

渦の特異性について

名大・工

桑原真二 (sinzi kuwabara)

1. まえおき

この論文では、渦運動理論におけるヴォートンの理論について議論する。電気力学との対応をはっきりさせるために、対応する方程式を書き下だしておこう。

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}, \quad \text{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \quad (1.1)$$

およびビオ・サバールの法則

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \mu \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

である。電気力学では、微小な電流要素 $\mathbf{J} dV$ によって誘導される磁場として

$$\delta \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV, \quad (1.3)$$

を考える。この場合、孤立した電流要素というものは、物理的には考えられない。しかし、電流が磁場を誘導するという因果律のみに着目すれば、正しい数学的表現になっている。ヴォートンの考え方もこれと同じである。ヴォートンに関連した問題点も多くはこのことと関係している。

2. 基礎方程式

縮まない、粘性無しの流体の、渦無し運動の基礎方程式は、渦度の定義式とオイラーの運動方程式両者の rot をとって、次のように表すことができる。

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\text{rot} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \omega - (\omega \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

ここで、 $\mathbf{v}, \omega$ は流速と渦度である。この論文では、(2.1) を速度誘導方程式 (velocity-induction equation, V.-I. eq.)、(2.2) を渦度発展方程式 (vorticity evolutionary equation, V.E. eq.) と呼ぶことにする。

いまラプラス演算子の基本解を考える。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 F(\mathbf{x}) &= \delta^3(\mathbf{x}); \quad \text{grad} F(\mathbf{x}) = 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \\ F(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad |\mathbf{x}| \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

無限領域での (2.1) の解は、(2.3) をもちいて

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \omega(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (2.4)$$

と表すことができる。すなわち、ビオ・サバールの法則である。

3. ヴォートンとソフト・ヴォートン

渦度場を多くの細胞に分割して

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum \Omega(l, t) \Lambda^3(\mathbf{x}, l), \quad (3.1)$$

と近似する。ここで、 $\Lambda^3(\mathbf{x}, l)$ は $\mathbf{x}$ が l 番目の細胞に属するとき 1、そうでないとき 0 である。 $\Omega(l)$ は l 番目の細胞の中での渦度の平均である。さらに、渦度が細胞の中心 $\mathbf{x}_l$ に集中していると考え $\Lambda^3(\mathbf{x}, l)$ を $V(l) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)$ で置き換えて

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_l \Omega(l, t) V(l) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l), \quad (3.2)$$

をうる。(3.2)の各項がヴォートンの渦度である。これを(2.4)に代入することによって

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_l \frac{V(l)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|^3} \Omega(l, t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l), \quad (3.3)$$

が得られる。

(3.2)、(3.3)の各項で、 $\Omega(l, t) V(l)$ をのぞいたものを、 $\mathbf{e}$ 方向に($\mathbf{e} = \Omega(l, t) / \Omega(l, t)$)むいた単位ヴォートンの渦度、それによる誘導速度とすれば

$$\omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \mathbf{e} \delta^3(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|^3} \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \quad (3.5)$$

がえられる。ただし、ヴォートンは原点にある。(3.4)のdivをとると

$$\text{div} \omega^V = (\mathbf{e} \cdot \text{grad}) \omega^V(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (3.6)$$

であることがわかる。

Lighthillは超関数(distribution)を、よい関数(good functions, $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で0で、何回でも微分可能な関数)の列の極限として定義し、とくに一般化関数とよんだ。たとえば、1次元および、3次元のデルタ関数は

$$\left. \begin{aligned} \delta(\mathbf{x}, \alpha) &= \sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha |\mathbf{x}|^2) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \delta(\mathbf{x}), \\ \delta^3(\mathbf{x}, \alpha) &= (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha |\mathbf{x}|^2) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \delta^3(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

のように、定義される。また、3次元ラプラス演算子のゆるめられた基本解の方程式(および境界条件)を

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, \alpha) = \delta^3(\mathbf{x}, \alpha); \quad \text{grad} F(\mathbf{x}, \alpha) = 0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

