

Channel 流れにおける LES 乱流モデルの検証

東大生研 堀内 潔 (Kiyosi Horiuti)

チャンネル流の FTS データ・ベースを用いた LES 乱流モデルの検証を行う。基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式(1)および連続の方程式(2)である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

十分に乱流に発達した Plane Poiseuille 流では、下流方向(x)および横断方向(z)に流れは一様と考えられるので周期境界条件を課すことが妥当である。x、zの2方向にはこの境界条件を利用し、すべての変数を離散 Fourier 変換し、Spectral 法を用いている。この方法には、3次元の問題を実質的に1次元の問題に還元できるという利点がある。以下、x、y、zの各々の方向の速度成分を  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 、または、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ と書く。基になる FTS データ・ベースの計算であるが、ここでは、y方向には、2次の中心差分を用いた。したがって、厳密な意味では FTS とは呼べないが、FTS と LES を並列に走らせて両者の比較をする必要があったため、こちらのデータ・ベースを採用した。数値計算法は以下のものである。方程式(1)の時間差分を、粘性項には Crank-Nicolson 法を、残りの項には Adams-Bashforth 法を用いて近似し、さらに速度、圧力を x-z 方向への2次元離散 Fourier 展開し方程式(1)、(2)に代入すると、展開係数  $u_i$ 、 $p$  に対するブロック三重対角形の連立方程式が得られこれを解いて時間ステップを進めていく。したがって、主要な演算は(1)2次元の高速 Fourier 変換、(2)ブロック三重対角形連立一次方程式である。通常の MAC 法との相違および移流項の近似法については、Horiuti (1987) を参照されたい。本データ・ベースでは、格子点数は  $128 \times 129 \times 256$  まで拡張されている。

このデータの信頼性のチェックとして、図1に平均速度プロファイル、図2に乱流強度の下流方向成分を示した。詳細は Horiuti (1988) を参照されたい。図3は、 $y_1 = 106$  における乱流エネルギーの下流方向スペクトルであるが、高波数においては、低波数にくらべ約6桁強度が落ちており、かなりの解像度があることを示している。

さて、このデータ・ベースを利用した LES 乱流モデルの検証を行うわけであるが、こ

れには、2通りの方法がある。1つは、A priori test と呼ばれるもので、FTS のデータにフィルターを施すことにより、モデル化のない厳密な値を算出し、LES におけるモデル化による評価との比較を行い、同時により精度の高いモデルを導出する。これはいわばモデルの忠実度を計るテストで、特に、予測可能性を高めるために重要である。残りの一つは、A posteriori test と呼ばれ、A priori test で導出した忠実度の高いモデルを LES 計算に実際に適用し、乱流強度、相関関数といったレベルでの改善を調べるテストである。もしも、この2つのテストの双方で、旧来のモデルにくらべ改善が見出せれば、それは優れたモデルであると考えられる。なお、Fourier-Chebyshev 展開を用いた Kim et al.(1987) の FTS データを使った同様なテストは、Piomelli et al.(1988)によっても行われている。

フィルタリングは、LES では通常、次のように、全てのスケールをもつ  $f$  に対し、フィルター関数  $G(x)$  との convolution により

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') f(x') dx' \quad (3)$$

と定義される。ここでは、 $G$  としてはガウシアン形

$$G(x) = (\pi/6)^{1/2} / \Delta \exp(-6x^2 / \Delta^2) \quad (4)$$

を主として用いる。

### 1 A priori test

このテストでは、 $Re = 360$  とし、格子点数として  $128 \times 129 \times 256$  を用いた上述の FTS データ (raw variable  $u_i, p$ ) に対し、Gaussian 形のフィルター (式(4)で、 $\Delta$  を  $4\Delta_1$  としたもの) を、 $x, z$  2方向にかけ、Filtered variable ( $u_i, p$ ) を生成する。 $u_i, p$  が LES の Grid Scale (GS) を表す変数になる。さらに、Sub Grid Scale (SGS) の変数  $u_i' = u_i - \bar{u}_i, p' = p - \bar{p}$  を算出し、これらの変数に対する LES のモデルを厳密な値と比較する。この比較は、テンソル、ベクトル、スカラーのレベルで可能であるが、ここでは、テンソル中でも、チャンネル流のような平均流が1次元になる流れでは特に重要な  $x$  方向と  $y$  方向の相関 (例えば、レイノルズ・ストレス  $u_1' u_2'$ ) についての結果のみを紹介する。

