数理解析研究所講究録
682巻 1989年 38-51

Asymptotics for Jackknife Estimation under True and Assumed Models

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

高次漸近理論において漸近有効推定量を区別するために、漸近欠損性(asymptotic deficiency)の概念が有効である(e.g. Akahira, 1986). 一方 Quenouille (1949, 1956), Tukey (1958) によるジャックナイフ法は、最近 Efron (1982) の Bootstrap 法へと発展し、他のリサンプリング法等との比較検討も行われている. ここでは、高次漸近理論の観点からジャックナイフ推定量の漸近欠損量を、真のモデルおよび仮定されたモデルの下で求め、さらに仮定されたモデルの真のモデルからの「ズレ」についても考察する.

1. 設定

$X_1, \cdots, X_n$ がたがいに独立に、いずれも、ある σ-有限測度 μ に関する密度関数 $f(x, \theta, \xi)$ をもつ分布に従う確率変数

であると仮定する．ただしθを推定すべき母数とし、ξを局外母数とする．ここで、さらに条件(A.1)〜(A.5)を仮定する．

(A.1) 集合$\{x : f(x, \theta, \xi) > 0\}$が$\theta$と$\xi$に無関係である．

(A.2) ほとんどすべての$x\ [\mu]$について、$f(x, \theta, \xi)$はθとξに関して3回連続微分可能である．

(A.3) 各θとξについて

$$0 < I_{\alpha\alpha}(\theta, \xi) = E[\{l_\alpha(\theta, \xi, X)\}^2] = -E[l_{\alpha\alpha}(\theta, \xi, X)] < \infty \quad (\alpha = 0, 1)$$

である．ただし$l(\theta, \xi, x) = \log f(x, \theta, \xi)$, $l_0(\theta, \xi, x) = (\partial/\partial\theta)\,l(\theta, \xi, x)$, $l_{00}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\theta^2)\,l(\theta, \xi, x)$, $l_1(\theta, \xi, x) = (\partial/\partial\xi)\,l(\theta, \xi, x)$, $l_{11}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\xi^2)\,l(\theta, \xi, x)$とする．

(A.4) 母数(θ, ξ)が直交性をもつ．すなわち$E[l_{01}(\theta, \xi, X)] = 0$をもつ．ただし$l_{01}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\theta\partial\xi)\,l(\theta, \xi, x)$とする．

(A.5) $J_{000} = E[l_{00}(\theta, \xi, X)\,l_0(\theta, \xi, X)]$, $J_{001} = E[l_{00}(\theta, \xi, X)\,l_1(\theta, \xi, X)]$,

$J_{010} = E[l_{01}(\theta, \xi, X)\,l_0(\theta, \xi, X)]$, $J_{011} = E[l_{01}(\theta, \xi, X)\,l_1(\theta, \xi, X)]$,

$J_{110} = E[l_{11}(\theta, \xi, X)\,l_0(\theta, \xi, X)]$, $K_{000} = E[\{l_0(\theta, \xi, X)\}^3]$,

$K_{001} = E[\{l_0(\theta, \xi, X)\}^2\,l_1(\theta, \xi, X)]$,

$M_{0000} = E[\{l_{00}(\theta, \xi, X)\}^2] - I_{00}^2$,

$M_{0001} = E[l_{00}(\theta, \xi, X)\,l_{01}(\theta, \xi, X)]$,

$M_{0101} = E[\{l_{01}(\theta, \xi, X)\}^2]$

が存在し、かつ次のことが成り立つ．

$$E[l_{000}(\theta,\xi,X)] = -3J_{000} - K_{000}, \quad E[l_{001}(\theta,\xi,X)] = -J_{010},$$

$$E[l_{011}(\theta,\xi,X)] = -J_{011},$$

ただし $l_{000}(\theta,\xi,x) = (\partial^3/\partial\theta^3)\, l(\theta,\xi,x)$, $l_{001}(\theta,\xi,x) = (\partial^3/\partial\theta^2\partial\xi)\, l(\theta,\xi,x)$, $l_{011}(\theta,\xi,x) = (\partial^3/\partial\theta\partial\xi^2)\, l(\theta,\xi,x)$とする．