とすると解は

$$F(\mathbf{x}, \alpha) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \text{erf}(\sqrt{\alpha}|\mathbf{x}|), \quad (3.9)$$

となる。ただし、

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (3.10)$$

である。

ここで、(3.4)の右辺において $\delta^3(\mathbf{x})$ を $\delta^3(\mathbf{x}, \alpha)$ にかえて

$$\omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = e(\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha|\mathbf{x}|^2), \quad (3.11)$$

をソフト・ヴォートンの渦度とする。これを(2.1)の右辺に代入して、積分すると

$$\mathbf{v}^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2} (\text{erf}(\sqrt{\alpha}|\mathbf{x}|) - 2\sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha|\mathbf{x}|^2)) \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

をうる。勿論

$$\omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}),$$

$$\mathbf{v}^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{v}^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}),$$

が成立ち、また

$$\operatorname{div} v^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = -2(\alpha/\pi)^{3/2} \alpha (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \exp(-\alpha |\mathbf{x}|^2) \neq 0$$

となる。ここで、注意すべきは、

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = & \omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) - \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \delta^3(\mathbf{x}, \alpha) - \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|^3} \left(e - \frac{3}{|\mathbf{x}|^2} \right. \\ & \left. (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} (\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha} |\mathbf{x}|) - 2\sqrt{\alpha/\pi} |\mathbf{x}| \exp(-\alpha |\mathbf{x}|^2)) \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

となり $\operatorname{rot} v^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) \neq \omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha)$ ことである。

4. ヴォートン理論における問題点

ヴォートン理論で問題になるのは、 $\operatorname{div} \omega \neq 0$ とヴォートンの解が V.E.eq. の弱解になっていない点である。

Novikov は (3.4) のかわりに

$$\omega^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}) - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{x}|^5} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \right), \quad (4.1)$$

の形のヴォートンを導入した。これを Novikov ヴォートンと呼ぶことにする。

(2.3) の第2式から

$$\operatorname{grad}(\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad}) F(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{x}|^5} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \right),$$

がえられ、したがって

$$\omega^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = (\mathbf{e} \nabla^2 - \operatorname{grad}(\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad})) F(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

である。そこで、あきらかに

$$\operatorname{div} \omega^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = ((\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad}) \nabla^2 - \nabla^2 (\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad})) F(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.3)$$

となる。

ヴォートンを電気力学の対応で考えると、仮想的に電流（渦）の微小要素を取りだし、その体積を0にしたものである。電流の微小要素を取り出すという操作を強引に行ったとすれば、電位の保存からその微小要素の（電流の向きに対して）前後に正負の電荷（渦）の湧き出しが生ずる。Novikov のヴォートンにおける新しい項は、この2重湧き出しによって生ずる電流（渦線）を表している。

Novikov のソフト・ヴォートンの渦度を

$$\omega^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = (\mathbf{e} \nabla^2 - \operatorname{grad}(\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad})) F(\mathbf{x}, \alpha), \quad (4.4)$$

で定義する。新しく加えられた項は rot をほどこすと0となるので、(4.4)を(2.1)に代入すれば、その非斉次項はソフト・ヴォートンの場合と同じになり、したがってNovikov ヴォートンによる誘導速度 $\mathbf{v}^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha)$ は

$$\mathbf{v}^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = \mathbf{v}^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha), \quad (4.5)$$

となる。また、

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}^{NV}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha) = \omega^V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \alpha), \quad (4.6)$$

となる。

ここで、ヴォートン、Novikov ヴォートンについてまとめる。ソレノイダル
の条件はNovikov ヴォートンのみ満たし、誘導速度は両者同じになり、速度の rot
をとると両者ともにNovikov ヴォートンの渦度を与える。

Saffman & MeironはヴォートンがV.E.eq. (2.2)の弱解になっていないことをしめした。ここでは、ソフト・ヴォートンを(2.2)に代入し、よい関数をそれに乘じ積分し、 $\alpha \rightarrow \infty$ にした極限の振舞をしらべる。