(1) 式中の非線形項  $u_i u_j$  を書き下すと、Leonard ( $L_{ij}$ ), Cross ( $C_{ij}$ ), および SGS Reynolds stress ( $R_{ij}$ ) とよばれる次の3つのストレスが形成される。

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \\ C_{ij} &= \overline{\overline{u_i u_j'}} - \overline{\overline{u_i'}} \overline{\overline{u_j}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$$

従来の LES ( Moin and Kim (1982), Horiuti (1987) )では、 $L_{ij}$  は直接計算され、 $R_{ij}$  は、Smagorinsky モデル

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_i' u_i'} = -\nu_e \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$\nu_e = (C\Delta)^2 \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{1/2}$$

で近似、 $C_{ij} = 0$  と置く方法が採用されてきた。ここに、 $\nu_e$  は渦粘性率とよばれ、小さなスケールの運動は粘性的な作用しかしないという仮定のもとに導きだされている。実はこれは、Speziale (1985) により指摘されたようにガリレイ不変性を失うという欠点を持ち合わせていた。これに対し、最近 Bardina (1983) により、 $C_{ij} + R_{ij}$  を次のように近似するモデル (以下 Bardina モデル) が提案された。

$$C_{ij} = \left( \bar{u}_i - \bar{u}_i \right) \bar{u}_j + \bar{u}_i \left( \bar{u}_j - \bar{u}_j \right) \quad (7)$$

$$R_{ij} = \left( \bar{u}_i - \bar{u}_i \right) \left( \bar{u}_j - \bar{u}_j \right)$$

これは、Scale - similarity モデルとも呼ばれるが、SGS の相関のうち最も GS に近い成分の相関のみを取り出している。したがって、必ずしも散逸が十分であるとは言えないため、これに Smagorinsky モデルを加えて、 $C_{ij} + R_{ij}$  を近似する。 $i=1, j=2$  成分の厳密値とこの近似によるモデル値との相関を図4に示した。これは、FTS のデータから6ステップを取り出し、そのアンサンブル平均をとったものであるが、厳密値との相関は極めて高くなっている。実はこの相関の高さは、 $C_{ij}$  からの寄与が大きい。図5は、 $C_{12}$  と Bardina モデルによる  $C_{12}$  の近似値との相関であるが、このレイノルズ数では、 $R_{12}$  の値は小さいので、 $C_{12}$  の相関の高さのみが表面に出てきている。次に、 $R_{12}$  のみの近似の精度を調べてみる。 $R_{12}$  の厳密値と Smagorinsky モデル、および、Bardina モデルによる近似との相関を、各々図6 (a)、(b) に示した。これらは、アンサンブル平均をとったものであるが、 $C_{12}$  についての相関と比較すると低いが、0.7 程度と比較的高い相関値を示しており、良い近似になっていると考えられる。ところで、図7は、Leonard stress と Bardina モデルの相関を示すが、特筆すべき点は両者が非常に強い負の相関をもっている点である。すなわち、両者はほとんど打ち消しあっている事がわかる。こ

の点は Piomelli et al.(1988) では指摘されていない。従来の LES では、 $L_{ij}$  は陽に計算されているにもかかわらず、 $C_{ij}$  に対するモデリングは全く行われておらず、この Apriori のテストからは、精度が低いと言わざるをえない。

## 2 A posteriori test

1 節の A priori test から  $C_{ij}$  モデル化の導入が必要な事がわかったので、ここでは、Bardina モデルを取り入れた LES を行い、その効果を見る。

