数理解析研究所講究録
681巻 1989年 123-139

有限モノドロミー群をもつ一般化された超幾何方程式

都立大・理　佐々井崇雄 (Takao Sasai)

§1. 次の様な大久保typeの微分方程式を考える：

(#)　$(tI-B)\frac{dx}{dt}=Ax$.

ここで、$t\in S$ (Riemann球)、$x={}^t(x_1,\cdots,x_n)$ で、

$$B=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \\ & & & 1\end{pmatrix},\quad A=\left(\begin{array}{ccc|c}-a_1 & & 0 & 1\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & -a_{n-1} & 1\\ \hline b_1 & \cdots & b_{n-1} & -a_n\end{array}\right)\in \mathcal{M}(n,\mathbb{C}),$$

即ち、A、B共に$n\times n$の定数行列である。更に、以下の2条件を仮定する。

(A-1)　Aはnケの相異なる固有値；$-\rho_1,\cdots,-\rho_n$をもつ。

(A-2)　$a_i,\ a_j-a_k,\ \rho_\ell-\rho_m\notin\mathbb{Z}$ & $\rho_\ell\notin\mathbb{N}$。ただし、$i,\ell,m=1,2,\cdots,n$；$j,k=1,2,\cdots,n-1$である。

仮定(A-2)により、(#)は対数解を持たない。今、

$$e_j=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,a_j),\quad f_j=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\rho_j)$$

とする。

Lemma 1. (#)は$t=0, 1, \infty$を確定特異点にもつFuchs型方程式であり、それぞれの点に於ける特性指数は

$$(-a_1, \cdots, -a_{n-1}, 0) \quad \text{at } t=0,$$

$$(0, \cdots, 0, -a_n) \quad \text{at } t=1,$$

$$(\rho_1, \cdots, \rho_n) \quad \text{at } t=\infty,$$

である。

Lemma 2 (Riemann-Fuchsの関係式).

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \rho_j \quad \text{従って、} \quad \prod_{j=1}^{n} e_j = \prod_{j=1}^{n} f_j .$$

次の定理も容易に示される.

Theorem 3.

$$b_j = -\frac{\prod_{k=1}^{n} (\rho_k - a_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (a_k - a_j)} \quad (j=1, 2, \cdots, n-1).$$

Remark. (#)に此のb_jを代入して、$x_1, \cdots, x_{n-1}$を消去し、更に$x = x_n$とおく。$\delta = t(d/dt)$とすると、xは

$$[\delta(\delta+a_1-1)\cdots(\delta+a_{n-1}-1) - t(\delta+\rho_1)\cdots(\delta+\rho_n)]\, x = 0$$

となる微分方程式をみたし、$t=0$での正則な解として

$${}_nF_{n-1}(\rho_1, \cdots, \rho_n ; a_1, \cdots, a_{n-1} ; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho_1)_k \cdots\cdots (\rho_n)_k}{(a_1)_k \cdots (a_{n-1})_k\, k!} t^k$$

をもつ。ただし、$(\rho)_k$ は2項係数である。

又、大久保typeの方程式に対する基本定理は次の様に述べられる。

<u>Theorem 4</u> (Gauss-大久保の公式)。$t=0,1$ のまわりで、特性指数 $-a_j$ に対応する(#)の解

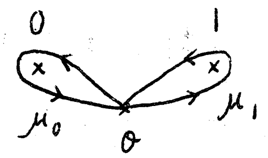
$$\begin{cases} X_j(t) = t^{-a_j}\sum_{m=0}^{\infty} g_j(m)t^m, & j=1,2,\cdots,n-1 \\ X_n(t) = (t-1)^{-a_n}\sum g_n(m)t^m \end{cases}$$

が存在する。ただし、$g_j(0)$ は、第 j 成分のみ1で他は0であるn-ベクトル。更に $S^* = S\setminus\{0,1,\infty\}$ 上の単連結領域に於いて、これらのWronskianは

$$\det X = \det[X_1,\cdots,X_n] = \left[\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(1-a_j)}{\Gamma(1-\rho_j)}\right] t^{-(a_1+\cdots+a_{n-1})}(t-1)^{-a_n}.$$