$f(x)$ をよい関数とすれば、

$$\begin{aligned} & \iiint f(x) \cdot ((v^V \cdot \text{grad}) \omega^V - (\omega^V \cdot \text{grad}) v^V) d^3x \\ &= - \iiint f_\phi \omega^V (\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{r \partial \theta}) v_\phi^V d^3x = \frac{\alpha}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} f_\phi(0) \\ & \int_0^\infty \exp(-\xi^2) (3\sqrt{\pi} \text{erf}(\xi) - 2\xi(3+2\xi^2) \exp(-\xi^2)) d\xi, (4.7) \end{aligned}$$

となり、 $\alpha \rightarrow \infty$ で発散する。すなわち、ヴォートン解は弱解になっていない。

最近、Winckelmans & LeonardはV.E.eq.の渦の変形(引伸し効果等)の項を書き改めて

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}) \omega - e_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (4.8)$$

とすると、(3.4), (3.5)はこの方程式の弱解になることを示した。実際、(3.11), (3.12)をこの方程式にいれど、完全に満足することがわかる。なお、擬正準形式は(4.8)をもちいなければ、導出することができない。著者の今まで行ったヴォートンの計算は、基礎方程式を擬正準形式から導いているので、弱解に導くこの渦変形の項にもとずいている。

5. エネルギー・スペクトル

$v(x), \omega(x)$ がコンパクトな台をもつ時には、これらのフーリエ変換が運動の振舞をみるのに有効である。フーリエ変換、フーリエ逆変換を

$$u(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint v(x) \exp(-ik \cdot x) d^3x,$$

$$v(x) = \iiint u(k) \exp(ik \cdot x) d^3k,$$

(5.1)

$$\bar{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \omega(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{x},$$

$$\omega(\mathbf{x}) = \iiint \bar{\omega}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{k},$$

のように定義する。 V.-I. eq. (2. 1) をフーリエ変換すると

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \frac{i}{k^2} \mathbf{k} \times \omega(\mathbf{k}), \quad (5.2)$$

k-空間におけるエネルギー密度、エネルギー・スペクトルを

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}(-\mathbf{k}), \quad (5.3)$$

$$E(\mathbf{k}) = k^2 \iint \phi(\mathbf{k}) \Big|_{|\mathbf{k}|=k} d\Omega(\mathbf{k}), \quad (5.4)$$

と定義する。 ここで $d\Omega(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}$ のまわりの立体角である。 全エネルギー $EN(t)$ は

$$EN(t) = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} = (2\pi)^3 \int_0^\infty E(k) dk, \quad (5.4)$$

となる。 次の単位ソフト・ヴォートン

$$\omega^V(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, e(1), \alpha) = e(1) (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha |\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|), \quad (5.6)$$

のフーリエ変換は

$$\bar{\omega}^V(k, x_1, e(1), \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} e(1) \exp(-ik \cdot x_1 - k^2/4\alpha_1), \quad (5.7)$$

となり、ソフト・ヴォートンからなる系の速度及びエネルギー・スペクトルのフーリエ変換は

$$u(k) = \frac{i}{(2\pi)^3 k^2} \sum_l (k \times \Omega(l)) V(l) \exp(-ik \cdot x_1 - k^2/4\alpha_1), \quad (5.8)$$

$$E(k) = \frac{1}{(2\pi)^5} (\sum_l \Omega(l)^2 \exp(-k^2/2\alpha_1) V(l)^2 + \sum_{ll'} \frac{1}{k |x_1 - x_{l'}|} \Omega(l) \cdot$$

$$\Omega(l') \sin(k |x_1 - x_{l'}|) \exp(-k^2/2\alpha_{ll'}) V(l) V(l')), \quad (5.9)$$