初期条件は、1 のテストでフィルターをかけたデータを与え、 $32 \times 129 \times 64$  の格子点を用いた。Re は同じく 360 とした。ここでは、FTS と LES の "dynamic" な比較、すなわち、LES の計算を進めたあるステップにおける流れ場と、対応する時刻における FTS のデータにフィルターをかけた流れ場の相関を調べた。こうしたテストは、Piomelli et al.(1988) ではなされていない。

図 8 は、200 step ( $t = 0.05$ ) 後の相関係数である。(a) は、Bardina モデルを入れない場合、(b) は入れた場合であるが、(a) では相関の減衰が著しいのが明らかであり、特に予測可能性の見地から、Bardina モデルを入れた効果は顕著である。勿論、フィルタリングを入れた関係上、Bardina モデルを入れた場合でも、相関はやがては減衰していくが、その時点では、統計量に有意な差異が生じ、改善がなされているか否かが肝要となる。

したがって、次のテストでは、LES の計算をさらに続行して統計量の差異を見る。図 9 は、乱流強度の下流方向成分の壁付近の分布であるが、ピークの位置が壁によっていることがわかる。図は省略したが、他の 2 成分については、特に壁付近での立ち上がりが改善されている。図 10 は、速度の横断方向の相関係数であるが、これから見ると、ストリークの間隔も改善されているのがわかる。

## 3 差分法への応用

前節の計算は、 $x-z$  両方向に Spectral 法を用い、Gaussian 形のフィルターを陽に課していた。本節では、工学上一般に用いられている差分法による LES への Bardina モデルの応用について触れてみたい。

今、 $\partial u / \partial x$  にたいする 2 次の中心差分を考え、さらに、 $u_i$  を Fourier 展開して代入することにより次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (8)$$

$$= \sum_{\mathbf{l}} (-1)^{1/2} k_{\mathbf{l}} u_{\mathbf{l}} \exp(2\pi (-1)^{1/2} i \mathbf{l} / N)$$

ここに、 $k_1''$  は、 modified wave number

$$k_1'' = \sin(2\pi l / N) / \Delta x \quad (9)$$

である。すなわち、差分法では、exact な wave number ( $k_1 = 2\pi l / N \Delta x$ ) に代わり、上述の modified wave number が加かることになる。したがって、おおまかに言って、前出の LES では、Gaussian 形フィルターを用いていたのにたいし、差分法では、 $k_1'' / k_1$  という形のフィルターを課していることになる。このフィルターは、実空間では top-hat 形のフィルターとなるので、Bardina モデル中の 2 回フィルターをかけた項は、差分法においても、top-hat フィルターを用いて定義できる。こうして Bardina モデルを取り入れた計算結果を図 11 に示す。図は、2 節図 8 で行ったのと同様な相関を計算したものであるが、2 節と同様に著しい改善が見られ、Bardina モデルが差分法を用いた LES にも適用可能なことが示された。

#### 4. おわりに

FTS データ・ベースによる LES モデルの検証を行い、そこで導出されたモデルの LES への適用を試みた。ここでは、FTS が低レイノルズ数で行われたという点に常に留意しなければならないが、こうした検証は、今後の乱流の数値計算一つの方向になるのではないかと思われる。詳細は、文献 10 を参照されたい。

#### 参考文献

1. Gottlieb, D. and Orszag, S.A. (1977) Numerical Analysis of Spectral Methods, NSF-CBMS Monograph, No.26, SIAM.
2. Patera, A.T. (1984) J. Comp. Phys., vol.54, p.468
3. Horiuti, K. (1987) J. Comp. Phys., vol.71, p.343
4. Horiuti, K. (1988) to be published
5. Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D. (1987) J. Fluid Mech., vol.177, p.133
6. Piomelli, U., Moin P. and Ferziger, J.H. (1987) Phys. Fluids, vol.31, p.1884
7. Moin, P. and Kim, J. (1982) J. Fluid Mech., vol.118, p.341
8. Speziale, C.G. (1985) J. Fluid Mech., vol.156, p.55
9. Bardina, J., Ferziger, J.H. and Reynolds, W.C. (1983) Report TF-19, Dept. of Mech. Engng., Stanford University
10. Horiuti, K. (1988) submitted to Physics of Fluid.

