

On the projectively minimal hypersurfaces

熊本大 理 佐々木 武 (T. Sasaki)

1. 射影極小曲面とは

\mathbb{R}^3 内の曲面 S が極小とはよく知られていりよ
うに, S についての汎函数

$$\int_S dA$$

が S で critical, ということだ。面積要素 dA の定
義から当然のことであるが, この積分は euclid 運動によ
って変らない。では, \mathbb{R}^3 のかわりに射影空間 \mathbb{P}^3 ,
euclid 運動群のかわりに射影変換群を考へるとき, 事
柄はどうなるであろうか。ここで注意すべきことが, 群の次
元が大変大きくなることである。ところが, この群について
も, 不変な2次微分形式 = 射影面積要素 dP がつく
れることが昔から知られていて ([Bla]) だから汎函数

$$\int_S dp$$

を考へるべきが可能となり, euclid の場合と同様に critical な曲面として射影極小曲面を定義することができ。これは一体どういうものかというのが, 実は射影微分幾何とよばれる分野のテーマの1つである。([Tho], [Bol])

ここでは, 射影極小曲面を定める微分方程式をこれほどは少し違ふ形で求め, いくつかの例を考へること, 大域的な結果として楕円面の特徴付けを考へることにする。

2. 射影曲面種要素の定義

一般に \mathbb{P}^{n+1} 内の超曲面 M^n を考へよう。 M はその上の点の運動の結果として得られると考へると都合がよい。局所的には $\mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ に lift して考へる。 $e_0: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ とおき込みとしよう。各点 $e_0(p)$ での接ベクトルを $e_1(p), \dots, e_n(p)$ とする。 $e_{n+1}(p)$ と e_0, e_1, \dots, e_n とは独立なベクトルと考へる。これらの組 $e = {}^t(e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ を点 p での射影枠 (proj. frame) とする。 e_0 のとり方が "scalar

この教習を除いては定まらないように e の取り方は不定
 であるが、その不定性は群

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ e & a & 0 \\ \mu & c & \nu \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} n \\ \} 1 \end{matrix} \quad \text{aut } g = 1 \right\}$$

にはいることはみやう。あるゆえ別の frame は ge と
 得られる。以下 g による量を定義することを目的
 である。

$e = (e_\alpha)$ は次の運動方程式とみらる。

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

(慣用によつて上下対称に indices について記号と
 するものとする。index の範囲は $0 \leq \alpha, \beta \dots \leq n+1$,
 $1 \leq i, j, \dots \leq n$ と区別する) $\omega = (\omega_\alpha^\beta)$ は
 $\mathfrak{sl}(n+2)$ に値をとる 1 次微分式で "Maurer-Cartan form"
 とよばれる。それは完全積分条件

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

とみらる。frame (e_α) と別の frame (\tilde{e}_α) による
 こと

$$(\tilde{e}_\alpha) = g(e_\alpha), \quad d\tilde{e} = \tilde{\omega} \tilde{e}$$

$$\tilde{\omega} = dg \cdot g^{-1} + g \omega g^{-1}$$

と変化する。 $= = \tau$,

$$\omega_0^{n+1} = 0 \quad \text{及} \quad \omega^i$$

$$\{\omega_0^1, \dots, \omega_0^n\} \quad \text{は} \quad 1\text{-次独立}$$

に注意しよう。最初の式より

$$0 = d\omega_0^{n+1} = \omega_0^i \wedge \omega_i^{n+1}$$

である。仮定的に $\omega^i = \omega_0^i$ とかくと、これらの1次独立性により

$$\omega_i^{n+1} = h_{ij} \omega^j, \quad h_{ij} = h_{ji}$$

とかけ、さしは "テンソル" h_{ij} の共変微分と

$$h_{ijk} \omega^k = dh_{ij} - h_{ik} \omega_j^k - h_{kj} \omega_i^k + (n+2)(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1}) h_{ij}$$

により定める。 (h_{ijk} は対称) とし

$$F = \|h_{ijk}\| = (h_{ijk} h_{pqr} h^{ip} h^{jq} h^{kr})^{1/2}$$

と置く。 $r=i, s=j$ $(h^{ij}) = (h_{ij})^{-1}$ 。 すると

(1). 2次形式 $h_{ij} \omega^i \omega^j$ 及 3 次形式 $h_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k$ は
scalar 倍を除いて e のとり方によらない。

ことがわかり、" $h_{ij} \omega^i \omega^j$ が退化しない" という性質は射影的性質である。以下 e を仮定しよう。(これは曲面の通常の意味での第2基本形式が退化しないことと同義) ことに