この定理と(A-2)により、$X_1,\cdots,X_n$ の一次独立性が分る。

さて、点 $\theta\in S^*$ を一つ固定し、θ を基点とするloop μ_0、μ_1 を図の様に取る。従って $\mu_\infty = \mu_1\cdot\mu_0$ (μ_0 を先に行き、次に μ_1)は、$t=\infty$ の回りを負の向きに1周するloopである。



Theorem 4により、これら μ_0,μ_1 に対応するcircuit行列は、それぞれ M_0, M_1 とすると、

$$M_0 = I + \begin{pmatrix} e_1 - 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & e_{n-1}-1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & & & (e_1-1)p_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & e_{n-1} & (e_{n-1}-1)p_{n-1} \\ & & & 1 \end{array} \right),$$

$$M_1 = I + (e_n - 1) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline q_1 \cdots q_{n-1} \; 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \\ \hline (e_n-1)q_1 & \cdots (e_n-1)q_{n-1} & e_n \end{array} \right)$$

の形をとる事が分る。今、Theorem 4 で述べた基本解 X に関するモノドロミー群を G で表わす。もし G を explicit に、即ち p_j、q_j をキチッと求めれば、それは接続係数を決めた、という事で、この方程式(generalized hypergeometric equation；今後 GHGE と略)については大久保[2]によって求められた([4]も参照)。一般の方程式について、接続係数をキチッと計算するのは難しいが([1],[8]及びその reference 中の文献参照)、G の群としての構造を知る為には、以下の様な結果で十分であり、又計算する上でも便利である。即ち、各解 X_j を 0 でない定数倍、従って、non-singular な対角行列 D による X の変換 XD を基本解に取り直すと、対応するモノドロミー群は $D^{-1}GD$ となる。これは群を決める際に $n-1$ の自由度を与えてくれるが、GHGE の場合、結果は次の様になる。

Theorem 5 (大久保-高野[3]). (#)のモノドロミー群は、次の式で定まる。

$$p_j q_j = -\frac{\prod_1^n (e_j - f_k)}{e_j(e_j-1)(e_n-1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(e_j - e_k)}$$

$$= -\frac{\prod_1^n \sin(a_j - \rho_k)\pi}{\sin a_j\pi \sin a_n\pi \prod_{k\neq j}^{n-1} \sin(a_j - a_k)\pi}.$$

Remark. GはXに関するモノドロミー群と定義したが、今述べた様に、$2(n-1)$ケのp_j, q_jがある中で、$n-1$ケを任意に指定し、他の$n-1$ケはこの定理をみたすよう取ることで定まる行列を改めてM_0, M_1と書き、それによって生成される、元のGと同型な群$\langle M_0, M_1\rangle$を、やはりGと表わすことにする。

§2. GHGEの既約性判定条件を述べるが、詳しい証明は[5]を見て頂きたい。

Theorem 6. Gが既約である為の必要十分条件は、以下の2条件が成立することである。

(1) $e_j \neq f_k$.

(2) $f_k \neq 1$.

$(j=1,2,\cdots,n-1;\ k=1,2,\cdots,n)$

言い換えれば、$a_j - \rho_k,\ \rho_k \notin \mathbb{Z}$である。

Remark. 既に(A-2)によって$\rho_k \notin \mathbb{N}$である。ρ_kが負の整数になるのは、2ページのRemarkにより、対応する${}_nF_{n-1}$が多項式

になる場合である。

§3. 今後、(♯)に対する条件(A-1)、(A-2) に加えて、<u>そのGは既約である</u>、という仮定の元に話しを進める。

今、行列 M_{0j} $(j=1,2,\cdots,n-1)$ を

$$M_{0j}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & e_j & & \vdots \\ & & & (e_j-1)p_j \\ & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)\cdots j\text{行目}$$

と定義すると、これは *generalized reflection* と呼ばれるものだが、明らかに $M_{0j}\cdot M_{0k}=M_{0k}\cdot M_{0j}$ であり、$M_0=M_{01}\cdot\cdots\cdot M_{0,n-1}$。$G=\langle M_0, M_1\rangle$ であるが、群 $\tilde{G}$ を

$$\tilde{G}=\langle M_{01},\cdots,M_{0,n-1},M_1\rangle$$

とすると、G は当然 $\tilde{G}$ の部分群であり、G の既約性から $\tilde{G}$ も既約である。又、当然だが、$n\geqq 3$ を仮定する。