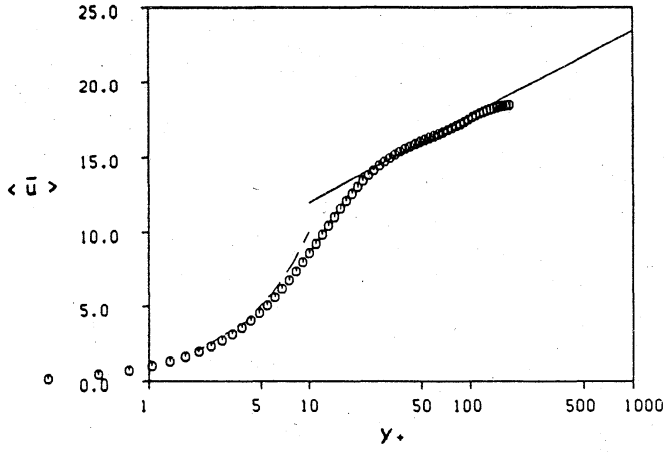


図1 FTS より得られた平均速度分布

- : 数値解
- :  $\langle u \rangle = \log y^+ / 0.4 + 5.5$
- - - :  $\langle u \rangle = y^+$

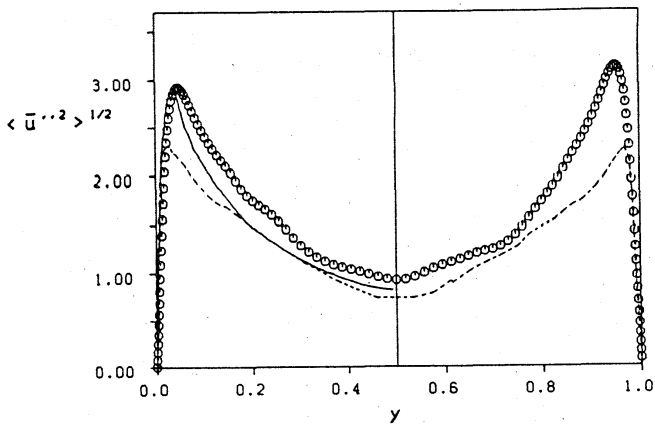


図2 乱流強度の下流方向成分

- : 数値解
- : Kreplin & Eckelman (1979)
- - - : Moin and Kim (1982)

