数理解析研究所講究録
682巻 1989年 52-73

いくつかの Bootstrap Confidence Intervals の比較

千葉大学理学部　神藤　健（Takeshi Shindo）
千葉大学自然科学研究科　A.W.Alhassan
千葉大学理学部　田栗正章（Masaaki Taguri）

1. 解析の目的

Bootstrap法を用いて、推定すべき母数（１変量）に対する信頼区間を構成するいくつかの方法が提案されているが（例えば Efron [2], Hall [3] 等を参照）、その理論的、数値的な検討は未だ不十分であると考えられる。そこで本研究では、４種類の方法について、主として数値的観点から、それらの比較・検討を行なう。

2. ４種類の信頼区間

まず、ここでとりあげる４種類の信頼区間について述べる。

(1) パーセンタイル法［PERcentile method（PER法）］

Ｆを未知の母集団分布、$\theta = \theta(F) \in R^1$を推定すべき母数とする。$x_1, \cdots, x_n$をＦからの無作為標本、すなわち

$x_1, \cdots, x_n \overset{i.i.d.}{\sim}$ Fとする。F_nを経験分布とし、$\hat{\theta} = \theta(F_n) = t(x_1, \cdots, x_n)$とする。次に $x_1^*, \cdots, x_n^*$ を F_n からの無作為標本（bootstrap sample）とし、$\hat{\theta}^* = t(x_1^*, \cdots, x_n^*)$とする。このとき

$$\hat{G}(s) = Pr\{\hat{\theta}^* \leqq s\} \qquad (F_n\text{は固定})$$

と定義する。モンテカルロ法では、$\hat{G}(s)$は次式で近似される。

$$\hat{G}(s) \sim \#\{\hat{\theta}^* \leqq s\} / B$$

ただし、Bは Bootstrap 標本の抽出回数であり、$\#\{\hat{\theta}^* \leqq s\}$ は$\hat{\theta}^* \leqq s$となる回数を表わす。

このとき、パーセンタイル法によるθの$(1-2\alpha)$信頼区間は、次式で与えられる。

$$[\hat{G}^{-1}(\alpha), \quad \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$$

この信頼区間がθの exact な$(1-2\alpha)$信頼区間であるための条件は、Efron [1], p.84 に与えられている。

(2) BST法［BootStrap T method（BST法）］

$\theta = \mu$（母集団平均）の推定の場合には、この方法は、次のようになる。 F の下での $T = (\overline{X} - \mu) / S$ の分布を、F_n の下での $T^* = (\overline{X}^* - \overline{x}) / S^*$ の分布で近似することを考える。ここで

$$S^2 = \Sigma (X_i - \overline{X})^2 / (n-1) \quad ; \quad \overline{X} = \Sigma X_i / n$$

$$S^{*2} = \Sigma (X_i^* - \overline{X}^*)^2 / (n-1) \quad ; \quad \overline{X}^* = \Sigma X_i^* / n$$

である。このような考え方に基づき、BST法 によるθの(1-2α)信頼区間は、次のように構成される。

$$[\bar{x}-\{\widehat{CDF}^{-1}(1-\alpha)\}s,\ \bar{x}-\{\widehat{CDF}^{-1}(\alpha)\}s]$$

$$\widehat{CDF}(t)=\#\{T^{*}\leqq t\}/B \qquad (2.1)$$

(3) BC法 [Bias Corrected percentile method (BC法)]

Fを未知の母集団分布、$\theta=\theta(F)\in R^{1}$を推定すべき母数、$x_1,\cdots,x_n \underset{\sim}{\overset{i.i.d.}{}} F$ とする。$\hat{\theta}$, $\hat{G}(s)$ をパーセンタイル法の場合と同様に構成したとき、BC法 によるθの(1-2α)信頼区間は次式で与えられる。

$$[\hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0+z(\alpha))),\ \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0-z(\alpha)))]$$

$$z_0=\Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\theta})),\quad \hat{G}(s)=Pr\{\hat{\theta}^{*}\leqq s\},$$

$$\Phi(z(\alpha))=\alpha \qquad (2.2)$$

ここでΦは規準正規分布の分布関数である。(2.2)で $z_0=0$ とおくと、これはパーセンタイル法の信頼区間と一致する。

ところで BC法 による信頼区間は、次の仮定に基づいて導き出されたものである。

[仮定] 次の条件を満たす単調増加関数$g(\cdot)$が存在する。

$\phi=g(\theta)$, $\hat{\phi}=g(\hat{\theta})$, $\hat{\phi}^{*}=g(\hat{\theta}^{*})$ のとき、

$$\hat{\phi}-\phi \sim N(-z_0\sigma,\sigma^2),$$

$$\hat{\phi}^{*}-\hat{\phi} \sim N(-z_0\sigma,\sigma^2)$$

[z_0, σは定数]

この仮定の下では、(2.2)はθに対する exact な(1-2α)信頼

区間である（Efron [1], p.83 参照）。この仮定が成り立っていない状況でも、BC法による θ の $(1-2\alpha)$ 信頼区間を(2.2)で定義する。

(4) ＢＣa法 [B.C.percentile acceleration method(BCa法)]

BCa法は、BC法の改良として Efron [2] が与えた方法である。ここではBCa法を、次の３つの場合に分けて簡単に述べておく。

(i) 1 Parameter の場合（Parametric な場合）

(ii) Multiparameter の場合（Parametric な場合）

(iii) Nonparametric な場合

<u>(i) 1 Parameter の場合</u>

$\hat{\theta}$ を無作為標本 $(x_1,\cdots,x_n)$ から得られた θ のＭＬＥとし、$\hat{\theta}\sim F_\theta$ とする。この場合には $\hat{\theta}$ の bootstrap 分布は、$\hat{\theta}^*\sim F_{\hat{\theta}}$ で定義される。f_θ を $\hat{\theta}$ の p.d.f. とすれば、$\hat{\theta}^*$ の p.d.f. は $f_{\hat{\theta}}$ となるから、その分布関数は

$$\hat{G}(s)=P_{\hat{\theta}}\{\hat{\theta}^*\leqq s\}=\int_{-\infty}^{s} f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}^*)\,d\hat{\theta}^*$$

となる。BCa法では、次の仮定をおいている。

［仮定］　次の条件を満たす単調増加関数 $g(\cdot)$ が存在する。

$\phi=g(\theta),\quad \hat{\phi}=g(\hat{\theta})$ のとき、

$$\hat{\phi}-\phi\sim N(-z_0\sigma_\phi,\sigma_\phi{}^2),\qquad \sigma_\phi=1+a\phi$$

