0\right)$

   理論解：　$y = (\sin(2x)-2\cos(2x))/5$

2. $y'= y+\sin(2x)$　　$y(0)=-0.4$　　$\left(\frac{\partial f}{\partial y}>0\right)$

   理論解：　$y = -(\sin(2x)+2\cos(2x))/5$

3. $y'= y\cos(x)$　　$y(0)=1.0$　　$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right.$: 振動)

   理論解：　$y = e^{\sin(x)}$

4. $y'=-\frac{1}{3}x^2y^2$　　$y(2)=1.0$　　（非線形）

   理論解：　$y = 9/(x^3+1)$

問1～問3（問4）に対する $0\leqq x\leqq 5$（$2\leqq x\leqq 7$）における最大誤差と刻み幅の関係を図7-1～図7-3（図7-4）に示す。

1. $y'=-y+\sin(2x)$ $y(0)=-0.4$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y}<0\right)$

理論解: $y = (\sin(2x)-2\cos(2x))/5$

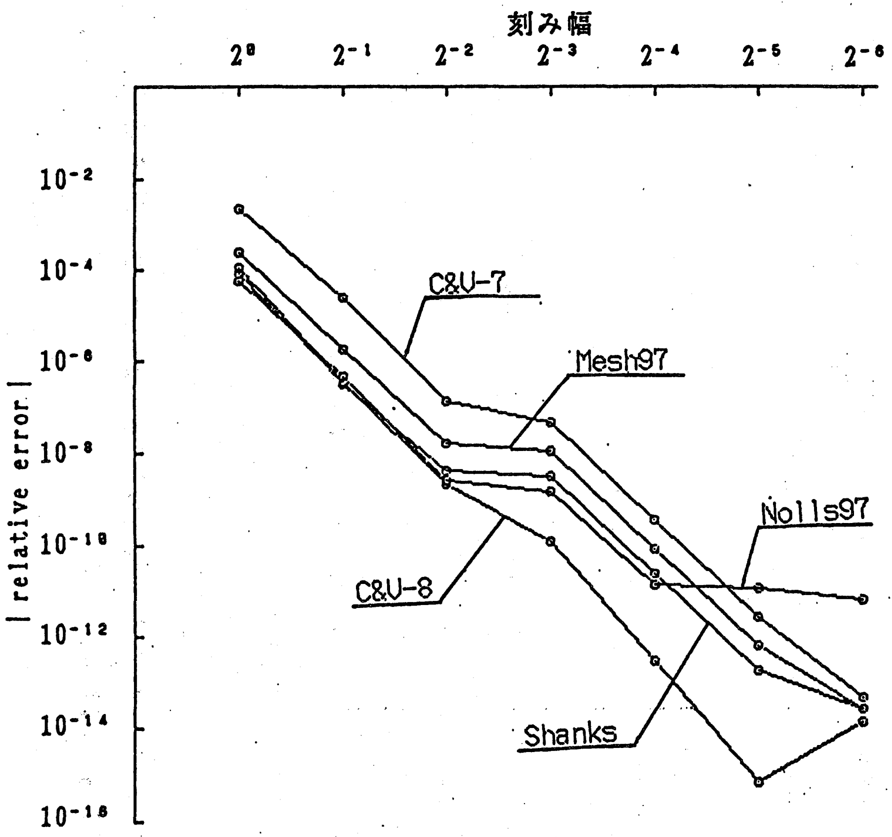

図7-1 刻み幅と最大誤差の関係（問題１）

2. $y'= y+\sin(2x)$ $y(0)=-0.4$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y}>0\right)$