$y^+ = 105.844$

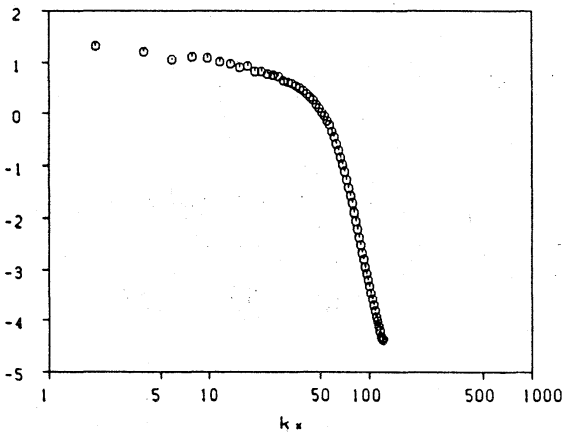


図3 乱流エネルギーの x スペクトル

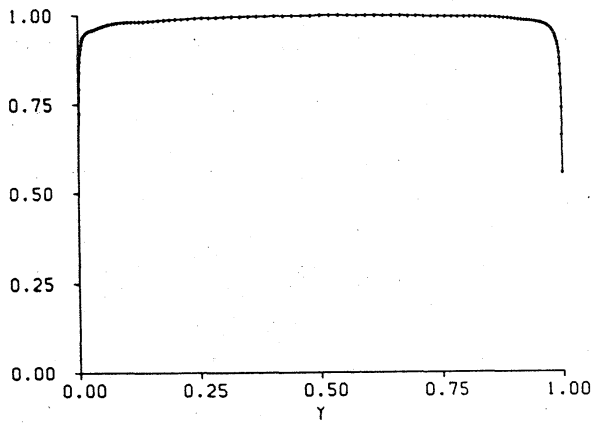


図 4  $C_{12} + R_{12}$  の厳密値と Bardina および Smagorinsky モデルによるモデル値の相関係数の  $y$  分布

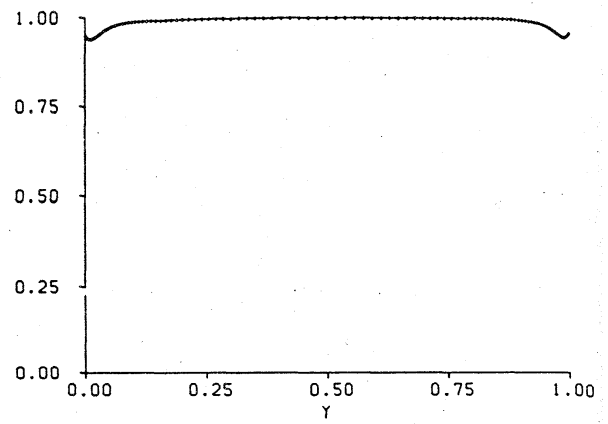


図 5  $C_{12}$  の厳密値と Bardina モデルによるモデル値の相関係数の  $y$  分布

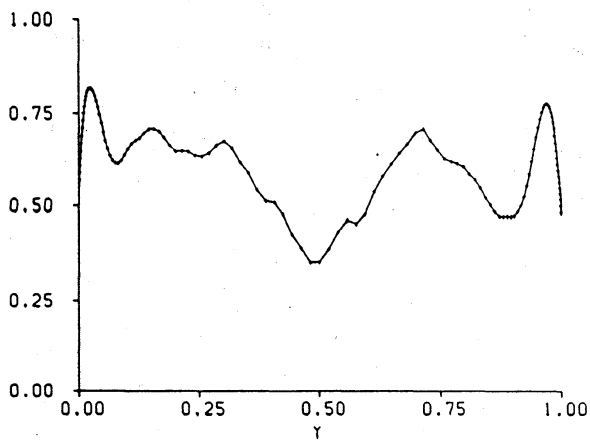


図 6 (a)  $R_{12}$  の厳密値と Smagorinsky モデルによるモデル値の相関係数の  $y$  分布

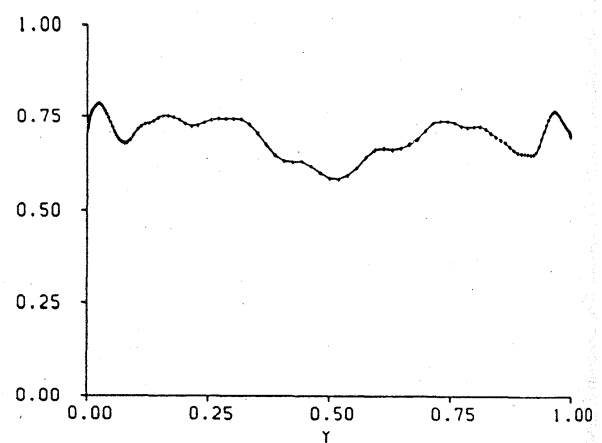