［z_0, a は定数］

これは、BC法の仮定を特別な場合として含んでいる。この仮定の下では、BC法の場合と同様、θに対するexactな$(1-2\alpha)$信頼区間は次式で与えられる。

$$[\hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])),\ \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha]))]$$

$$z[\alpha]=z_0+\{z_0+z(\alpha)\}/\{1-a(z_0+z(\alpha))\},$$

$$z_0=\Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\theta})),\quad \hat{G}(s)=\Pr\{\hat{\theta}^*\leqq s\},$$

$$\Phi(z(\alpha))=\alpha \tag{2.3}$$

(2.3)で $a=0$ とおくと、BC法の信頼区間と一致することに注意しておく。

この信頼区間を計算するためには、aの推定が必要になるが、aは次式で推定すればよいことが示されている。

$$a=\mathrm{Skewness}(\dot{l}_\theta \mid \theta=\hat{\theta})/6,$$

$$\dot{l}_\theta(\cdot)=\partial \log f_\theta(\cdot)/\partial\theta$$

これを用いれば、(2.3)の値を計算することができる。

ところで 1 Parameter の場合には、適当な条件の下で次が成り立つことが証明されている。

$$(\theta_{BCa}[\alpha]-\theta_{EX}[\alpha])/\sigma(\hat{\theta})=O(n^{-1})$$

ここで$\theta_{BCa}[\alpha]$はBCa法による信頼区間の端点、$\theta_{EX}[\alpha]$は有意水準αの最強力検定に対応する棄却域の端点である。

<u>(ii) Multiparameter の場合</u>

ηを母数ベクトル、$y\sim F_\eta$とするとき $\theta=t(\eta)\in$

R^1の信頼区間を構成する。まず、$\hat{G}(s)$は次のように作る。yの観測値からηのM.L.E.$\hat{\eta}$を求め、$\hat{\theta}=t(\hat{\eta})$とする。yの bootstrap 分布を $y^* \sim F_{\hat{\eta}}$ で定義すれば、y^*の観測値からηのM.L.E.$\hat{\eta}^*$が得られ、これから$\hat{\theta}^*=t(\hat{\eta}^*)$が計算できる。このとき

$$\hat{G}(s)=P_{\hat{\eta}}\{\hat{\theta}^*\leqq s\}$$

である。これを $\#\{\hat{\theta}^*\leqq s\}/B$ で近似すれば、θの$(1-2\alpha)$信頼区間は(2.3)で与えられる。この場合aの推定は、Stein(1956)の 'least favorable family' の考え方を用いれば 1 Parameter の場合に帰着させることができ、(i)の場合の式を用いれば、

$$a=\text{Skewness}\,(d/d\lambda\ \log f_{\hat{\eta}+\lambda\hat{\mu}}\mid \lambda=0)/6 \qquad (2.4)$$

となる。ここで$\hat{\mu}=I_{\hat{\eta}}^{-1}\hat{\nabla}$であり, $I_{\hat{\eta}}$ は $k\times k$ 行列でそのij成分は $(I_{\hat{\eta}})_{ij}=[-\partial^2/\partial\eta_i\partial\eta_j(\log f_\eta)]_{\eta=\hat{\eta}}$ で与えられる。また$\hat{\nabla}$の第 i 成分は $(\hat{\nabla})_i=[\partial/\partial\eta_i\, t(\eta)]_{\eta=\hat{\eta}}$ である。特に指数型分布族の場合、すなわちyの p.d.f.が

$$f(y)=\exp[n\{\eta' y-\psi(\eta)\}]f_0(y) \qquad (2.5)$$

と表わされる場合には、(2.4)は

$$a=\hat{\psi}^{(3)}(0)/\{\hat{\psi}^{(2)}(0)\}^{3/2}/6\sqrt{n}, \qquad (2.6)$$

$$\hat{\psi}^{(j)}(0)=\partial^{(j)}/\partial\lambda^{(j)}\hat{\psi}(\hat{\eta}+\lambda\hat{\mu})\mid\lambda=0$$

となる。これにより、(2.3)を計算することができる。

(iii) Nonparametric な場合

F を未知の分布、$x_1, \cdots, x_n \underset{\sim}{i.i.d.} F$ とし、$\theta = \theta(F) \in R^1$ の信頼区間を構成する。$\hat{\theta}$, $\hat{G}(s)$ の構成方法はパーセンタイル法の場合と同じであり、θ の $(1-2\alpha)$ 信頼区間は(2.3)で与えられる。この場合、a は次式で推定される。

$$a = [\Sigma U_i^3 / (\Sigma U_i^2)^{3/2}] / 6, \qquad (2.7)$$

$$U_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ t((1-\varepsilon) F_n + \varepsilon \delta_i) - t(F_n) \} / \varepsilon$$

上式は、次のようにして導かれる。$F = F(W)$ を、x_i に w_i の重みをおいた分布とする。ただし、$W = (w_1, \cdots, w_n)$, $w_i \geqq 0$ $(i=1, \cdots, n)$, $\Sigma w_i = 1$ である。この $F(W)$ を母分布と考えれば、$X_1, \cdots, X_n \underset{\sim}{i.i.d.} F(W)$ と考えられるが、これは次のように書き換えることができる。

$$P_i = \# \{X = x_i\} / n, \qquad P = (P_1, \cdots, P_n)$$

とおけば、

$$P \sim \text{multi}_n(n, W) / n,$$

すなわち P は n カテゴリー多項分布にしたがう。この分布は指数型分布族(2.5)において、

$$y = P, \quad \eta_i = \log(nw_i)+c, \quad \phi(\eta) = \log(\Sigma \exp \eta_i / n) \qquad (2.8)$$

とした場合である。いま $x_1, \cdots, x_n$ が観察されたとすれば、$P = P^0 = (1/n, \cdots, 1/n)$ が観測されたことにな

り、Wの推定値は $\hat{W}=P^{0}$ となる。これから $\hat{\eta}+\lambda\hat{\mu}=\lambda U$ が得られ、(2.6), (2.8)からaの推定ができる。以上により $\hat{G}(s)$, aが求められるから、θ の$(1-2\alpha)$信頼区間(2.3)が計算できる。BCa法の詳細については、Efron [2] を参照のこと。

3. 母平均，母分散の信頼区間

ここで、母平均，母分散を推定する場合の、各方法による信頼区間をまとめておく。

(1) 母平均 μ に対する信頼区間

Fを未知の分布、$x_1,\cdots,x_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$ とする。推定すべきパラメータは、$\theta=E_F(X)$ である。この場合、パーセンタイル（PER法），BC法，BCa法により信頼区間を構成するには、次のようにすればよい。

まず1組の標本 $(x_1,\cdots,x_n)$ を抽出して固定し、これから $\hat{\theta}=\bar{x}$ を計算する。$(x_1,\cdots,x_n)$ から復元抽出により大きさnの bootstrap 標本 $(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ をとり、$\hat{\theta}^*=\bar{x}^*=\Sigma x_i^*/n$ を計算する。これをB回繰り返せば、B個の $\bar{x}^*$ の値が得られるが、これから

$$\hat{G}(s)\sim\#\{\bar{x}^*\leqq s\}/B$$

が求まる。

$$z_0=\Phi^{-1}(\hat{G}(\bar{x})),\qquad \Phi(z(\alpha))=\alpha$$

$a=\hat{\beta}_1/6\sqrt{n}$ $[\hat{\beta}_1=\hat{\mu}_3/(\hat{\mu}_2)^{3/2},\ \hat{\mu}_k=\Sigma(x_i-x)^k/n]$ とすれば、μに対する$(1-2\alpha)$信頼区間は、次のように構成すればよい。ここでaの推定法としては、(2.7)を用いた。