(2). $F^2 h_{ij} \omega^i \omega^j$ は曲面上の不変2次形式である。

これが示される。従って

$$dP = F^n (\det h_{ij})^{1/2} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$$

は e のとり方によらぬ体積要素となる。これから射影極小性が定義されるのは直の通り。ただし、一般には $F \neq 0$ とは限らぬ、 $F = 0$ となる $t = 3$ で、 dP は退化してしまふ。恒等的に $F = 0$ となるのは曲面が二次曲面になるべきであることと注意しておこう。

B. 微分方程式

次に M_t と (局所的) 曲面 M の変形としよう。

t はパラメーター。 $M_0 = M$ 。方程式

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} dP \Big|_{t=0} = 0$$

を M の幾何的台量を使って書きなおしたい。その為、(かつ便宜的に) $\omega_0^\alpha = 0$ となる frame ととることにし(いつも可能)

$$h_{ij} \omega_{n+1}^j =: l_{ij} \omega^j$$

とおく。 l_{ij} は好称であり "affine 平均曲率" とよばれてゐる。長々計算の結果わかることは、

(3). $n=2$ のとき, M が射影極小とは微分方程式

$$(\#) \quad \Delta l = \|l_{ij} - l h_{ij}\|^2$$

が成り立つことである。 $r=r \cup l = \frac{1}{2} \text{trace}_g l_{ij}$,

Δ は $h_{ij} \omega^i \omega^j$ についてのラプラシアンである。

$n \geq 3$ では方程式の形はもっと複雑になる。その性質を述べるため, $(h_{ij}) > 0$, i.e. M が局所的に強い意味で凸, 且 affine を標 (x^1, \dots, x^{n+1}) によつて $\{x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\}$ とかけられている。このとき

$$h_{ij} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad (\lambda \text{ is scalar})$$

であり, l_{ij} は f の 4 次までの微分を用いて表わされる。従つて方程式 $(\#)$ は f についての 6 階の楕円型非線形方程式となる。主要部は triply harmonic である。 $n \geq 3$ では 6 階楕円性は変じないが, 主要部は少し複雑になる。

4. 射影極小超曲面の列

(#) 式の右辺に現れる作用素 $l_{ij} - l h_{ij}$ は幾

何の意味が知られていいる。右の方程式

$$L_{ij} = \lambda h_{ij}$$

を満たす曲面は affine 球面と呼ばれる曲面に等しい。

euclid の場合は, L_{ij} を shape operator, h_{ij} を metric tensor と見ると上式は euclid 球面を定めていいる = ことからきこえる。一方, affine 球面について

はよく知られていいる ([Ca1], [Pog], [Sas])。このことから

(4). $m=2$ なら affine 球面は射影極小である。

及び

(5). \mathbb{P}^3 内の 射影極小な凸な曲面は楕円面に限る。

が示される。 $n \geq 3$ では方程式の性質が少し変ると述べておこう。 affine 球面だからといって射影極小とは限らない。「affine 球面から affine 変換群による等質であり, 計量 $h_{ij}(\omega, \omega)$ が einstein であるならば射影極小である」ことが証明できる。この典型例が $\{x^1, \dots, x^{n+1} = 1\}$ で与えられる曲面である。

次の問題とあげておきたい。

問. $n \geq 3$ のとき (5) を示せ。

この問題には affine 版がある。[Ca2] と参照して
 頂きたい。幾何にあらわれない非球面の面白問題と
 思う。

そのほかの(余り多くはない)例, 及び省略し
 た計算については [Sas2] とごらん頂きたい。

- [Bla] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer 1923
- [Bol] G. Bol, Projektive Differentialgeometrie 1-3, Vandenhoeck & Ruprecht
 1950-1967.
- [Ca1] E. Calabi, Complete affine hyperspheres, Symp. Math. 10(1972), 19-38.
- [Ca2] E. Calabi, Hypersurfaces with maximal affinely invariant area, Amer.
 J. Math. 104(1982), 91-126.
- [Pog] A.V. Pogorelov, On the improper convex affine hyperspheres, Geom. Ded.
 1(1972), 33-46.
- [Sas1] T. Sasaki, Hyperbolic affine hyperspheres, Nagoya Math. J. 77(1980),
 107-123.
- [Sas2] T. Sasaki, On a projectively minimal hypersurface in the unimodular
 affine space, Geom. Ded. 23(1987), 237-251.
- [Tho] G. Thomsen, Sulle superficie minime proiettive, Ann. di Math. (IV) 5
 (1928), 169-184.