図 6 (b)  $R_{12}$  の厳密値と Bardina モデルによるモデル値の相関係数の  $y$  分布

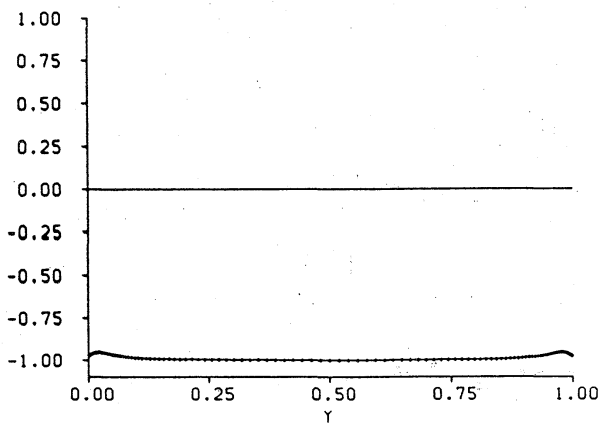
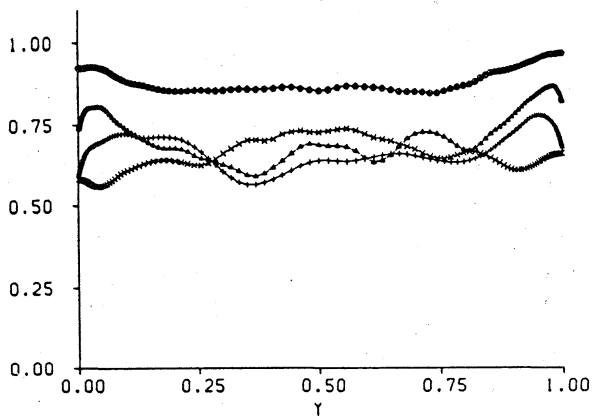
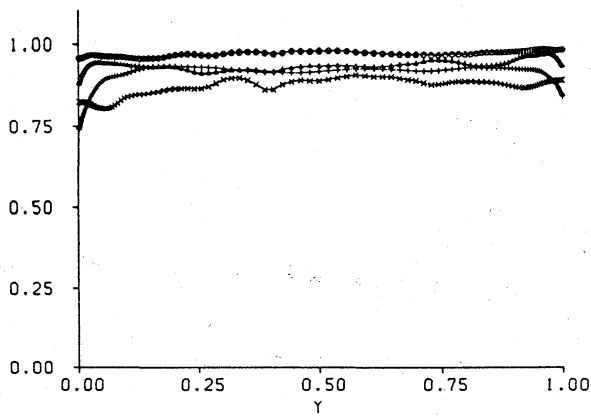


図7 Leonard 項と Bardina モデルの相関係数の y 分布

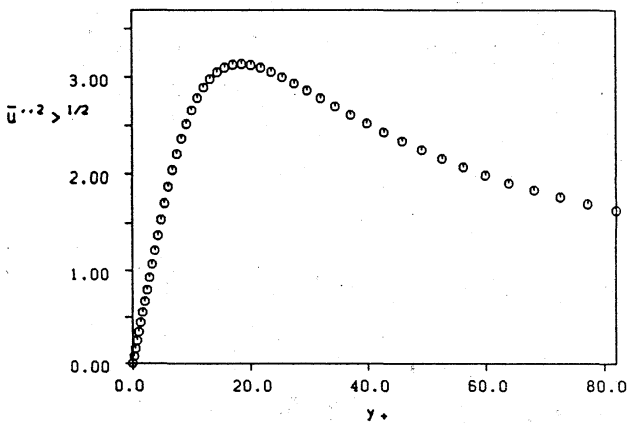


(a) Bardina モデル なし

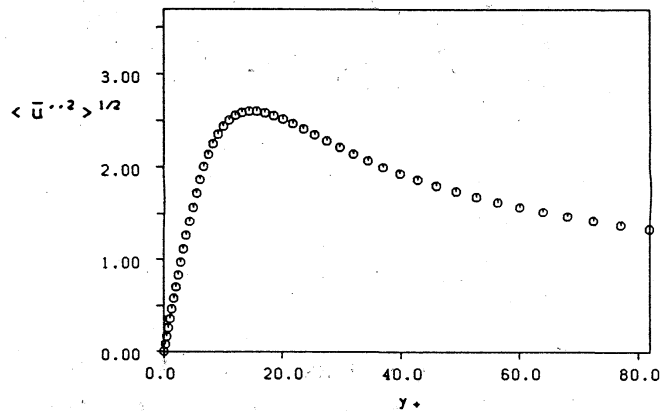


(b) Bardina モデル あり

図8 Posteriori test : 200 step における LES の速度、圧力と  
対応する step における Filtered FTS の速度、圧力と  
の相関係数の y 分布