以上の設定の元で、次の予想を想い起こそう。

<u>Conjecture</u>(大久保). もし G が有限群ならば、$\tilde{G}$ も有限群であろう。

この予想の故に、本稿では<u>$\tilde{G}$ が有限群となる case を決定しよう</u>、というのが今後の目標である。$\tilde{G}$ が有限であれば、G は当然有限群であり、従って(♯)の解は代数函数から成り、a_j,

$\rho_j \in \mathbb{Q}$ である。更に(A-2)及び既約性、そしてM_0, M_1に現われるのはe_j, f_jであるから、

(*) $\quad 0 < a_j, \rho_j < 1$

として良い。加えて、$\tilde{G}$が有限ならば、それは有限なunitary reflection groupでなければならず、よってShephard-Todd[6](以後S-Tと略)の分類が使える。分類表の番号(S-T number)を$\langle\langle \cdot \rangle\rangle$で書くことにする。

まず仮定の(A-2)より、$a_1 = \cdots = a_{n-1} = \frac{1}{2}$ではあり得ない。この事からS-T number $\langle\langle 2 \rangle\rangle$の内の$G(m,1,n)$、及び$\langle\langle 25 \rangle\rangle$, $\langle\langle 26 \rangle\rangle$, $\langle\langle 32 \rangle\rangle$のみが可能性を持つ。$G(m,1,n)$では1つを除いて、他の$a_j = \frac{1}{2}$であるから、再び(A-2)により、$n=3$に限る。4次元の$\langle\langle 32 \rangle\rangle$では、$a_j$は$\frac{1}{3}$又は$\frac{2}{3}$に限るから、これも(A-2)によって不可。以上まとめると、$n=3$の場合のみ可能で、それは

$$G(m,1,3), \ \langle\langle 25 \rangle\rangle, \ \langle\langle 26 \rangle\rangle$$

という事になり、generalized hypergeometric function(以後、GHGFと略)${}_3F_2$という、最も重要なclassにのみ可能性がある事になった。ただし、以上で$m \geq 3$。

さて、ここで又、(#)のモノドロミー群Gについて、G-不変なエルミート行列に関する結果を思い出そう([2], Chapter III)。

$$h = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & p_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & p_{n-1} \\ \hline q_1 & \cdots & q_{n-1} & 1 \end{array}\right)$$

と、h を定義する。

<u>Theorem 7</u>. 今、$H = h^{-1}$ が存在し、しかも H がエルミート行列であれば、H は G-不変である、即ち $\forall g \in G$ に対し $gHg^* = H$。

$\det h = 1 - \sum_{i}^{n-1} p_j q_j$ であるが、一方、容易に示される様に、

$$\det h = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - f_j}{1 - e_j}$$

である。従って Theorem 7 は今の場合、以下の様に述べられる。

<u>Theorem 8</u>. $f_j \neq 1$ かつ $p_j q_j = |p_j|^2 = |q_j|^2 \geqq 0$ が成立するならば、$H = h^{-1}$ が存在し、それは G-不変なエルミート行列である。

$\tilde{G}$ が有限な場合に戻ると、その時 G も有限であるから、H は正定値でなければならず、しかも Theorem 8 より、それは対称行列であり、当然 $\tilde{G}$-不変でもある。更に既約性の仮定も加えて、$p_1 q_1, p_2 q_2 > 0$ ($n = 3$ 故) が分る。$n = 3$ の時の Theorem 5 を再び書いておこう。

$$p_1 q_1 = -\frac{\sin(a_1 - \rho_1)\pi \cdot \sin(a_1 - \rho_2)\pi \cdot \sin(a_1 - \rho_3)\pi}{\sin a_1 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_1 - a_2)\pi},$$

$$p_2 q_2 = -\frac{\sin(a_2 - \rho_1)\pi \cdot \sin(a_2 - \rho_2)\pi \cdot \sin(a_2 - \rho_3)\pi}{\sin a_2 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_2 - a_1)\pi}.$$

今、$a_1 < a_2$, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ として一般性を失なわない。(*)より

$0 < a_2 - a_1 < 1$, $-1 < a_j - \rho_k < 1$ に注意すると、$\rho_1 q_1, \rho_2 q_2 > 0$ より

$$\begin{cases} (a_1-\rho_1)(a_1-\rho_2)(a_1-\rho_3) > 0 \\ (a_2-\rho_1)(a_2-\rho_2)(a_2-\rho_3) < 0 \end{cases}$$