となる。

6. ずれた平行な2つの渦輪

初期に半径1の、中心が(0,0,0), (-1,1,0)にある、2つ同じ渦輪が(x_2, x_3)面に平行におかれている。初期には、各渦輪は20のヴォートンからなっており、渦糸の半径を0.1に、時間メッシュを0.005にとる。時間発展につれて、ひきのばされたヴォートンがあらわれるが、太さ比が0.5に達すると直ちにヴォートンを縦に分割する。それにともなう、系の特徴的時間が減少する。そこで、系の最大渦度が2倍になる毎に、時間メッシュを半分にする。ここで、最大渦度の逆数は、この系の特徴的時間である。

図1に、色々な時間における渦輪の3面図およびエネルギー・スペクトルが示してある。 $t=7.8$ まで計算を実行したが、それ以後は時間メッシュが急速に短縮するので、さらに計算を実行することは困難であった。この各ステップの渦輪の形態は、よく実態をあらわしているように思われる。エネルギー・スペクトルの k の小さい方から、最初の山は渦輪の半径、第2の山は渦糸の半径に対応していると考えられる。初期のエネルギー・スペクトルと最終ステップのそれとを比較して、 k の小さい方から大きい方へのエネルギーの流れの存在がわかる。勿論、これは非線型効果によるものであるが、結果的に見ると見掛けのエネルギー散逸があるという推論がなりたつ。なお、 V はヴォートンの体積 $V(l)$ の球の半径にとった。

7. むすび

この論文では、渦運動について、特にその特異性（ヴォートン）に焦点をあてながら、理論的および数値的立場で論じた。4節でのべたように、ヴォートン理論の困難な点は、その渦度がソレノイダルでない事と弱解が存在しないことにあった。Novikov はヴォートンの渦度をソレノイダルにするために、新しい項を付け加えたが、誘導速度は変わらない事が示された。ヴォートンは、数学的に簡単化をおこなったもので、一種の近似法である。Wickelmanns et al はV.E.eq.の渦変形の項を書きかえることによって、弱解を得ることができる事を示した。ヴォートンは本質的な特異性ではなく、近似法にもとづくものであり、ヴォートンの中心まで数学的議論を適用するのは間違えである。結論的にいうと、(4.8)の形のV.E.eq.を離散化し、特性長さ、特性時間に応じて、ヴォートンの分裂、時間メッシュの細分化を行えば、ヴォートン法は3次元渦運動に対してよい近似法である。

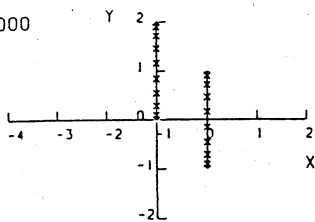
参考文献：

- 1) M.J.Aksman, E.A.Novikov and S.A.Orszrg: Phys. Rev. Lett. 54 (1985)2410.
- 2) J.T.Beale, T.Kato and J.Majda: Comm. Math. Phys. 94 (1984) 553.
- 3) J.T.Beale and J.Majda: Comm. Math. Computation 39 (1983) 1.
- 3) J.T.Beale and J.Majda: Comm. Math. Computation 39 (1983) 29.
- 4) A.J.Chorin: Comm. Math. Phys. 83 (1982) 517.
- 5) S.Kuwabara: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP2 (1985) 15.
- 7) S.Kuwabara: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP3 (1985) 31.
- 8) 桑原真二：第17回乱流シンポジウム講演論文集 (1985) 145.
-) S.Kuwabara: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 4881.:
- 10) S.Kuwabara: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP4 (1986) 11.
- 11) S.Kuwabara: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP5 (1987) 23.
- 12) 桑原真二：数理研講究録 601 (1986) 99.
- 13) 桑原真二：第18回乱流シンポジウム講演論文集 (1986) 145.
- 14) S.Kuwabara: Fluid Dynam. Res. 3 (1988) to appear.
- 15) E.A.Novikov: Soviet Phys., JETP 57 (1983) 566.
- 16) P.G.Saffman: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981) 149.
- 17) G.Winckelmanns and A.Leonard: Phys. Fluids 31 (1988) 1838.

