

## 桜井氏の見付けた微分方程式の局所解について

九大 理 山宮茂樹 (Shigeaki Yamamiya)

九州大学の桜井氏が見付けた微分方程式の確定特異点の上での正則解を求めたい。これは、その中間報告である。

1. Gauss と Appell の超幾何級数および超幾何微分方程式  
Gauss の超幾何級数とは次のものである。

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} x^m \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$$

$x$  は複素変数  $\alpha, \beta, \gamma$  は複素パラメータ。

記号  $(a, k)$  の意味は  $a \neq 0$  として  $(a, 0) = 1$

$$(a, k) = a(a+1) \cdots (a+k-1) \quad k = 1, 2, \dots$$

Gauss の超幾何級数の二変数への拡張として Appell の4つの超幾何級数があるが、その内の2つ、 $F_1$  と  $F_4$  を考える。

$F_1$  と  $F_4$  はそれぞれ次の形、

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x_1, x_2) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x_1^m x_2^n$$

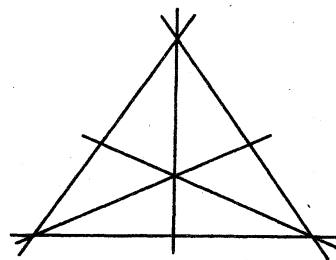
$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x_1, x_2) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(1, m)(\gamma', n)(1, n)} x_1^m x_2^n$$

$F_1$ と $F_4$ の満たす偏微分方程式系を $EF_1$ ,  $EF_4$ と書く事にする。  
 これは、 $\mathbb{C}P^2$ 上の方程式系と考える事が出来る。 $\mathbb{C}P^2$ の  
 同次座標を $(x, y, z)$ とする。

$EF_1$ は $\mathbb{C}P^2$ 上

$$H_1 = \{x=0\}, H_2 = \{y=0\}, H_3 = \{z=0\}$$

$$H_4 = \{x=y\}, H_5 = \{y=z\}, H_6 = \{z=x\}$$

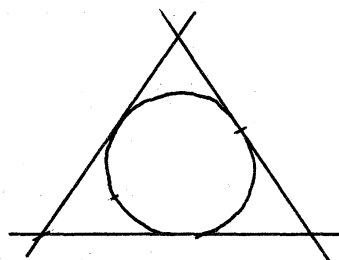


で確定特異点を持つ、解空間が3次元となる方程式系である。

$EF_4$ は $\mathbb{C}P^2$ 上

$$H_1, H_2, H_3, H_7 = \{(x+y-z)^2 - 4xy = 0\}$$

で確定特異点を持つ、解空間が4次元  
 となる方程式系である。



$EF_4$ に、ある微分方程式を一つ付け加えて、パラメータ間  
 に、 $\beta = \gamma + \gamma' - 1$ なる関係を入れると、それは $F_4$ を解に持つ  
 解空間が3次元の方程式系となる。この系を $REF_4$ と書く  
 事にする。[M. Kato]

## 2. 桜井氏が見付けた方程式系 [k. Sakurai]

ここで扱う方程式系は、 $\mathbb{C}P^2$ 上で定義され、パラメータ  
 $s^1, s^4, s^7$ を持つ。この系を $E(s^1, s^4, s^7)$ と書く。(略して  
 2

$E(\lambda)$ とも書く。) 先程の  $\mathbb{C}P^2$  の同次座標を使い、 $(x_1, x_2) (=X) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$  と置き、未知関数を  $u$  とすれば  $E(\lambda)$  は次の通り

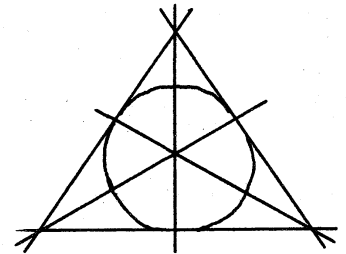
$$E(\lambda) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^2 P_{ij}^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + P_{ij}^0(x) u \quad i, j = 1, 2$$