となり、結局、Lemma 2 も合わせて、

$$(**) \qquad \begin{cases} \rho_1 < a_1 < \rho_2 < a_2 < \rho_3 \\ \rho_1 < a_3 < \rho_3 \end{cases}$$

でなくてはならない。

ここで finite reflection group に関する大事な結果を述べておこう。今、G を $\mathbb{C}^n$ の non-singular な線型変換から成る群とし、$\mathbb{C}^n$ 上の多項式 f に対する $g \in G$ の作用を

$$(gf)(v) \overset{\mathrm{def}}{=} f(g^{-1}v) \quad (v \in \mathbb{C}^n)$$

と定める。更に R を G-不変な多項式全体の集合、即ち、

$$R = \{ f ; gf = f \text{ for } {}^\forall g \in G \}$$

とすると、まず次の良く知られた結果が成り立つ。

<u>Theorem</u> (Chevalley). G を finite reflection group とすると、R は n ケの代数的に独立な斉次多項式 $f_1, \cdots, f_n$ で生成される。更に、$d_i = \deg f_i$ $(d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n)$ とすると、$\{d_1, \cdots, d_n\}$ は生成元 f_i の選び方によらず一意的に決まる。

この d_i を G の <u>degree</u> という。S-T[6] では $d_i - 1$ を G の exponent と呼んでいる。この量は重要で、例えば G の位数

$|G|=\prod_{i=1}^{n} d_i$ となる。さて、$\zeta\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ を $\zeta^d=1$、即ち 1 の巾根で、従って $\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\alpha/d)$ と表わす。この時、

<u>Theorem 9</u> (Springer [7]). ζ を固有値に持つ G の元 g が存在する為の必要十分な条件は、d がある degree d_i を割り切る、即ち、$d\,|\,d_i$ である。

次に、可能性をもつ3つの場合について、行列の位数に関してどのような性質が成り立たねばならないか、S-T [6] の結果から抜き書きしておこう（S-T の table 参照）。

((25))：M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 $=3$.

$M_{01}\cdot M_{02}$, $M_1\cdot M_{01}$, $M_1\cdot M_{02}$ の位数 $=2, 3, 4$ 又は 6.

((26))：M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 $=2$ 又は 3.

$M_{01}\cdot M_{02}$, $M_1\cdot M_{01}$, $M_1\cdot M_{02}$ の位数 $=2, 3, 4$ 又は 6.

$G(m,1,3)$：M_{01} の位数 $=m$, M_{02}, M_1 の位数 $=2$ としてよい。

$M_1\cdot M_{02}$ の位数 $=2$ 又は 3.

今、$f_j=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\rho_j)$ は $M_\infty=M_1\cdot M_0$ の固有値である事に注意して、$\rho_j=\dfrac{\alpha}{d}$（符号の違いを無視してよい事は明らか）の時、d はどういう値をとるべきか、以上の結果から考えてみる；

((25))：degree は $\{6, 9, 12\}$。従って、d として取り得るのは

$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12$

故に、$\rho_j=\dfrac{\alpha}{36}$ として、α は少なくとも 3 又は 4 を因数に持つ。

《26》: degree は$\{6, 12, 18\}$。従って $d=1, 2, 3, 4, 6, 9, 12$ 又は18。

$\rho_j = \frac{\alpha}{36}$ として、α は少なくとも 2 又は 3 で割り切れる。

$G(m,1,3)$ については一般的に言えないが、degree は $\{m, 2m, 3m\}$ で、特に $m=3$ のとき、

$G(3,1,3)$; degree は $\{3, 6, 9\}$。$d=1, 2, 3, 6, 9$。$\rho_j = \frac{\alpha}{18}$ として、α は 2 又は 3 で割り切れる。

(*), (**) 及び以上の結果から、複素共役を除いた全ての場合を調べると、$\tilde{G}$ が《25》の群となるには、

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3; \rho_1, \rho_2, \rho_3) &= \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{5}{6}\right) \\
&\quad \left(\qquad {\prime\prime} \qquad ; \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{3}{4}\right) \\
&\quad \left(\qquad {\prime\prime} \qquad ; \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) \\
&\quad \left(\qquad {\prime\prime} \qquad ; \tfrac{1}{9}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{7}{9}\right)
\end{aligned}
$$

