数理解析研究所講究録
680巻 1989年 232-239

Optimal Search Model with a Compulsive Stop for a Randomly Arriving Target

阪大基礎工　中井暉久（Teruhisa Nakai）

1. Model and Formulation

targetが1個、時刻T_1に到着し、到着したらn個のboxの1つに入り、以後そこに留まる。T_1は区間$[0, \infty)$上の分布関数$G(t)$に従う確率変数である。またtargetがbox $i(=1, \cdots, n)$に入る確率はp_iで$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$とする。searcherは時間区間$[0, \infty)$の任意の時刻に任意のboxを探索できるが、探索時間の合計は$T(<\infty$, given$)$を越えることができない。targetがbox $i(=1, \cdots, n)$にいる時、box iをt時間探索すれば、確率$1-e^{-\lambda_i t}$（λ_iは所与正定数）でそのtargetを発見する。一方、時間区間$[0, \infty)$上の分布関数$F(t)$に従う時刻T_2で強制的にstopがかかり、以後探索ができなくなるものとする。従って、探索が早すぎると、まだtargetが到着していない可能性が大きいし、遅すぎるとすぐ強制stopがかかって探索できな

くなる恐れが大きい。では、targetを発見する確率を最大にするには、いつどのboxをいくらの割合いで探索すべきか？

search policyは $\phi=\{\phi_i(t)\mid i=1,\cdots,n\ ;\ 0\le t<\infty\}$ で表される。ここに $\phi_i(t)$ は時刻 t でbox i をsearchする割合いで、つぎの３条件を満たす。

(1)　(i) $\phi_i(t)\ge 0 \qquad (i=1,\cdots,n\ ;\ 0\le t<\infty)$

(2)　(ii) $\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\le 1 \qquad (0\le t<\infty)$

$1-\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)$ は、時刻 t でどのboxをも探索しない確率である。

(3)　(iii) $\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \phi_i(t)\,dt\le T$

$P[\phi]$ をpolicy ϕ を用いた時のtargetを発見する確率とする。

(4) $$P[\phi]=\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^\infty \lambda_i\phi_i(t)\bar{F}(t)\int_0^t \exp\left[-\lambda_i\int_s^t\phi_i(u)\,du\right]dG(s)\,dt$$

ただし $\bar{F}(t)\equiv 1-F(t)$ である。問題は制約(i)～(iii)のもとで目的関数 $P[\phi]$ を最大にする $\phi=\phi^*$ を求めることである。

つぎのspecial casesは容易に結果が出る。

(i) targetが確率1である時刻 t_0 で到着するなら、t_0 から T 時間の間、stopのない通常の探索モデルに対する

最適政策に従うのが optimal である。

(ii) 強制 stop がない場合 ($F(t)=0$ for $^\forall t<\infty$) は、$G(\tilde{t})=1$ なる時刻 $\tilde{t}$ を待ってから、T時間通常の探索モデルに対する最適政策に従うのが optimal である。$G(\tilde{t})=1$ であるような $\tilde{t}(<\infty)$ が存在しない時には漸近最適政策は存在するが最適政策は存在しない。

2. Necessary and Sufficient Condition for an Optimal Policy

policy ϕ に対し、つぎの関数を定義する。

$$(5)\quad K_i(t;\phi)\equiv p_i\lambda_i\bar{F}(t)\int_0^t \exp\left[-\lambda_i\int_s^t \phi_i(u)\,du\right]dG(s)$$
$$-p_i\lambda_i^2\int_t^\infty \phi_i(w)\bar{F}(w)\int_0^t \exp\left[-\lambda_i\int_s^w \phi_i(u)\,du\right]dG(s)\,dw$$

定理1. policy ϕ^* が optimal である

$\Longrightarrow$ ある関数 $\mu(t)$ が存在して

$$(6)\qquad K_i(t;\phi^*)\begin{Bmatrix} = \\ \leq \end{Bmatrix}\mu(t)\qquad \text{if}\quad \phi_i^*(t)\begin{Bmatrix} > \\ = \end{Bmatrix}0$$

i.e. 探索すべき box では $K_i(t;\phi^*)$ が最大になっている。

定理1は探索理論ではよく現われる型の(最適政策の)必要条件ではあるが、十分条件にはなり得ない。(例えば 1-box case では、任意の policy ϕ に対し、$\mu(t)=K(t;\phi)$ とおくと

(6)式が成立するから、任意の政策が最適となってしまう.)

定理2. ϕ^* は policy であるとする.

ϕ^* が optimal である.

$\Longleftrightarrow$ ある定数 μ が存在して

$$(7)\qquad \phi_i^*(t)=\begin{Bmatrix} 1 \\ \text{適当} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{if}\quad K_i(t;\phi^*)\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix}\mu$$

ここに"適当"の値と μ とは $\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \phi_i^*(t)\,dt=T$ を満たすように任意に決められるものである。

定理2の意味

(8) $K_i(t;\phi)=p_i\lambda_i\pi_i(t;\phi)$ とおくと

$\pi_i(t;\phi)=$ 到着すれば box i に入るとの条件のもとで、target が t迄に到着し、t迄 stop もかからず発見もされないで、t以後も発見されない確率

を表している。そこで

(9) $p_i(t;\phi)\equiv p_i\,\pi_i(t;\phi)\Big/\sum_{j=1}^{n}p_j\pi_j(t;\phi)$ for $^\forall i$, $^\forall t$