この4つの方程式の内、 $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$  と  $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$  を含む方程式は同一。各  $P_{ij}^k$  は、パラメータ  $s^1, s^4, s^7$ 、変数  $x_1, x_2$  に関する有理式の形をしている。 $E(\lambda)$  は  $x_1, x_2$  に関して対称であり、§1の記号を使えば、 $\bigcup_{i=1}^7 H_i$  で確定特異点を持つ。

また、 $E(\lambda)$  は可積分条件を満たす。

$\Leftrightarrow$  解空間が3次元

$$\Leftrightarrow s^7 (6s^1 - 3s^4 - 2s^7 + 1) = 0$$



ゆえにパラメータ  $s^1, s^4, s^7$  の間には、関係がある。

$E(\lambda)$  は normal form

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^2 P_{ij}^j(x) = 0 \quad i = 1, 2$$

$EF_1$  と  $REF_4$  の未知関数を  $u$  として、別の未知関数  $w$  と正則関数  $a(x)$  により解の変換  $u = a(x) \cdot w$  を行なえば、 $EF_1$  と  $REF_4$  を normal form に変形出来る。

$E(\lambda)$  は  $s^7 = 0$  と置いた時、 $EF_1$  の normal form のパラメータを特殊にしたものと一致する。

$$E(s^1, s^4, s^7=0) = EF_1(-3s^1 - 3s^4 - 1, -\frac{3}{2}s^4, -\frac{3}{2}s^4, -3s^1 - \frac{3}{2}s^4)$$

$E(s)$  は  $s^4=0$  と置いた時、REF4の normal formのパラメータを特殊にしたものと一致する。

$$E(s^1, s^4=0, s^7) = \text{REF4}(-3s^7 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}s^7, \frac{1}{2}-s^7, \frac{1}{2}-s^7)$$

### 3. 解の変換、形式解を求める途中で現れる漸化式

$E(s)$  の解を  $u$ 、別の未知関数  $w$ 、

$$H = x_1^{s^1} x_2^{s^1} (x_1-1)^{s^4} (x_2-1)^{s^4} (x_1-x_2)^{s^4} \{x_1^2 + x_2^2 + 1 - 2(x_1+x_2+2x_1x_2)\}^{s^7}$$

として、解の変換  $w = H \cdot u$  を考える。この変換は  $s^4=0$  と置けば、EF1の normal form を、原点で正則な  $F1$  を解に持つ  $EF1$  に変換する。また、 $s^4=0$  とすれば、REF4の normal form を、原点で正則な解  $F4$  を持つ  $REF4$  に変える。以上の事から、この変換を  $E(s)$  に行ない、得られた方程式系も、原点で正則な解を持つのではあるまいか。すなわち確定特異点の上で正則な解を持つのではないかと思われる。そこで、この変換して得られた方程式の形式解を求めてみる。

変換した後の  $E(s)$  の係数は  $x_1, x_2, s^1, s^4, s^7$  の有理式となり形式解を求める時、不便なので分母をはき、各係数を多項式の形にしておく。手計算を簡単にする為、 $Dx_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ 、 $Dx_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  で置き換える。この操作の後に得られたものを  $RE(s)$  と書く事にする。  $E(s)$  は実質的に3つの方程式から

成るので、 $RE(\sigma)$  は次の形になる。

$$RE(\sigma) \begin{cases} \left\{ (x_1+x_2-1)^2 - 4x_1x_2 \right\} (x_1-x_2)(x_1-1) D_{x_1} D_{x_2} W \\ = R_{11}^1 D_{x_1} W + R_{11}^2 D_{x_2} W + R_{11}^0 W \quad \dots \textcircled{1} \\ \left\{ (x_1+x_2-1)^2 - 4x_1x_2 \right\} (x_1-x_2) D_{x_1} D_{x_2} W \\ = R_{12}^1 D_{x_1} W + R_{12}^2 D_{x_2} W + R_{12}^0 W \quad \dots \textcircled{2} \\ \left\{ (x_1+x_2-1)^2 - 4x_1x_2 \right\} (x_1-x_2)(x_2-1) D_{x_2} D_{x_2} W \\ = R_{22}^1 D_{x_1} W + R_{22}^2 D_{x_2} W + R_{22}^0 W \quad \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$R_{ij}^k$  は  $s^1, s^4, s^7, x_1, x_2$  による多項式