の 4 通りに限って、可能性のあることが分る。又、《26》及び $G(3,1,3)$ については計 50 通りの case について可能性がある。そこで、それぞれの場合について、a_j, ρ_j の値を P.8 で述べた $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ の右辺に代入し、更に p_1, p_2, q_1, q_2 の内、2 ケは任意に指定してよかったので、$q_1 = q_2 = 1$ とする。こうしておいて、P.10 で述べた行列の位数に関する条件、特に 2 つの生成元の積に関する条件が満たされるかどうか、を全てチェックする。この作業を人間の手でやろうとすれば、仮に根気

が続いたとしても軽く1年はかゝると思われる。幸いな事に、いじり始めて1ヶ月半程度だった数式処理システムMacsymaのお蔭で、慣れてくると7、8分程度で1つのcaseをチェックできた。

結論を述べると、

((25))；$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。このとき、

$$M_{01}^3 = M_{02}^3 = M_1^3 = I$$

$$M_0^3 = (M_{01} \cdot M_{02})^3 = I, \ (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I.$$

((26))；$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ は

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^3 = I$$

$$M_0^6 = I, \ (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^6 = I.$$

もう一つの可能性をもつ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ は

$$M_{01}^2 = M_{02}^3 = M_1^3 = I,$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I$$

((G(3,1,3)))；$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^2 = I$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^3 = I$$

この最後のcaseについては、ある変換を施すことで、その生成元の形を見てG(3,1,3)と判別されるもので、a_j, ρ_j を見ているだけでは、((26))かG(3,1,3)かの判別はできない。最初

の case について、それが ((25)) であると判断するにはどうするか述べると、まず、

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \frac{\omega-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{\omega^2-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega-1 & \omega-1 & \omega \end{pmatrix}$$

である。ここで、$\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ である。今、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を取ると

$$T^{-1}M_{01}T = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}M_{02}T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}M_1T = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

となる。これらは確かにユニタリー行列であるが、更に S-T に於いて ((25)) の典型的な生成元として述べられているものと、ほゞ一致し (S-T の p.296)、同じ群を与える事は一目で分る。他の case についても同様であり、結局、それぞれの case が、先に述べた *unitary reflection group* に同型となる事、又、同型となるのはそれらの case に限る事が分る (以上の決め方から)。これで ((25)), ((26)), G(3,1,3) となる場合について、$\tilde{G}$ に関して完全に分ったのだが、その部分群 G はどうなるか見ると；

$\tilde{G} \cong$ ((25)) のとき、G は位数 81 の部分群。詳しくは、

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix} ; * = 1, \omega \text{ or } \omega^2 \right\} , \quad |\mathcal{G}| = 27$$

として、$G \cong \mathcal{G} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ となる。

$\widetilde{G} = ((26))$、$G(3,1,3)$ の場合は、何れの case も $\langle M_0 = M_{01} \cdot M_{02} \rangle = \langle M_{01}, M_{02} \rangle$ となるので、$G = \widetilde{G}$ が分る。又、これらについて、その解のリーマン面の genus も容易に求まる。以上から、

<u>Theorem A</u>. G.H.G.E. の有限モノドロミー群 G で $\widetilde{G}$ も同時に有限群となるのは、$\widetilde{G} = ((25))$、$((26))$、$G(m,1,3)$ $(m \geqq 3)$ に限る。特に、$\widetilde{G} = ((25))$, $((26))$、$G(3,1,3)$ となるのは、条件(*)(p.7)の元で、以下の4つの case であり、又、その4つに限る。

(I) $(a_1, a_2, a_3; \rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び、複素共役 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で $\widetilde{G} = ((25))$、Riemann 面の genus $= 7$

(II) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ 及び $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{5}{18}, \frac{11}{18}, \frac{17}{18})$ で $G = \widetilde{G} = ((26))$。 genus $= 17^2$

(III) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ 及び $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12})$ で $G = \widetilde{G} = ((26))$。 genus $= 17^2$

(IV) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で $G = \widetilde{G} = G(3,1,3)$。 genus $= 19$。

モノドロミー群の成分は全て e_j, f_j で表わされる(p.4及び Theorem 5)。従って、$(a_1, a_2, a_3; \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ に関する G と、任