(a) Bardina モデル なし



(b) Bardina モデル あり

図9 下流方向の乱流強度の y 分布



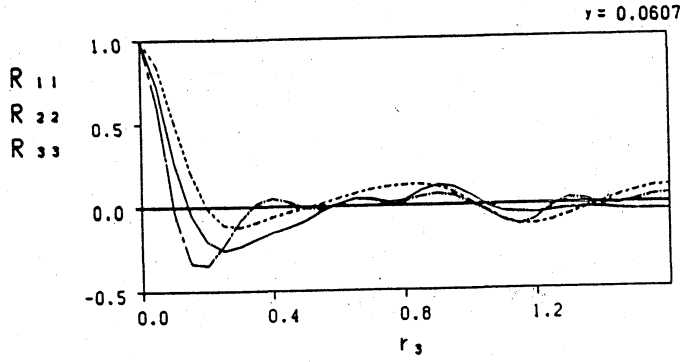
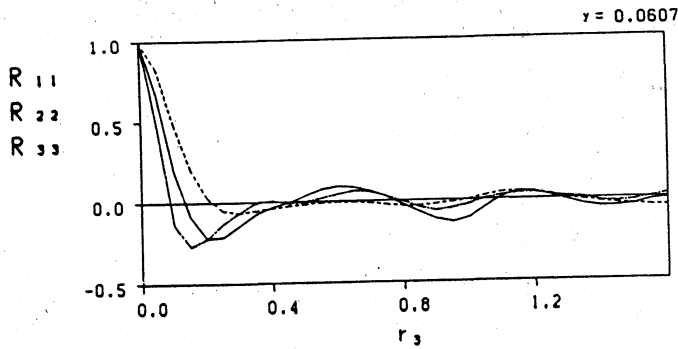
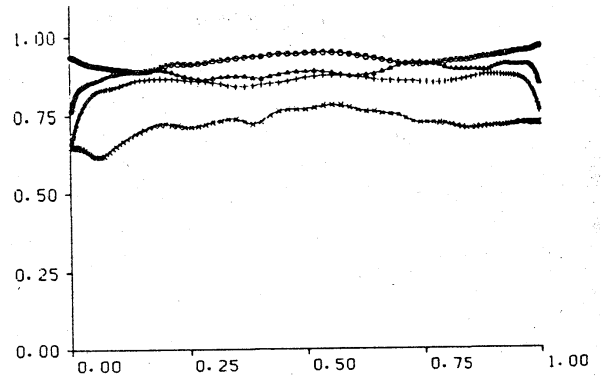
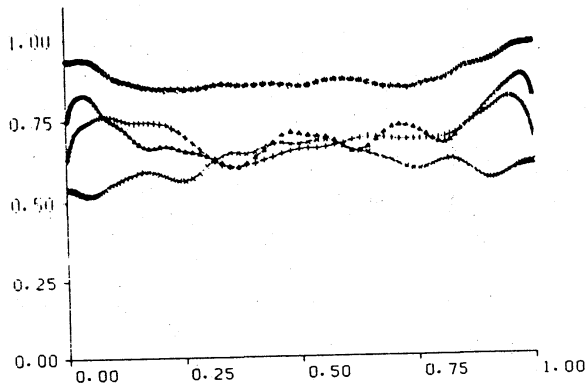


図10 速度のz方向相関係数  
(a) Bardina モデル なし



(b) Bardina モデル あり



(a) Bardina モデル なし

(b) Bardina モデル あり

図11 差分法 : 200 step における LES の速度、圧力と対応する step における Filtered FTS の速度、圧力との相関係数の y 分布