(a) PER法 $[\hat{G}^{-1}(\alpha),\ \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$

(b) BC法 $[\hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0+z(\alpha))),\hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0-z(\alpha)))]$

(c) BCa法 $[\hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])),\ \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha]))]$

$$z[\alpha]=z_0+\{z_0+z(\alpha)\}/\{1-a(z_0+z(\alpha))\}$$

(d) BST法 $[\overline{x}-\{\widehat{CDF}^{-1}(1-\alpha)\}s,\ \overline{x}-\{\widehat{CDF}^{-1}(\alpha)\}s]$

$$s^2=\Sigma(x_i-\overline{x})^2/(n-1)$$

$$t^*=\sqrt{n}(\overline{x}^*-\overline{x})/s^*$$

$$\widehat{CDF}(t)=\#\{t^*\leqq t\}/B$$

(2) 母分散σ^2に対する信頼区間

Fを未知の分布、$x_1,\cdots,x_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$とする。推定すべきパラメータは$\theta=E_F[(X-E_F(X))^2]$である。この場合には、パーセンタイル法（PER法），BC法，BCa法により信頼区間を構成するには、次のようにすればよい。

まず1組の標本$(x_1,\cdots,x_n)$を抽出して固定し、これから$\hat{\theta}=\hat{\sigma}^2=\Sigma(x_i-\overline{x})^2/n$を計算する。$(x_1,\cdots,x_n)$から復元抽出により大きさnの bootstrap 標本$(x_1^*,\cdots,x_n^*)$をとり、$\hat{\theta}^*=\hat{\sigma}^{2*}=\Sigma(x_i^*-\overline{x}^*)^2/n$を計算する。これをB回繰り返せば、B個の$\hat{\sigma}^{2*}$の値が得られる

が、これから

$$\hat{G}(s) \sim \#\{\hat{\sigma}^{2*} \leqq s\}/B$$

が求まる。

$z_0 = \Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\sigma}^2))$,　　　$\Phi(z(\alpha)) = \alpha$

$a = [\Sigma U_i^3/(\Sigma U_i^2)^{3/2}]/6$　$[U_i = (x_i - \bar{x})^2 - \Sigma(x_j - \bar{x})^2/n]$

とすれば、σ^2に対する$(1-2\alpha)$信頼区間は、次のように構成すればよい。ここでaの推定法としては、(2.7)を用いた。

(a) PER法　$[\hat{G}^{-1}(\alpha),\ \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$

(b) BC法　$[\hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0+z(\alpha))),\ \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0-z(\alpha)))]$

(c) BCa法　$[\hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])),\ \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha]))]$

$$z[\alpha] = z_0 + \{z_0 + z(\alpha)\}/\{1 - a(z_0 + z(\alpha))\},$$

(d) BST法　$[\hat{\sigma}^2 - \{\widehat{CDF}^{-1}(1-\alpha)\}s,\ \hat{\sigma}^2 - \{\widehat{CDF}^{-1}(\alpha)\}s]$

$$s^2 = \Sigma(n-1)^2\hat{\mu}_4/n^3 - (n-1)(n-3)\hat{\mu}_2^2/n^3$$

$$t^* = (\hat{\sigma}^{2*} - \hat{\sigma}^2)/s^*$$

$$\widehat{CDF}(t) = \#\{t^* \leqq t\}/B$$

ここで $\hat{\sigma}^{2*}$, s^* は、bootstrap 標本を使って計算しなおした $\hat{\sigma}^2$, s の値である。

4. 母平均μの信頼区間の端点に対する検討

本節では、次の第5節で行なう数値実験の準備として、母平均μに対する4種類の信頼区間の端点の漸近展開を求めて

おく。これは、各端点の定義にしたがって、通常の Cornish -Fisher 展開を行なえばよい。

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\mu}_3 / (\hat{\mu}_2)^{3/2}, \qquad \hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_4 / (\hat{\mu}_2)^2 - 3,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 / n, \qquad z(\alpha) \equiv k$$

とおけば、4種類の信頼区間の端点 $\theta_{\cdot}[\alpha]$ の漸近展開は、一般的に次の形に表わせる。

$$\theta_{\cdot}[\alpha] = \bar{x} + \hat{\sigma}\{k + \hat{\beta}_1/6\sqrt{n}\cdot T_1 + \hat{\beta}_2/24n\cdot T_2 + \hat{\beta}_1{}^2/72n\cdot T_3 + 1/4n\cdot T_4 + O(n^{-3/2})\} \quad (4.1)$$

ここで、T_1, T_2, T_3, T_4 は次の通りである。

	T_1	T_2	T_3	T_4
$\theta_{PER}[\alpha]$	k^2-1	k^3-3k	$-4k^3+10k$	0
$\theta_{BC}[\alpha]$	k^2+1	k^3-3k	$-4k^3+18k$	0
$\theta_{BCa}[\alpha]$	$2k^2+1$	k^3-3k	$2k^3+22k$	0
$\theta_{BST}[\alpha]$	$2k^2+1$	$-2k^3+6k$	$20k^3-5k$	k^3+3k

参考のために、$\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$ の場合の T_1 ～ T_4 の値を、表1に与えておく。

表1. 各項の係数の値 [$\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$ の場合]

	$\alpha=0.95$				$\alpha=0.05$			
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4
PER	0.28	-0.02	-0.019	0	0.28	0.02	0.019	0
BC	0.62	-0.02	0.41	0	0.62	0.02	-0.16	0
BCa	1.07	-0.02	0.63	0	1.07	0.02	0.63	0
BST	1.07	0.04	1.12	2.35	1.07	-0.04	-1.12	-2.35

またBST法による信頼区間(2.1)において、$\widehat{CDF}(t)$をTの真の分布関数に置き換えてできる信頼区間の端点を$\theta_{EX}[\alpha]$とおくと、$Pr\{\theta \leqq \theta_{EX}[\alpha]\} = \alpha$ であり、$\theta_{EX}[\alpha]$の漸近展開は、上の$\theta_{BST}[\alpha]$ の式において $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ を β_1, β_2で置き換えたものになる。そこで $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + O(n^{-1/2})$ に注意すると、

$$|\theta_{BCa}[\alpha] - \theta_{EX}[\alpha]| = O(n^{-3/2})$$
$$|\theta_{BST}[\alpha] - \theta_{EX}[\alpha]| = O(n^{-3/2}) \qquad (4.2)$$