$RE(\sigma)$  が原点で正則な解を持つものとして

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} A(i,j) x_1^i x_2^j$$

を  $RE(\sigma)$  に代入して  $x_1^m x_2^n$   $m, n = 0, 1, \dots$  について、  
まとめる。すると  $RE(\sigma)$  の各々の式は、

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} Z_k(m,n) x_1^m x_2^n = 0 \quad k=1,2,3$$

$k$  は  $RE(\sigma)$  の  $\textcircled{k}$  に対応している。よって次を得る。

$$Z_k(m,n) = 0 \quad k=1,2$$

$Z_k(m,n)$  は、 $m, n, s^1, s^4, s^7$  の多項式を係数とする  $A(i,j)$  の一次式となり  $A(i,j)$  の係数を  $B(i,j)$  と置けば

$$Z_k(m,n) = \sum_{\text{有限個の}(i,j)} B(i,j) A(i,j)$$

$Z_k(m,n) = 0$  は  $A(i,j)$  の漸化式になっている。

$Z_1(m,n) = 0$  に現れる  $A(i,j)$

$$\begin{array}{cccc} A(m-4,n) & A(m-3,n) & A(m-2,n) & A(m-1,n) \\ & A(m-3,n-1) & A(m-2,n-1) & A(m-1,n-1) & A(m,n-1) \\ & & A(m-2,n-2) & A(m-1,n-2) & A(m,n-2) \\ & & & A(m-1,n-3) & A(m,n-3) \end{array}$$

$Z_2(m,n) = 0$  に現れる  $A(i,j)$

$$\begin{array}{ccc} A(m-3,n) & A(m-2,n) & A(m-1,n) \\ & A(m-2,n-1) & A(m-1,n-1) & A(m,n-1) \\ & & A(m-1,n-2) & A(m,n-2) \\ & & & A(m,n-3) \end{array}$$

$Z_3(m,n) = 0$  に現れる  $A(i,j)$

$$\begin{array}{cccc} A(m-3,n) & A(m-2,n) & A(m-1,n) & \\ A(m-3,n-1) & A(m-2,n-1) & A(m-1,n-1) & A(m,n-1) \\ & A(m-2,n-2) & A(m-1,n-2) & A(m,n-2) \\ & & A(m-1,n-3) & A(m,n-3) \\ & & & A(m,n-4) \end{array}$$

$Z_k(m,n) = 0$  に現れる  $A(i,j)$  は、 $m,n$  の値により、 $i < 0$  または  $j < 0$  となる時は、 $A(i,j) = 0$  と約束する。

$Z_1(m, n)$  と  $Z_3(m, n)$  の間には、次の関係がある。

$$Z_1(m, n) = Z_3(n-1, m+1)$$

ゆえに  $Z_k(m, n) = 0$   $k=1, 2$  が本質的である。

$Z_k(m, n) = 0$   $k=1, 2$  に現れる  $B(i, j)$  を求める。

$Z_1(m, n) = 0$  に現れる  $B(i, j)$

$$B(m-1, n) = -m^2 + 3m S_1 + -m S_4 + 3m - \frac{3}{2} n S_4 - 3 S_1 - \frac{3}{2} S_4 - 2$$

$$B(m, n-1) = m(m - 3 S_1 - 1)$$

$$B(m-2, n) = 3m^2 - 21m S_1 - \frac{3}{2} m S_4 - 17m - 12n S_1 + 9n S_4 - 2n + 54 S_1^2 - \frac{27}{2} S_1 S_4 + 63 S_1 + 24$$

$$B(m-1, n-1) = -m^2 + 15m S_1 - 6m S_4 + 5m + 12n S_1 - \frac{3}{2} n S_4 + 2n - 54 S_1^2 + \frac{27}{2} S_1 S_4 - 48 S_1 + \frac{2}{2} S_4 - 8$$