とおくと

$p_i(t;\phi)=$ target が t迄に到着し、t迄 stop もかからず発見もされないで、t以後も発見されないという条件のもとで、target が box i に存在する確率

となる。このとき

(10) $K_i(t;\phi) \propto p_i(t;\phi)\lambda_i$

（右辺は、時刻 t における box i での条件付発見率）

であるから、定理2は大雑把につぎのことを示している。

「policy が最適である為の必要十分条件は、各時刻で条件付発見率がある一定値以上の box のみを探索することである。」

これは、Brown (1980) が、移動目標物、離散時間のモデルで示したのと類似の内容である。

3. Approximately Optimal Policy

policy $\phi=\{\phi_i(t)\}$ は total search time T の関数だから、これを $\phi^T=\{\phi_i^T(t)\}$ と表すことにする。

定理3. 任意の i, t に対し、最適政策 $\phi_i^T(t)$ は T に関する非減少関数である。

☆ Algorithm for an Approximately Optimal Policy

(i) m を十分大きくとり、$\Delta \equiv T/m$ とおけ。

(ii) $\phi_i^0(t)\equiv 0$ for $^\forall i$, $^\forall t$ とおき、第1 step から始めよ。

(iii) 第 $k\,(=1,\cdots,m)$ step では、

(11) $$\mu_k \equiv \sup\left\{\mu \,\middle|\, \int_{\{t \mid K(t;\phi^{k-1})\geq\mu\}} dt \geq k\Delta\right\}$$

(12) where $K(t;\phi^{k-1}) \equiv \max_{1\le j\le n} K_j(t;\phi^{(k-1)\Delta})$

とおき、集合Sをつぎの２条件

(13) (a) $S \subset \{t \mid K(t;\phi^{k-1}) = \mu_k\}$

(14) (b) $\displaystyle\int_{\{t \mid K(t;\phi^{k-1}) > \mu_k\} \cup S} dt = k\Delta$

を満たすように任意にとり、policy $\phi^{k\Delta}$をつぎのように定義せよ。

$$(15)\quad \phi_i^{k\Delta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } K_i(t;\phi^{(k-1)\Delta}) = K(t;\phi^{k-1}) \\ & \quad \text{and } t \in \{t \mid K(t;\phi^{k-1}) > \mu_k\} \cup S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iv) $k \begin{Bmatrix} < \\ = \end{Bmatrix} m \Longrightarrow$ {第$(k+1)$ step へ進め. / stop せよ。$\phi^{m\Delta}$が求める近似解である。}

4. One-Box Case ($n=1$)

このとき、問題はつぎのようになる。

$$(16)\quad \begin{cases} P[\phi] = \displaystyle\int_0^\infty \lambda\phi(t)\bar{F}(t)\int_0^t \exp\left[-\lambda\int_s^t \phi(u)du\right] dG(s)\,dt \longrightarrow \max_\phi \\ \text{subject to} \\ \displaystyle\int_0^\infty \phi(t)dt \le T, \qquad 0 \le \phi(t) \le 1 \quad \text{for } ^\forall t \in [0,\infty) \end{cases}$$

定理４．$n=1$の時、つぎのように定義される policy ϕ^*は optimal である：

(17) $$\mu^* \equiv \sup\left\{\mu \,\middle|\, \int_{\{t \mid \lambda \bar{F}(t) G(t) \geq \mu\}} dt \geq T \right\}$$

とおき、集合Sを2条件

(18) (a) $S \subset \{t \mid \lambda \bar{F}(t) G(t) = \mu^*\}$

(19) (b) $$\int_{\{t \mid \lambda \bar{F}(t) G(t) > \mu^*\} \cup S} dt = T$$

を満たすように任意にとる。この時、policy ϕ^* を

(20) $$\phi^*(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } t \in \{t \mid \lambda \bar{F}(t) G(t) > \mu^*\} \cup S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する。

〈Example〉

$n = 1$, λとTは任意とする。

(21) $$G(t) = \begin{cases} 1/2 & (0 \leq t < 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq t) \end{cases}, \qquad F(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & (1 \leq t) \end{cases}$$

のcaseを考える。このとき

(22) $$\lambda \bar{F}(t) G(t) = \begin{cases} \lambda(1-t)/2 & (0 \leq t < 1/2) \\ \lambda(1-t) & (1/2 \leq t \leq 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases}, \qquad \mu^* = \frac{\lambda}{6}(3-2T)$$

であるから、定理4よりoptimal policyはつぎのように与えられる。

$0 \leq T \leq 3/4$ のとき

(23) $$\phi^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in \left[0, \frac{2T}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{T}{3}\right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$3/4 \leq T$ のとき

(24) $$\phi^*(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T < t) \end{cases}$$

[注] (i) optimal policy は λ に関係しない.

(ii) optimal search time region が connected にならないことがある。

References

[1] A. Barnett; Opns. Res., Vol. 24 (1976), No. 3, 438–451

[2] N. M. Blachman; Nav. Res. Log. Quart., Vol. 6 (1959), 273–281

[3] N. M. Blachman and F. Proschan; Opns. Res., Vol. 7 (1959), No. 5, 625–638

[4] K. Chelst; Nav. Res. Log. Quart., Vol. 28 (1981), No. 3, 407–422

[5] T. Nakai; J. Opns. Res. Soci. Japan, Vol. 25 (1982), No. 2, 175–192

[6] S. M. Pollock; Manag. Sci, Vol. 13 (1967), No. 7, 454–465

[7] L. D. Stone; Math. Prog. Study, Vol. 6 (1976), 227–245