が言える。これは他の2つの方法では成り立たない。したがってこの観点からは、nonparametric なμの推定の場合には、BST法, BCa法 が PER法, BC法よりも良さそうである。なお、これよりも一般的な場合の漸近展開が、Hall [3] によって与えられている。[3] では、母数が分散の場合も含めて (4.2) の成立することが示されている。

5. 数値実験による検討

各方法による信頼区間の比較，検討を数値的に行なうために、第3節で述べた母平均，母分散の推定における、次のようなケースについて数値実験を行なった。

α = 0.05, 0.01 (信頼度)

n = 20, 40 (標本数)

B　=　200　　　　　　(Bootstrap の回数)

実験では、 α と n との4つの各組合せに対し、 500回の繰り返しを行なった。 また(4.1)と表1の値を参考にして、 母集団分布を次のように想定した。

i)　正規分布 N(0, 1)

ii)　自由度 2 の t 分布　　[平均 μ の推定の場合]

ii')　自由度 5 の t 分布　　[分散 σ^2 の推定の場合]

iii)　Weibull分布　$f(x)=0.5\cdot x^{-0.5}\exp[-x^{0.5}]$

参考のために、上の各分布の平均 μ, 分散 σ^2, 歪度 β_1, 尖度 β_2 の値を、 表2に与えておく。

表2. 各分布の母数の値

	μ	σ^2	β_1	β_2
N(0,1)	0	1	0	0
t(2)	0	–	–	–
t(5)	0	1.67	0	6
Weibull	2	20	6.62	84.72

以上の設定の下で行なった数値実験の結果は、図１～図10にまとめられている。

まず図１～図４は、各方法により作られた信頼区間の中に、母数θの値が含まれた割合（Coverage Probability）を表わしている。例えば信頼区間の構成を500回行なったとき、その内母数の値が400回だけ信頼区間に含まれたとすれば、この割合は 400／500＝0.80 となる。また図中の ○，△，□の印は、母集団の分布がそれぞれ規準正規分布，t分布，Weibull分布の場合であることを意味している（各分布の母数の値については表２を参照のこと）。

次に図５～図10は、各方法の下での平均的な信頼区間と、母数θの値が含まれなかった割合（％）を表わしている。２つの区間が上下に並べて図示されているが、上が$n=20$，下が$n=40$の場合である。この区間の端点は500回の繰り返しに亘る平均の値である。したがって示されている区間の長さは、500回に亘る信頼区間の長さの平均値になる。また区間の左側，右側に表示された数値は、それぞれ母数が信頼区間の左側，右側にはずれた回数の割合（％）を表わしている。