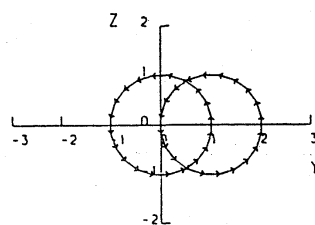
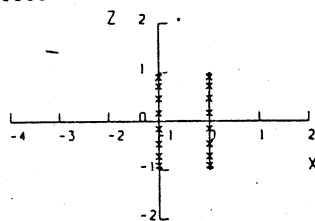
$T = 0.0000000$

$NV1 = 20$

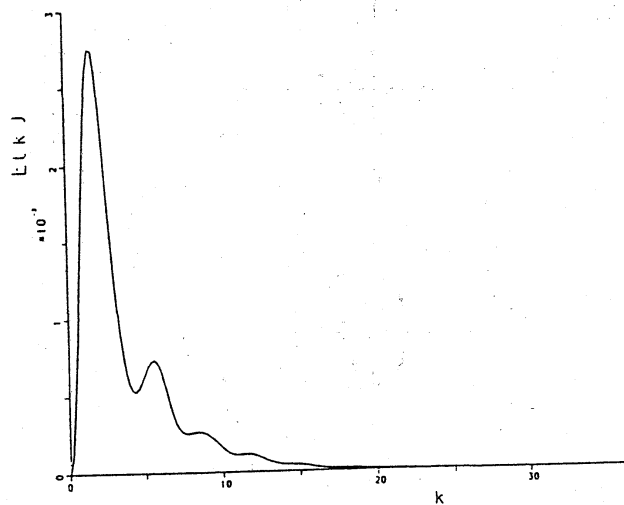
$NV2 = 20$



$\Delta T = 0.0040000$



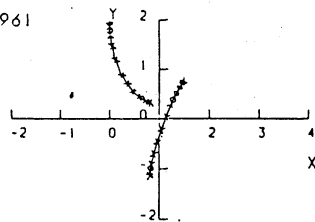
$T = 0.0000000$



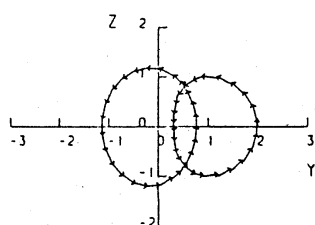
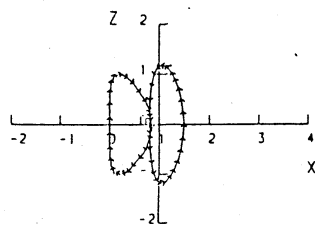
$T = 3.9999961$

$NV1 = 25$

$NV2 = 24$



$\Delta T = 0.0040000$



$T = 3.9999961$

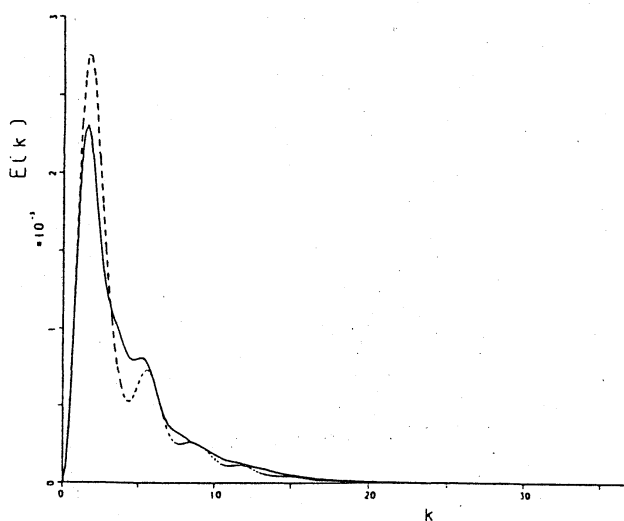
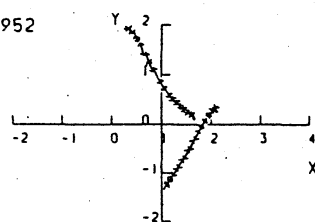
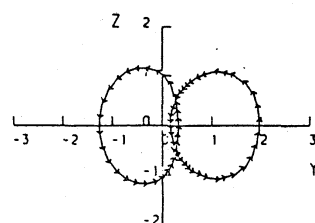
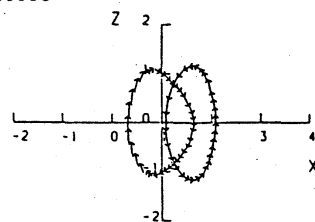