意の整数 l, m, n, p, q を取って $(a_1+p, a_2+q, a_3-l-m-n-p-q; \rho_1+l, \rho_2+m, \rho_3+n)$ の時のモノドロミー群とは一致する。この事と、p.2 で述べた Remark、及び、G が有限群であれば解は代数函数である、という事から；

Theorem B. 以下の G.H.G.F. は代数函数である：

(I) ${}_3F_2\left(l\pm\frac{1}{9}, m\pm\frac{4}{9}, n\pm\frac{7}{9}; p\pm\frac{1}{3}, q\pm\frac{2}{3}; t\right)$

(II) ${}_3F_2\left(l\pm\frac{1}{18}, m\pm\frac{7}{18}, n\pm\frac{13}{18}; p\pm\frac{1}{3}, q\pm\frac{1}{2}; t\right)$

(III) ${}_3F_2\left(l\pm\frac{1}{12}, m\pm\frac{7}{12}, n\pm\frac{5}{6}; p\pm\frac{1}{2}, q\pm\frac{2}{3}; t\right)$

(IV) ${}_3F_2\left(l\pm\frac{1}{9}, m\pm\frac{4}{9}, n\pm\frac{7}{9}; p\pm\frac{1}{3}, q\pm\frac{1}{2}; t\right)$

ここで、$l, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$。

§4. 残る case は $\tilde{G}$ が $G(m,1,3)$ で $m \geqq 4$ の場合である。得られた結果を述べると；

Theorem C. n は $(m,n)=1$, $1 \leqq n < m$ をみたす任意の整数とする。ならば、$(a_1, a_2, a_3; \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \left(\frac{n}{m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n}{3m}, \frac{m+n}{3m}, \frac{2m+n}{3m}\right)$ に対応するモノドロミー群は全て有限群である。更に、

(i) m が奇数のときは、$G = \tilde{G} = G(m,1,3)$ で、対応する 3 G.H.G.E. の解の Riemann 面の genus $= \dfrac{(m-1)(3m^2-2m-2)}{2}$ である。

(ii) m が偶数のときは、$\tilde{G} = G(m,1,3)$ であるが、

$$G \cong \left\langle G\left(\frac{m}{2}, 1, 3\right), \begin{pmatrix} \zeta_m & & 0 \\ & \zeta_m & \\ 0 & & \zeta_m \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \zeta_m = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\right)$$

となり、従って Riemann 面の genus $= \frac{1}{8}(m-2)(3m^2-2m-4)$ となる。

Theorem B と同様にして：

Theorem D. 3 より大きい任意の自然数 m と、$(m,n)=1$, $1 \leq n < m$ をみたす任意の自然数 n に対し、

$$ {}_3F_2\left(\lambda \pm \frac{n}{3m}, \mu \pm \frac{m+n}{3m}, \nu \pm \frac{2m+n}{3m}; p \pm \frac{n}{m}, q \pm \frac{1}{2}; t\right) $$

は代数函数である。ただし、$\lambda, \mu, \nu, p, q \in \mathbb{Z}$。

Remark. Theorem B の (IV) は、この定理で $m=3$、$n=1$ としたもので、結局、Theorem C, D は $\widehat{G}$ が非原始群 $G(m,1,3)$ $(m \geq 3)$ となる case について述べている。即ち、$m>3$ の条件は $m \geq 3$ としてよい。前節の結果とどう違うかと言うと、§3 では $\widehat{G}$ が ((25))、((26)) 及び $G(3,1,3)$ となる case を全て決定しているのに対し、Th. C, D は、それが $\widehat{G} = G(m,1,3)$ $(m \geq 4)$ となる全ての case かどうか不明な点である。勿論、m が小さければ、これで全てつくされるのは明らかだが。

文献

[1] 河野實彦；Funkcial. Ekvac., 28 (1985), 249-266.

[2] 大久保謙二郎：On the group of Fuchsian equations，都立大学数学教室セミナー報告，1987.

[3] 大久保-高野恭一; Generalized hypergeometric functions (preprint).

[4] 大久保-高野-吉田節治; Funkcial. Ekvac., 31 (1988) 483-

[5] 佐々井; G.H.G.F. with finite monodromy groups (準備中).

[6] Shephard-Todd; Canad. J. Math. 6 (1954) 274-304

[7] Springer; Inv. Math., ~~(1974)~~ 25 (1974) 159-198.

[8] H. Yokoyama; Hiroshima Math. J., 18 (1988), 309-339