図1.　各方法による信頼区間に、母数θの値が含まれる割合

◇　μの推定　：　α＝０．０５　（Coverage Probability＝０．９０）

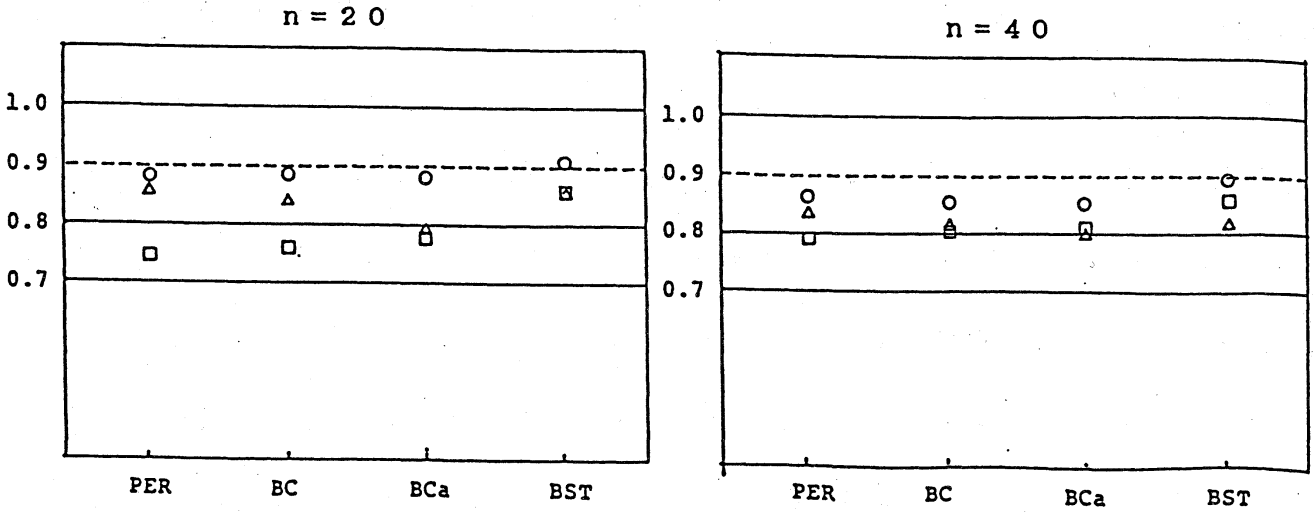


図2.　各方法による信頼区間に、母数θの値が含まれる割合

◇　μの推定　：　α＝０．０１　（Coverage Probability＝０．９８）

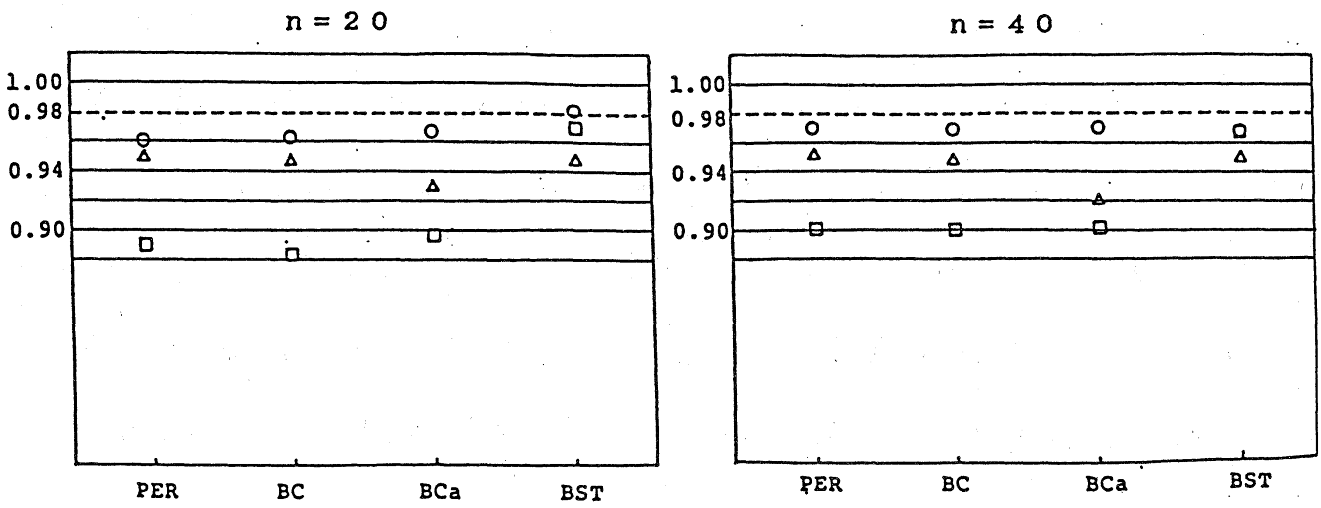


図3．　各方法による信頼区間に、母数θの値が含まれる割合

◇　σ^2の推定　：　α＝0．05　（Coverage Probability＝0．90）

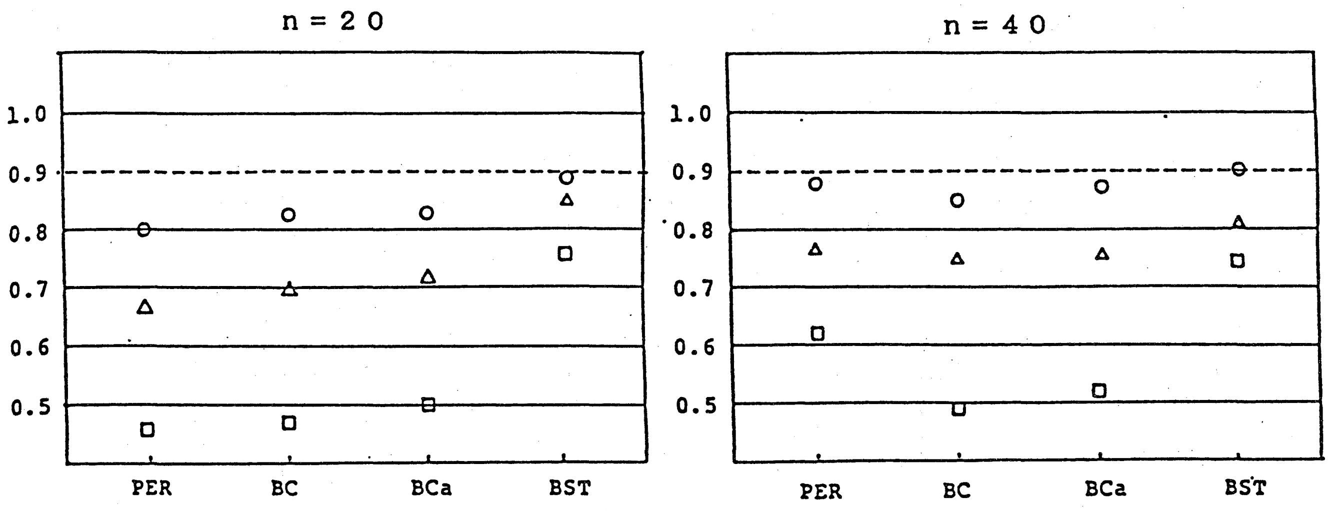


図4．　各方法による信頼区間に、母数θの値が含まれる割合

◇　σ^2の推定　：　α＝0．01　（Coverage Probability＝0．98）