図1. ずれた平行な渦輪の時間発展の3面図とエネルギー・スペクトル。
スペクトルの図で、点線は初期のスペクトル。

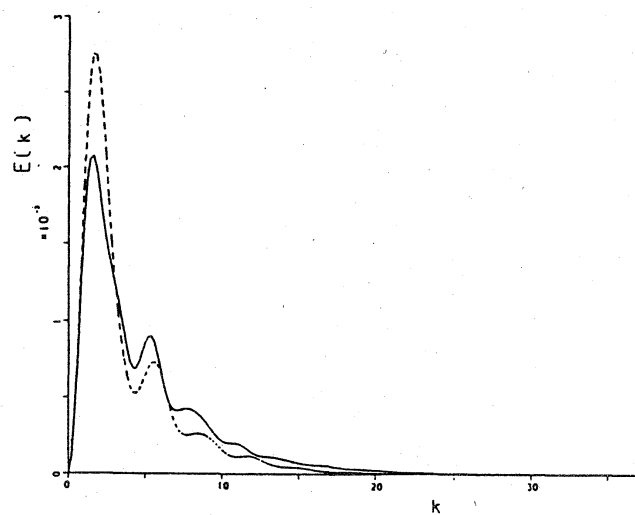
$T = 5.9999952$
 $NV1 = 30$
 $NV2 = 35$



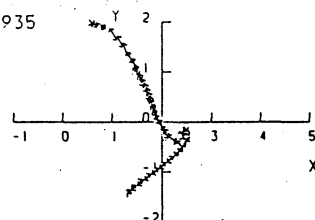
$DT = 0.0020000$



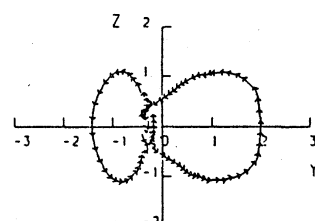
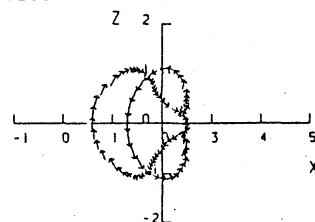
$T = 5.9999952$



$T = 7.7999935$
 $NV1 = 45$
 $NV2 = 50$



$DT = 0.0001250$



$T = 7.7999935$

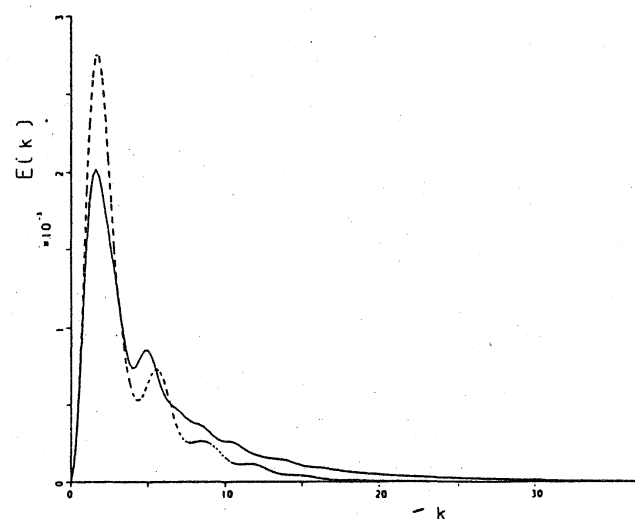


図1 (続き)