理論解: $y = -(\sin(2x)+2\cos(2x))/5$

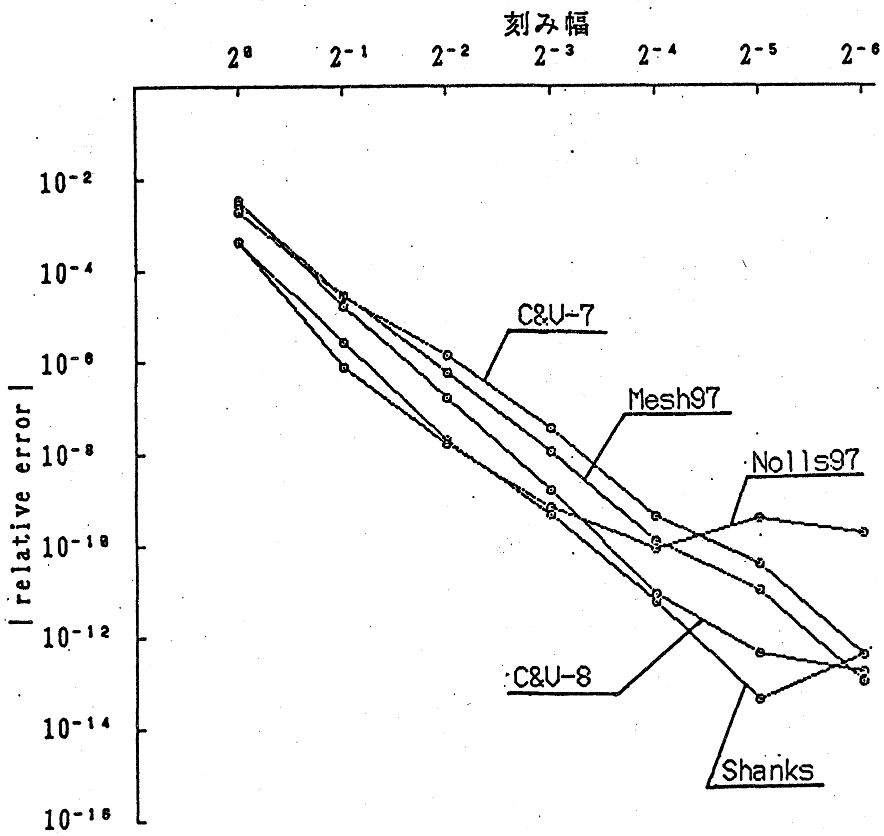

図7-2 刻み幅と最大誤差の関係（問題２）

3. $y' = y\cos(x)$ $y(0)=1.0$ ($-\frac{\partial f}{\partial y}$: 振動)