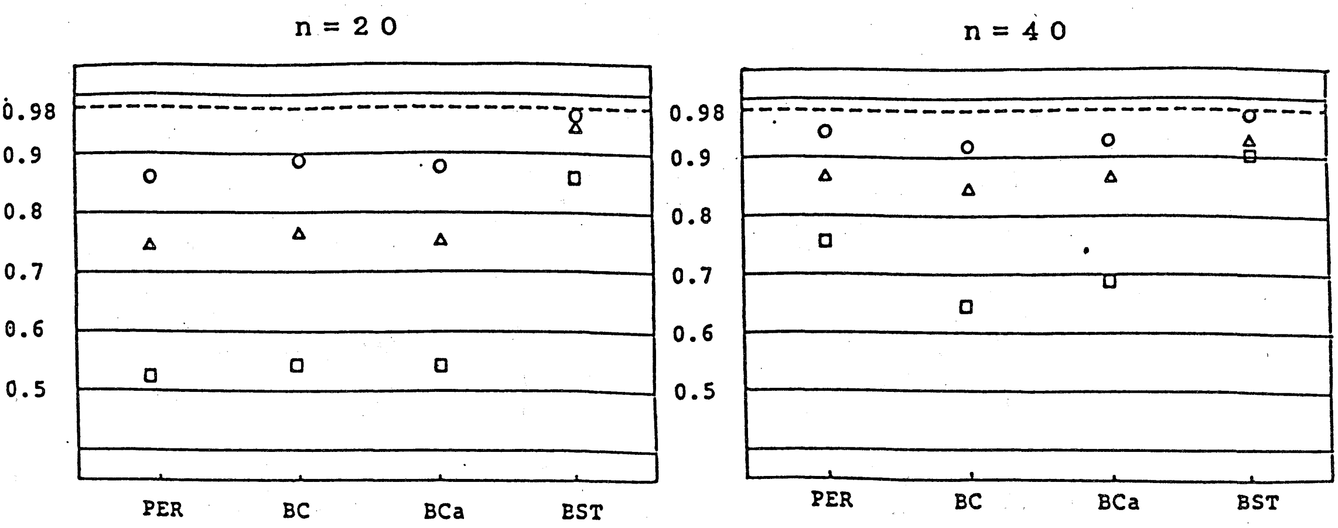


図5.　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　μの推定　：　正規分布 N（0，1）の場合

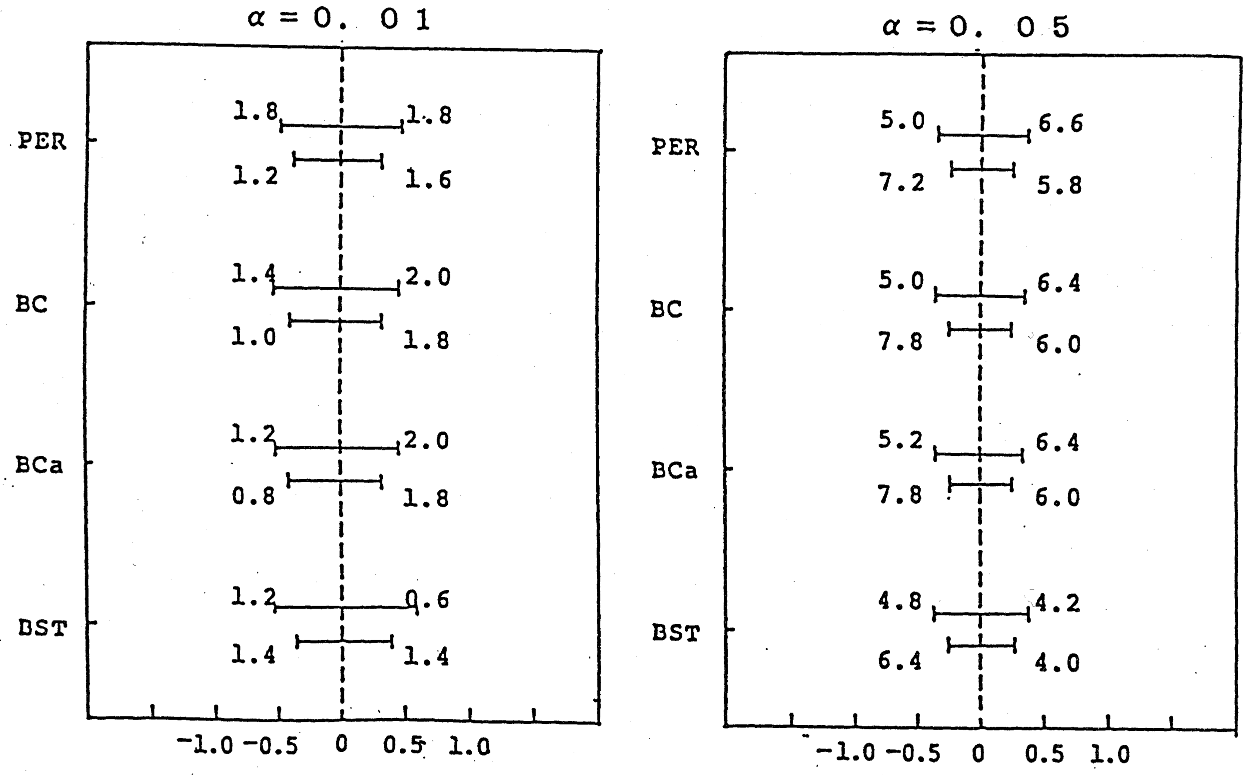


図6.　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　μの推定　：　自由度 2 のt分布の場合

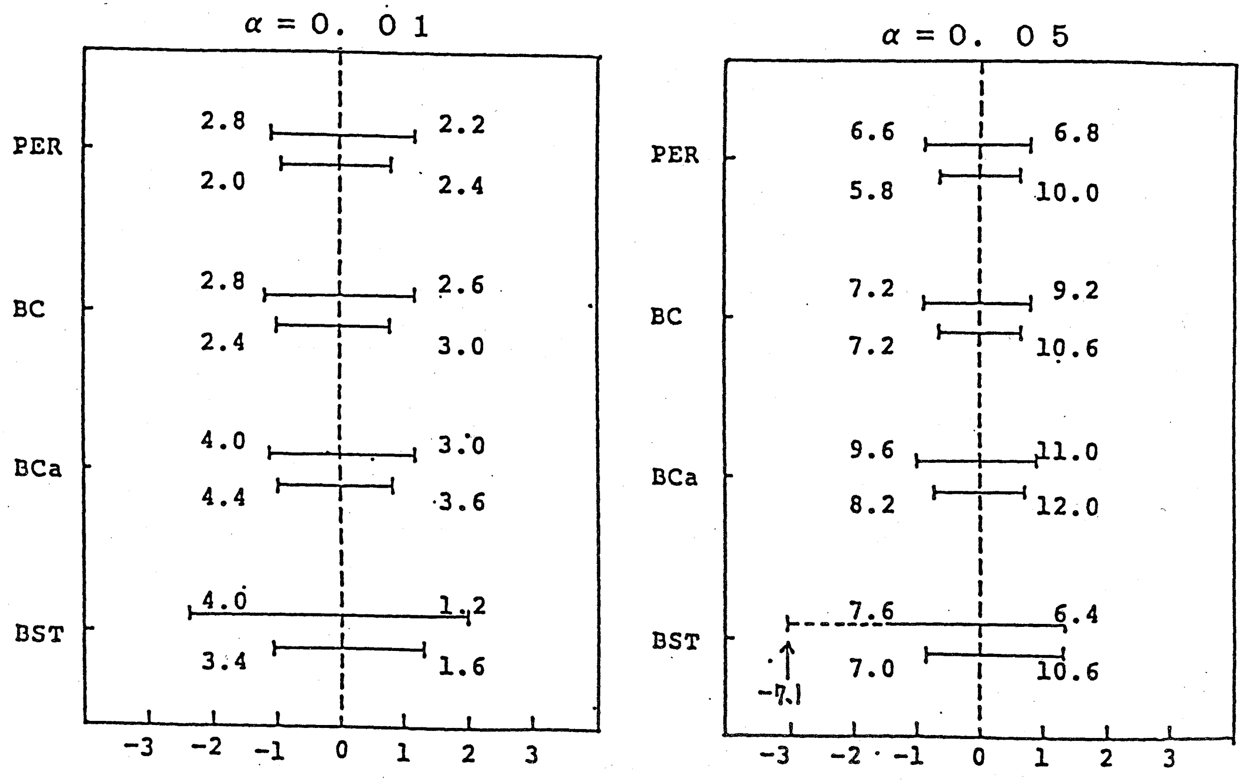
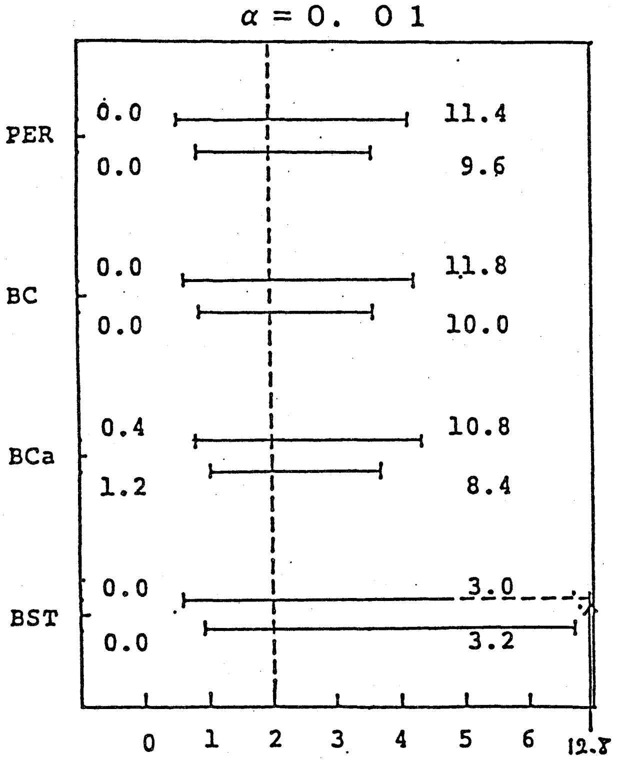


図７．　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　μの推定　：　Weibull分布　$f(x)=0.5\cdot x^{-0.5}\exp[-x^{0.5}]$ の場合