$$B(m, n-2) = 2m(-m + 3 S_1 + 1)$$

$$B(m-3, n) = -3m^2 + 33m S_1 - \frac{3}{2} m S_4 + 25m + 12n S_1 - \frac{15}{2} n S_4 + 2n - 108 S_1^2 + 27 S_1 S_4 - 141 S_1 + \frac{21}{2} S_4 - 52$$

$$B(m-2, n-1) = 3m^2 - 33m S_1 + 12m S_4 - 19m + 54 S_1^2 - 27 S_1 S_4 + 87 S_1 - 30 S_4 + 28$$

$$B(m-1, n-2) = -m^2 + 3mS_1 - \frac{9}{2}mS_4 + 3m - 12nS_1 + \frac{3}{2}nS_4 \\ - 2n + 54S_1^2 + 42S_1 + \frac{3}{2}S_4 + 4$$

$$B(m, n-3) = m(m - 3S_1 - 1)$$

$$B(m-4, n) = m^2 - 15mS_1 + \frac{3}{2}mS_4 - 11m + 54S_1^2 - \frac{27}{2}S_1S_4 \\ + 81S_1 - 9S_4 + 30$$

$$B(m-3, n-1) = -3m^2 + 21mS_1 + 6mS_4 + 23m - 12nS_1 \\ + \frac{15}{2}nS_4 - 2n - \frac{81}{2}S_1S_4 - 51S_1 - \frac{69}{2}S_4 - 40$$

$$B(m-2, n-2) = 3m^2 - 9mS_1 - \frac{21}{2}mS_4 - 15m + 12nS_1 - 9nS_4 \\ + 2n - 54S_1^2 + \frac{135}{2}S_1S_4 - 27S_1 + 54S_4 + 12$$

$$B(m-1, n-3) = -m^2 + 3mS_1 + 3mS_4 + 3m + \frac{3}{2}nS_4 - \frac{27}{2}S_1S_4 \\ - 3S_1 - \frac{21}{2}S_4 - 2$$

$Z_2(m, n) = 0$  に現れる  $B(i, j)$

$$B(m-1, n) = n(m - S_4 - 1)$$

$$B(m-2, n) = n(-2m + 6S_1 + 5)$$

$$B(m-3, n) = n(m - 6S_1 - S_4 - 4)$$

$$B(m, n-1) = m(-n - S_4 + 1)$$

$$B(m-1, n-1) = 6mS_1 - 6mS_4 + m - 6nS_1 + 6nS_4 - n$$



$$\begin{aligned}
B(m-2, n-1) = & -3mn + 18mS_1 - \frac{15}{2}mS_4 + 6m + 24nS_1 \\
& - 9nS_4 + 10n - 108S_1^2 + 54S_1S_4 - 102S_1 \\
& + 36S_4 - 20
\end{aligned}$$

$$B(m, n-2) = m(2n - 6S_1 - 5)$$

$$\begin{aligned}
B(m-1, n-2) = & 3mn - 24mS_1 + 9mS_4 - 10m - 18nS_1 \\
& + \frac{15}{2}nS_4 - 6n + 108S_1^2 - 54S_1S_4 + 102S_1 \\
& - 36S_4 + 20
\end{aligned}$$