理論解: $y = e^{\sin(x)}$

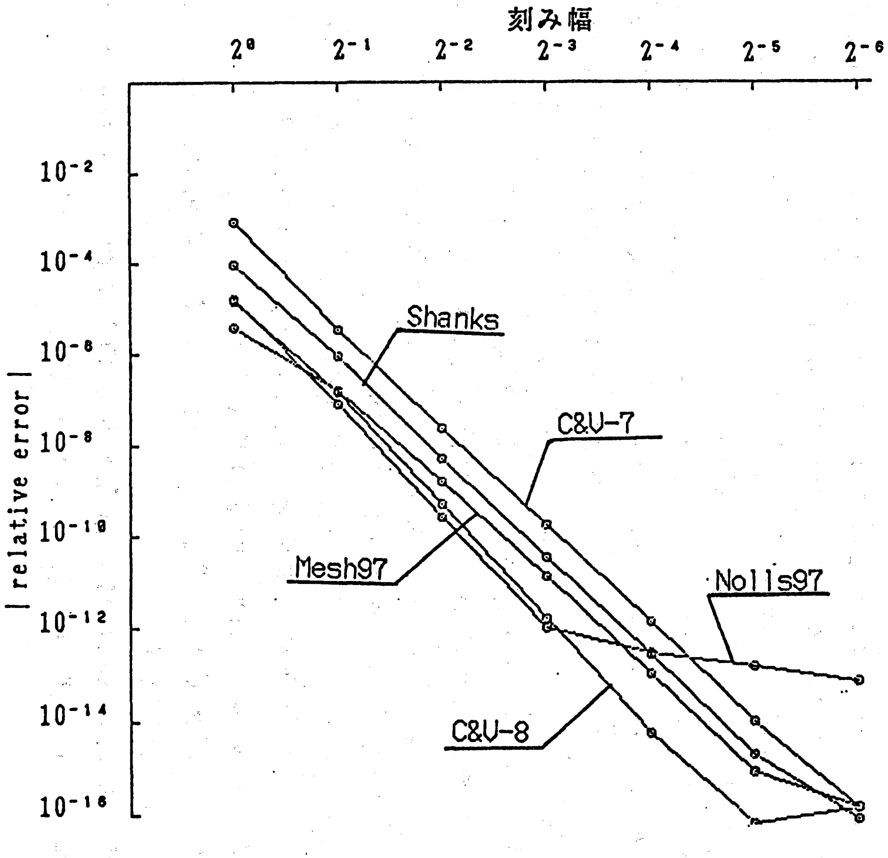

図7-3 刻み幅と最大誤差の関係（問題３）

4. $y' = -\frac{1}{3}x^2y^2$ $y(2)=1.0$ （非線形）

理論解: $y = 9/(x^3+1)$

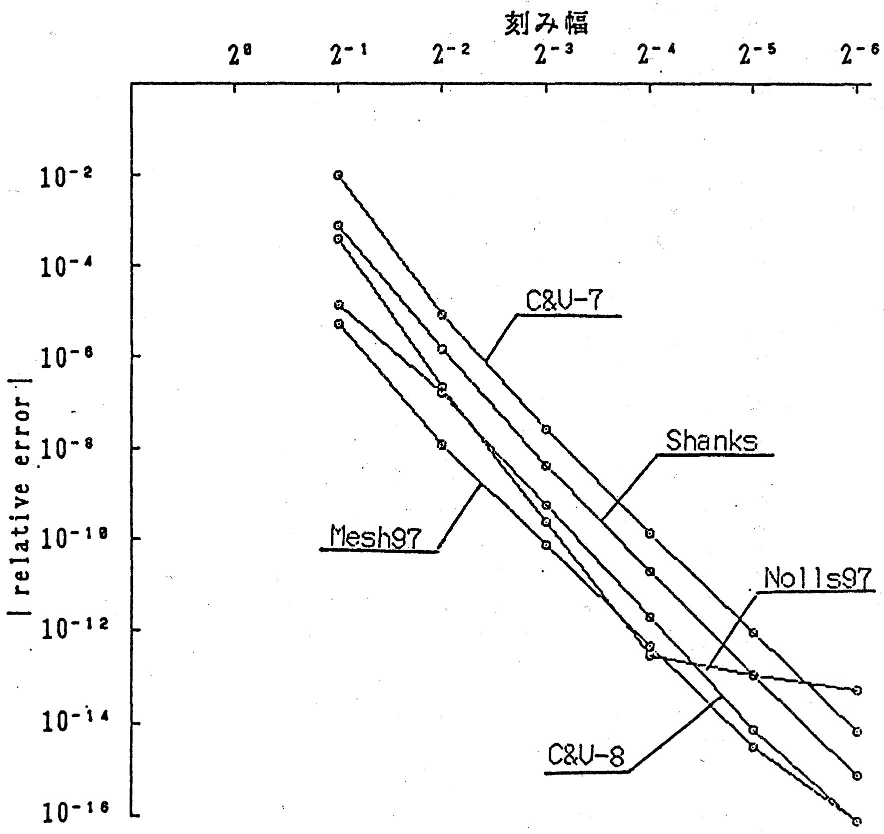

図7-4 刻み幅と最大誤差の関係（問題４）

8. まとめ

Mesh97, Nolls97とも図6-1の特性値の値をよく反映しており、図7-1～図7-4の観察から最適化が十分であることがわかる。特にNolls97は他公式に比べ丸め誤差の影響を強く受けるが、相対誤差が10^{-10}程度の要求精度に対しては既知公式よりよい結果が得られており、また８次法の公式と比べても全然見劣りがしないので、実用上有効な公式であると思われる。

９段数７次法の公式によって、関数計算回数が２回多い１１段数８次法の公式の精度を上回る結果が得られるということは注目すべき事実であり、これは同時に８次法に対して打ち切り精度・安定性の両面においてなお改良の余地が十分残されていることを示唆しており興味深い。

参考文献

[1] Shanks, E.B.:Solution of Differential Equations by Evaluations of Functions, Mathematics of Computation, Vol.XX, No.93(1966)

[2] Butcher, J.C.:The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Jhon Wiley & Sons(1986)

[3] Kutta, W.:Beitrage zur naherungsweisen Integration Totaler Differentialgleichungen, Z.Math.Phys., Vol.46, pp.435-453(1901)

[4] Cooper, G, J. and Verner, J, H.:Some explicit Runge-Kutta methods of high order, SIAM J. on Numerical Analysis, Vol.9, pp.389-405(1972)

[4] 田中正次: Runge-Kutta法の打ち切り誤差に関する研究
東京大学に提出した学位論文(1972)

[5] 小野令美: Runge-Kutta系の常微分方程式数値解法公式の研究
東京大学に提出した学位論文(1986)

[6] 田中, 山下, 村松, 笠原: ９段数７次陽的Runge-Kutta法について
京都大学数理解析研究所講究録, No.643, pp.28-47(1988)

[7] 三井斌友: 数値解析入門, 朝倉書店(1985)

[8] 田辺国士: 非線形最小二乗法のアルゴリズム, 応用統計学, Vol.9, No.3, pp.119-140(1981)

[9] 田中正次: Runge-Kutta法の研究と評価のためのソフトウェア, pp.29-35
コンピュートロール NO.12, コロナ社(1985)