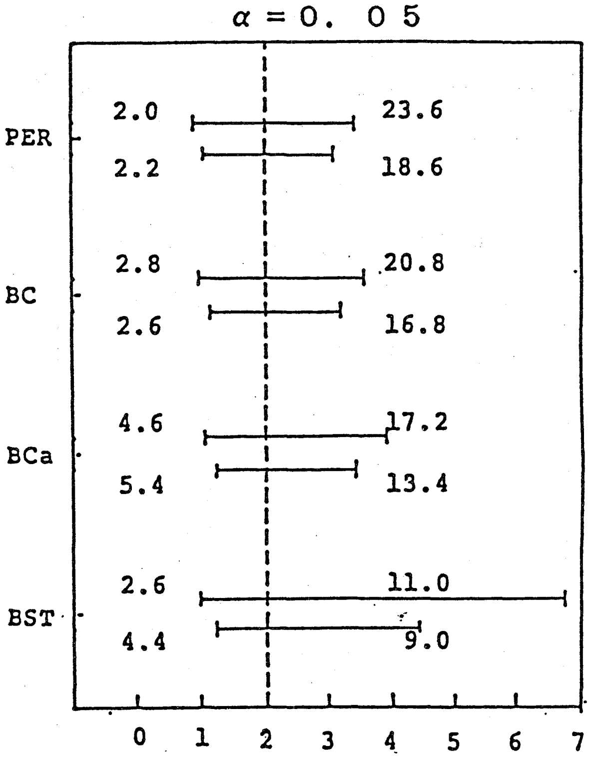
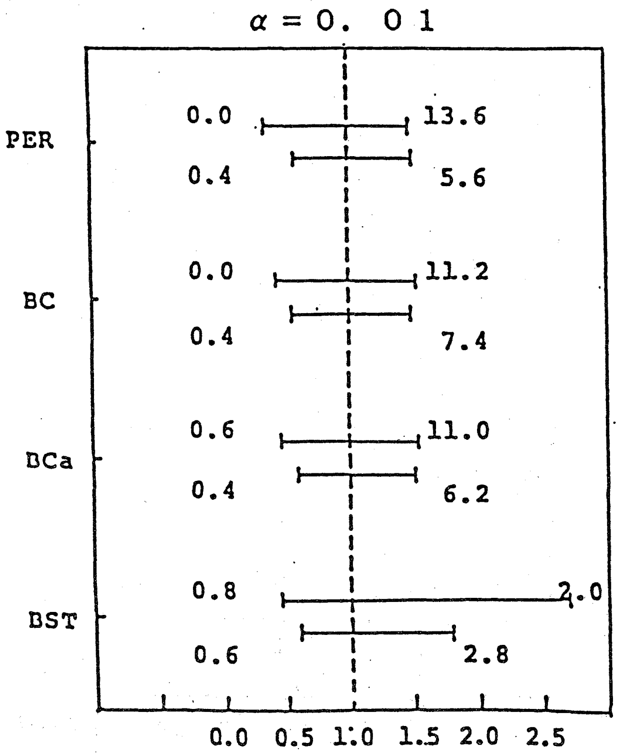


図８．　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　σ^2の推定　：　正規分布　Ｎ（０，１）の場合