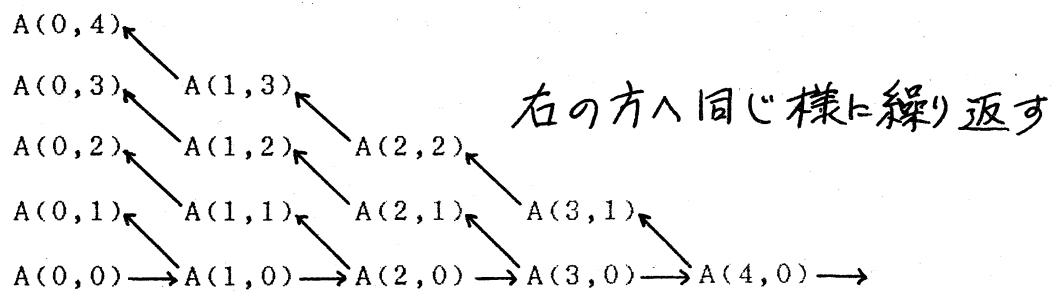
$$B(m, n-3) = m(-n + 6S_1 - S_4 + 4)$$

$E(1)$  のパラメータの関係より  $S^7=0$  でない一般の場合には  $6S^1 - 3S^4 - 2S^7 + 1 = 0$  となっている。  $B(i, j)$  は  $S^1, S^4, S^7$  を含んでいるが、この関係を使い、各  $B(i, j)$  から  $S^7$  を消去してある事に注意する。

4、漸化式による係数  $A(i, j)$  の決まり方、  $A(i, j)$  の形

$A(0, 0) = 1$  と置いた時、各  $\sum_k(m, n) = 0$  による  $A(i, j)$  の決まり方を見る。次の事がわかる。

パラメータに条件を付ければ、  $\sum_1(m, n) = 0$   $m, n = 0, 1, \dots$  のみを使い、仮定  $A(0, 0) = 1$  から出発して、次に示す順序で全ての  $A(i, j)$  を決定する事が出来る。



これらの事を示す。

$\Sigma_1(m, n) = 0$  は  $A(m-1, n)$  を定める漸化式とみなす事にする。

$\{A(i, j) : i, j = 0, 1, \dots\}$  を  $l (= 0, 1, \dots)$  による集合、

$\{A(i, j) : i+j = l\}$  に分け、 $l$  に関する帰納法で、全ての  $A(i, j)$  が定まる事を示す。

$l = 0$  の時、仮定より  $A(0, 0) = 1$  となっている。

仮に、 $i+j \leq l$  を満たす  $A(i, j)$  が定まっているものとすれば次に、 $i+j = l+1$  となる  $A(i, j)$  達が

$$A(l+1, 0) \rightarrow A(l, 1) \rightarrow \dots \rightarrow A(1, l) \rightarrow A(0, l+1)$$

の順に、定まる。なぜなら、

$\Sigma_1(m, n) = 0$  に現れる  $A(i, j)$  の並び方 (3参照) に注意する。

この漸化式は、 $A(m-1, n)$  を定めるが、 $A(m-1, n)$  は  $A(m, n-1)$  と他の  $i+j \leq m+n-2$  を満たす  $A(i, j)$  で定まる事がわかる。

さて、 $A(l+1, 0)$  は  $A(l+1, 0)$  を定める漸化式  $\Sigma_1(l+2, 0) = 0$  に、仮定で既に定まっている  $A(i, j)$  を代入すれば定まる。

$A(l, 1)$  も、これを定める漸化式  $\Sigma_1(l+1, 1) = 0$  に今定めた、 $A(l+1, 0)$  と仮定で定まっている  $A(i, j)$  を代入すれば定まる。

以上方法を上で記した順序通り繰り返せば良い。

しかし以上の議論は  $\Sigma_1(m, n) = 0$  における  $A(m-1, n)$  の係数が零となれば使えない。  $A(m-1, n)$  の係数は、

$$3(m-1)s^1 + \frac{3}{2}(m-n-1)s^4 - m^2 + 3m - 2$$

であるから、  $E(x)$  のパラメータ  $s^7$  を  $s^7 = 3s^1 - \frac{3}{2}s^4 + \frac{1}{2}$  とおいて消去したものの  $E(s^1, s^4, s^7 = 3s^1 - \frac{3}{2}s^4 + \frac{1}{2})$  は、パラメータ空間  $\{(s^1, s^4) \in \mathbb{C}^2\}$  から次の所を除いた部分で、この議論が使える。

$$\bigcup_{m, n=0}^{\infty} \left\{ (s^1, s^4) \in \mathbb{C}^2 \mid 3(m-1)s^1 + \frac{3}{2}(m-n-1)s^4 - m^2 + 3m - 2 = 0 \right\}$$