また

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} l_0(\theta,\xi,X_i), \qquad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} l_1(\theta,\xi,X_i),$$

$$Z_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\{l_{00}(\theta,\xi,X_i) + I_{00}\}, \quad Z_{01} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} l_{01}(\theta,\xi,X_i)$$

とする．

2. 真のモデルの下でのジャックナイフ推定量の漸近欠損量

この節では真の母数 $\theta=\theta_0$, $\xi=\xi_0$ をもつモデル（真のモデル）の場合について考える．簡単のために θ_0, ξ_0 を単にそれぞれ θ, ξ で表わすことにする．このとき $\hat{\theta}^*$, $\hat{\xi}^*$ をそれぞれ θ, ξ の大きさ n の標本 $X_1, \cdots, X_n$ に基づく最尤推定量とする．

定理 2.1．条件 (A.1)～(A.5) が成り立つと仮定する．このとき、真のモデル (θ,ξ) の下で、θ の最尤推定量 $\hat{\theta}^*$ は stochastic expansion

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{1}{\sqrt{n}}(Q_0 + Q_1) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

をもつ．ただし

$$Q_0 = \frac{1}{I_{00}^2}\left(Z_0 Z_{00} - \frac{3J_{000}+K_{000}}{2I_{00}} Z_0^2\right),$$

$$Q_1 = \frac{1}{I_{00}I_{11}} Z_1 \left(Z_{01} - \frac{J_{010}}{I_{00}} Z_0 - \frac{J_{011}}{I_{11}} Z_1 \right) + \frac{J_{011}}{2I_{00}I_{11}^2} Z_1^2$$

とする．

証明は Akahira (1986) の第４章で与えられている．

最尤推定量 $\hat{\theta}^*$ を、真のモデル (θ, ξ) の下で

$$E\left[\sqrt{n}(\hat{\theta}_0^* - \theta)\right] = o(1/\sqrt{n})$$

となるように偏りを修正した推定量 $\hat{\theta}_0^*$ を修正最尤推定量という．

定理 2.2. 条件 (A.1)〜(A.5) が成り立つと仮定する．このとき、真のモデル (θ, ξ) の下で、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_0^*$ の漸近欠損量 d は

$$\begin{aligned} d &= I_{00}\{V(Q_0)+V(Q_1)\} \\ &= \frac{1}{I_{00}^3}(I_{00}M_{0000} - J_{000}^2) + \frac{(J_{000}+K_{000})^2}{2I_{00}^3} + \frac{1}{I_{00}I_{11}}\left(M_{0101} - \frac{J_{010}^2}{I_{00}} - \frac{J_{011}^2}{I_{11}}\right) \\ &\qquad + \frac{J_{011}^2}{2I_{00}I_{11}^2} + o(1) \end{aligned}$$

によって与えられる．ただし $V(\cdot)$ は漸近分散を表わす．

証明は Akahira (1986) の第４章で与えられている．

定理 2.2 の漸近欠損量における項

$$M_{0101} - (J_{010}^2/I_{00}) - (J_{011}^2/I_{11})$$

が 0 となるための必要十分条件は、

$$l_{01}(\theta,\xi,x) = a_0(\theta,\xi) + a_1(\theta,\xi)\, l_0(\theta,\xi,x) + a_1(\theta,\xi)\, l_1(\theta,\xi,x) \quad \text{a.e. } [\mu]$$

が成り立つことである．ただし $a_i(\theta,\xi)\ (i=0,1,2)$ は θ と ξ のある関数で x に無関係とする．

次に、真のモデルの下で、θ のジャックナイフ推定量の漸近欠損量を求める．まず大きさ n の標本 $X_1,\cdots,X_n$ を大きさ h の g 個の標本 $\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_g$ に分割する、すなわち $n=gh$ で

$$\{X_1,\cdots,X_n\}=\bigcup_{i=1}^{g}\mathcal{X}_i\ ,\qquad \mathcal{X}_i\cap\mathcal{X}_j=\phi\quad(i\neq j)$$