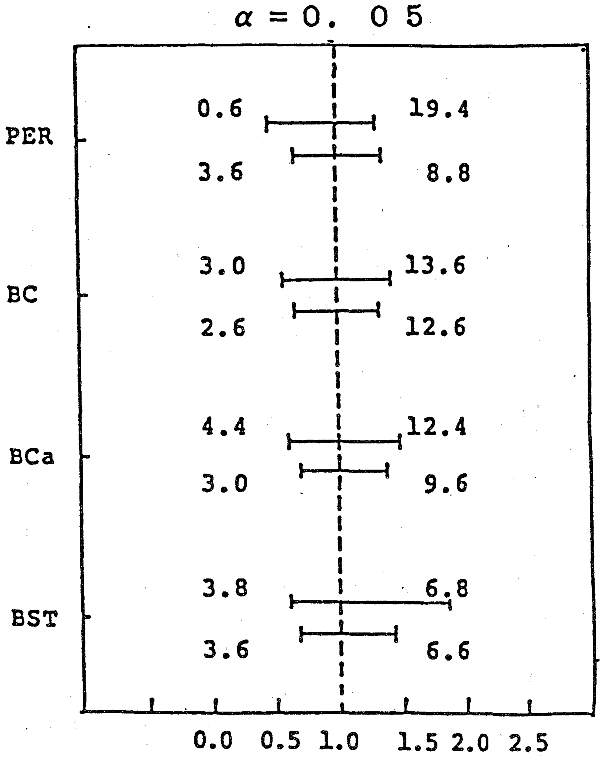


図９．　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　σ²の推定　：　自由度　５　のｔ分布の場合

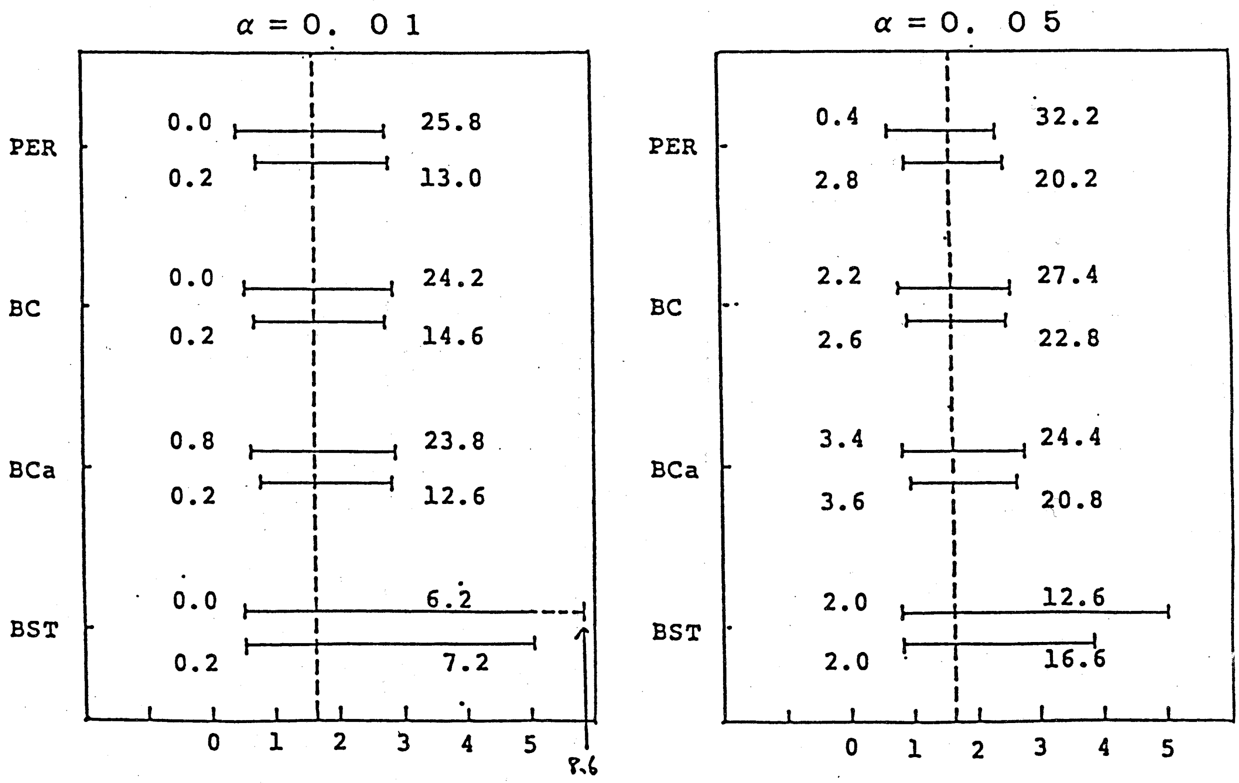
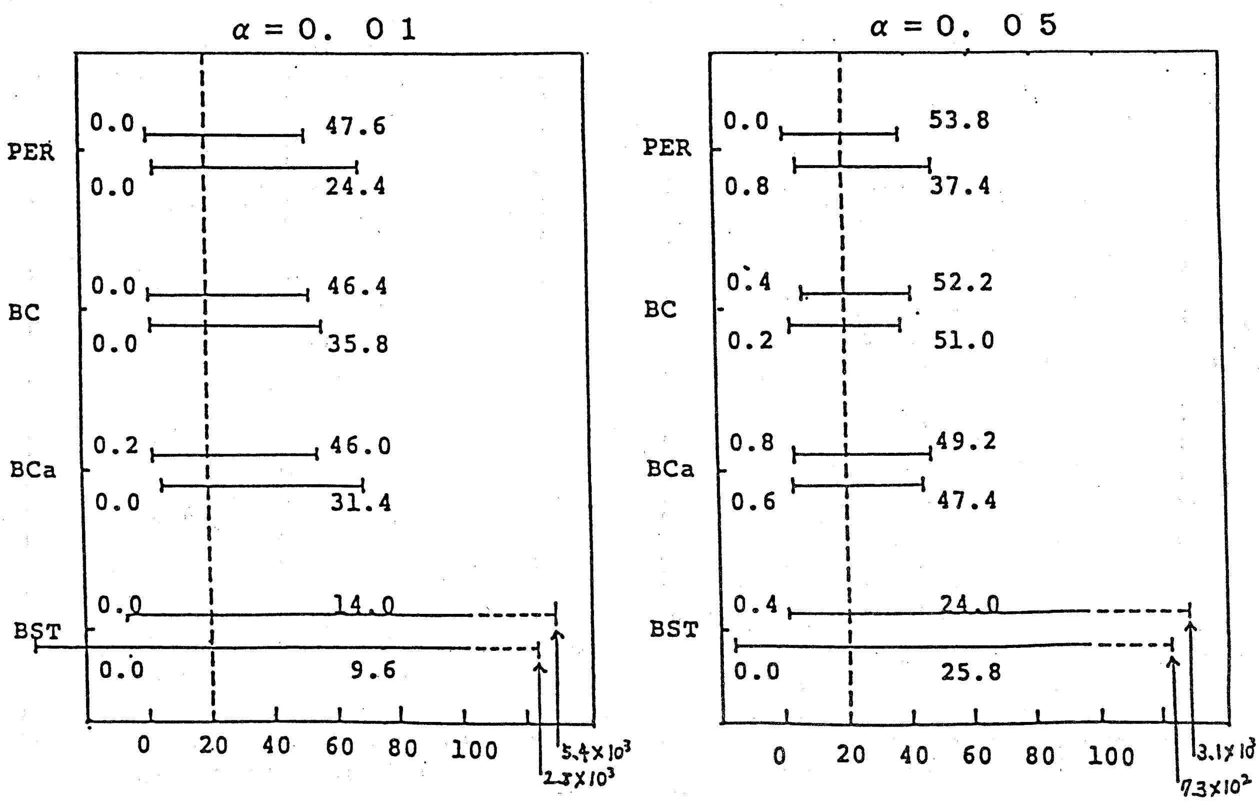


図10.　各方法による平均的な信頼区間と，母数θの値が含まれなかった割合（％）

◇　σ²の推定　：　Weibull分布　$f(x)=0.5\cdot x^{-0.5}\exp[-x^{0.5}]$　の場合



6. まとめと今後の検討課題

ここでは、前節で与えた実験結果から読み取れる事柄をまとめておく。

(1) 各方法の比較

(i) Coverage Probability については、平均μ, 分散σ^2の推定の場合とも、信頼区間に含まれる名目上の割合と実際の割合が最も近い方法は、BST法である。漸近展開の式からは、BST法とBCa法のどちらが良いかは判らないが((4.2)参照)、この実験では差が認められる。また漸近展開の式では、BCa法はBC法の改良になっているが(第4節参照)、この実験に関する限りでは、BCa法とBC法の間に大きな差は認められなかった。これは、second order の correctness が Coverage Probability の正確度に与える影響があまり大きくないためであろう(Hall [3], 4.5節 参照)。

(ii) 信頼区間の長さに関しては、母集団が正規分布から離れると、BST法は他の方法よりも長くなる。特にWeibull分布の場合は、μ, σ^2の推定の場合とも極端に長い。

(2) $n=20$ と $n=40$ の場合の比較

(i) Coverage Probability については、nが20から40に大きくなると、改善が見られる。特にσ^2の推定の場合は、各分布とも改善度が大きい。

(ii) 信頼区間の長さに関しては、nが20から40に大きくなると、σ^2の推定における Weibull 分布と自由度 5 の t 分布の場合を除けば、信頼区間の長さは短くなっている。

(3) 全体として、母集団が正規分布から離れているほど、得られる結果が悪い。特に、PER法，BC法，BCa法では Coverage Probability が悪く、BST法では信頼区間が長い。

最後に、今後の課題についてまとめておこう。

(a) この数値実験では、Coverage Probability が最も良かったのはBST法であったが、この方法を適用する際には、推定量θの分散の推定量をうまく選ばなければならない。母数が平均のような簡単な場合はよいとしても、一般の場合の分散の推定は難しいことが多い（Efron [2], p.199 の例を参照）。例えば、相関係数の推定にBST法を適用する場合、$\theta_{BST}[\alpha]$の構成には問題がある。これに対する解決法の1例は、Hall [3], Rejoinder に与えられている。

(b) 平均，分散に対する信頼区間を構成する際にBST法を適用する場合、Coverage Error（名目上の Coverage Probability と実際の Coverage Probability との差）がどの程度になるかは、一般には評価できない。母数が平均の場合で、標本数が大きな場合の評価式は Hall [3], p.949 に与えられている。しかし実際の場では、標本数がこの実験の

ように小さい、もしくは中程度の場合も多く現われる。このような状況の下では、上の評価式をそのまま適用することには問題がある。少なくとも、実際の Coverage Probability が(1-2α)より大きくなるか否かについての見当をつけることが望まれる。

参考文献

[1] Efron, B. (1982) : The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, SIAM, Philadelphia.

[2] Efron, B. (1987) : Better bootstrap confidence intervals (with discussion), JASA, Vol.82, pp.171-200.

[3] Hall, P. (1988) : Theoretical comparisons of bootstrap confidence intervals (with discussion), Ann. Statist., Vol.16, pp.927-985.