$\Sigma_1(m, n) = 0$  が  $A(m, n-1)$  を定める漸化式と考えると、  $A(i, j)$  は全て定まる。

$\Sigma_1(m, n) = 0$  の時と同様に  $\Sigma_2(m, n) = 0$  が  $A(m-1, n)$  を定める漸化式であるとする。しかし、この時  $B(m-1, n)$  が  $n$  を因数として持つ為  $s^1, s^4, s^7$  が 1 かなる値を取るとも  $n=0$  となれば  $B(m-1, 0) = 0$  となり、  $A(m-1, 0)$  は定まらない。すなわち、  $A(i, 0) \quad i=1, 2, \dots$  が定まらない。  $\Sigma_2(m, n) = 0$  が  $A(m, n-1)$  を定める漸化式としても、同じ理由で今度は  $A(0, j) \quad j=1, 2, \dots$  が定まらない。

$\Sigma_1(m, n) = 0 \quad m, n = 0, 1, \dots$  から実際には  $A(i, j)$  をいくつか

求めてみる。求めたものは  $A(i, j)$  は  $i, j$  に関して対称、  
 $A(i, 0)$  の形を (た) 係数は推測出来る。対称性は  $E(A)$  の対称  
 性からわかる。  $A(i, 0)$  の形は次の様に推測される。

$$A(i, 0) = \frac{(-9s^1 - 2, i)(-6s^1 + \frac{3}{2}s^4 - 1, i)}{(-3i - \frac{3}{2}s^4, i)(1, i)}$$

$A(i, 0)$   $i=0, 1, \dots$  は漸化式  $Z_1(m, 0) = 0$   $m=1, 2, \dots$  から  
 定まっている。  $Z_1(i, 0) = 0$  は  $A(i-1, 0), A(i-2, 0), A(i-3, 0)$   
 $A(i-4, 0)$  より成る一次式であり、これに、上で推測した  
 $A(i, 0)$  の  $i$  を  $i-1, i-2, i-3, i-4$  にかえたものを代入すれば  
 $Z_1(i, 0) = 0$  となり漸化式を満たす。

ここまでの話 は、正則解があるとして、形式解を求める  
 為に形式解の係数が満たす漸化式を導いた。この漸化式より  
 各係数は  $A(0, 0) = 1$  という仮定から出発し、全てが定まる事が  
 わかった。しかし 矛盾なく定まるかどうかは別問題である。  
 もし矛盾なく定まれば、その形式解を  $\eta = 0$  と置くと上の  
 $A(i, 0)$  を係数とする一変数の級数が現れるが、これは Gauss  
 の超幾何級数である。

求めてみた他の  $A(i, j)$ 、すなわち  $j \neq 0$  なるものは、分母  
 に関しては  $A(i, j, 0)$  に等しい。分子は、いくつかは因数分  
 解されるが、 $A(i, j, 0)$  と同じ因数がある他は  $i, j$  が大きくな  
 れば次数も上がっていく 推測不可能な因子も含む。

$\sum_2(m, n) = 0$  はきわむ形になっている。例えば、  
 $B(m-1, n)$  と  $B(m, n-1)$  は、 $m$  と  $n$  に関して反対称、すなわち、  
 $B(m-1, n)$  が  $m$  と  $n$  を入れかえると  $-B(m, n-1)$  に等しい。  
 3. の  $\sum_2(m, n) = 0$  に現れる  $A(i, j)$  を並べて書いてある所で  
 $A(i, j)$  は直角三角形に並んでいる。この直角三角形の直角を  
 二等分する線に関して、対称に位置する  $A(i, j)$  の係数が、  
 反対称の関係になっている。また、 $m=n$  とおけば、 $A(i, j)$   
 が  $i, j$  に関して対称である事に注意すると、 $\sum_2(m, m)$  に  
 現れる各項は、たがいに打ち消し合い、消えてしまう。

### 文献

[M. kato] 加藤満生

Appell's  $F_4$  with  $b=c+c'-1$  (7°レ7°リ)ント

[K. Sakurai] 桜井幸一、吉田正章

Fuchsian systems associate with the  
 $\mathbb{P}^2(F_2)$ -arrangement