とする．各 $i=1,\cdots,g$ に対して　$I_i=\{j:X_j\in\mathcal{X}_i\}$ とおく．また各 $i=1,\cdots,g$ について、$\hat{\theta}^{(i)}$ を大きさ h の i 番目の標本 $\mathcal{X}_i$ を除いた大きさ $(g-1)h$ の標本に基づく、θ の最尤推定量とする．各 i について　$\tilde{\theta}_i=g\hat{\theta}^*-(g-1)\hat{\theta}^{(i)}$ とおくとき、θ のジャックナイフ推定量

$$\tilde{\theta}=\Big(\sum_{i=1}^{g}\tilde{\theta}_i\Big)/g$$

について考える．

<u>定理2.3.</u> 条件(A.1)～(A.5)が成り立つと仮定する．このとき、真のモデル (θ,ξ) の下で、ジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}$ の stochastic expansion は

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{\sqrt{n}}{n-h}(\tilde{Q}_0+\tilde{Q}_1)+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

であり、さらに $h=o(n)$ ならば

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{1}{\sqrt{n}}(\tilde{Q}_0+\tilde{Q}_1)+o_p\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

である．

ただし
$$\tilde{Q}_0 = \frac{1}{I_{00}^2}\left(W_{000} - \frac{3J_{000}+K_{000}}{2I_{00}}W_{00}\right),$$
$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{I_{00}I_{11}}\left(W_{011} - \frac{J_{010}}{I_{00}}W_{01} - \frac{J_{011}}{I_{11}}W_{11}\right) + \frac{J_{011}}{2I_{00}I_{11}^2}W_{11},$$
$$W_{00} = \frac{1}{n}\sum\sum_{i\neq j}\sum_{k\in I_i} l_0(\theta,\xi,X_k)\sum_{k\in I_j} l_0(\theta,\xi,X_k),$$
$$W_{01} = \frac{1}{n}\sum\sum_{i\neq j}\sum_{k\in I_i} l_0(\theta,\xi,X_k)\sum_{k\in I_j} l_1(\theta,\xi,X_k),$$
$$W_{11} = \frac{1}{n}\sum\sum_{i\neq j}\sum_{k\in I_i} l_1(\theta,\xi,X_k)\sum_{k\in I_j} l_1(\theta,\xi,X_k),$$
$$W_{000} = \frac{1}{n}\sum\sum_{i\neq j}\sum_{k\in I_i} l_0(\theta,\xi,X_k)\sum_{k\in I_j} \{l_{00}(\theta,\xi,X_k)+I_{00}\},$$
$$W_{011} = \frac{1}{n}\sum\sum_{i\neq j}\sum_{k\in I_i} l_0(\theta,\xi,X_k)\sum_{k\in I_j} l_{01}(\theta,\xi,X_k)$$
とする．

証明は、定理2.1の結果と
$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta) = g\sqrt{n}(\hat{\theta}^*-\theta) - \sqrt{\frac{n}{n-h}}(g-1)\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}\sqrt{n-h}(\hat{\theta}^{(i)}-\theta)$$
となることから得られる．

定理2.3から、真のモデル(θ,ξ)の下で、
$$E[\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)] = o(1/\sqrt{n})$$
となるから、ジャックナイフ推定量は、今の場合、偏りを修正する必要はなく、このことは最尤推定量と異なることである．

<u>定理2.4.</u> 条件(A.1)〜(A.5)が成り立つと仮定する．このとき、$h=o(n)$ならば、真のモデル(θ,ξ)の下で、ジャックナイフ推定量$\tilde{\theta}$の漸近欠損量$\tilde{d}$は、

$$\tilde{d}=I_{00}\{V(\tilde{Q}_0)+V(\tilde{Q}_1)\}=I_{00}\{V(Q_0)+V(Q_1)\}$$

$$=\frac{1}{I_{00}^3}(I_{00}M_{0000}-J_{000}^2)+\frac{(J_{000}+K_{000})^2}{2I_{00}^3}+\frac{1}{I_{00}I_{11}}\left(M_{0101}-\frac{J_{010}^2}{I_{00}}-\frac{J_{011}^2}{I_{11}}\right)$$

$$+\frac{J_{011}^2}{2I_{00}I_{11}^2}+o(1)$$

であり、修正最尤推定量$\hat{\theta}_0^*$に対するジャックナイフ推定量$\tilde{\theta}$の漸近欠損量は0である．

証明については、ジャックナイフ推定量$\tilde{\theta}$の漸近欠損量は$I_{00}V(\tilde{Q}_0+\tilde{Q}_1)$となり、$\tilde{Q}_0$と$\tilde{Q}_1$の定義と定理2.2から導かれる．

<u>注意</u>．定理2.4において、$h=cn$ $(0<c\leq 1/2)$の場合を考えると、θのジャックナイフ推定量$\tilde{\theta}$のstochastic expansionは、

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{1}{(1-c)\sqrt{n}}(\tilde{Q}_0+\tilde{Q}_1)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

になり、$\tilde{\theta}$の漸近欠損量$\tilde{d}_c$は

$$\tilde{d}_c=\frac{I_{00}}{(1-c)^2}\{V(\tilde{Q}_0)+V(\tilde{Q}_1)\}$$

となる．このとき、定理2.4から$\tilde{d}<\tilde{d}_c$となることが分かり、さらに修正最尤推定量$\hat{\theta}_0^*$に対するジャックナイフ推定量の漸近欠損量は

$$\left\{\frac{1}{(1-c)^2}-1\right\} I_{00}\left\{V(Q_0)+V(Q_1)\right\} \qquad \left(0<c\leq\frac{1}{2}\right)$$

となり、これが非負の値になることが分かる．従って、$h=cn$ $(0<c\leq 1/2)$ の場合には、真のモデルの下で、ジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}$ が修正最尤推定量 $\hat{\theta}_0^*$ よりも漸近的に n^{-1} の次数まで悪い．

3. 仮定されたモデルにおける漸近欠損性

この節では、真の母数 $\theta=\theta_0$, $\xi=\xi_0$ をもつモデルに対する仮定されたモデルとして $\theta=\theta_0$, $\xi=0$ を考える．ここでは $\xi_0=t/\sqrt{n}$ $(-\infty<t<\infty)$ と仮定する．これ以後、簡単のために θ_0, ξ_0 をそれぞれ θ, ξ で表わす．仮定されたモデル $(\theta, 0)$ の下で、大きさ n の標本 $X_1, \cdots, X_n$ に基づく、θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_*$ とする．

定理 3.1. 条件 (A.1) ～ (A.5) が成り立つと仮定する．このとき、仮定されたモデル $(\theta, 0)$ の下で、θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_*$ は stochastic expansion は

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_*-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{1}{\sqrt{n}}Q_0+\frac{1}{\sqrt{n}}(L-c)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

によって与えられる．ただし Q_0 は定理 2.1 において与えられたもので

$$L = \frac{t}{I_{00}}\left(\frac{J_{010}}{I_{00}}Z_0 - Z_{01}\right), \quad c = \frac{J_{011}}{2I_{00}}t^2$$

とする．

証明は、$\sum_{i=1}^{n} l_0(\hat{\theta}_*, 0, X_i) = 0$ を (θ, ξ) の周りで Taylor 展開することによって得られる．

最尤推定量 $\hat{\theta}_*$ を、仮定されたモデル $(\theta, 0)$ の下で

$$E[\sqrt{n}(\hat{\theta}_*^0 - \theta)] = o(1/\sqrt{n})$$

となるように偏りを修正した推定量 $\hat{\theta}_*^0$ を修正最尤推定量という．

次に、仮定されたモデル $(\theta, 0)$ の下で、ジャックナイフ推定量を考える．各 $i=1, \cdots, g$ に対して、$\hat{\theta}_*^{(i)}$ を大きさ h の i 番目の標本 x_i を除いた大きさ $(g-1)h$ の標本に基づく θ の最尤推定量とする．各 i について $\tilde{\theta}_i^* = g\hat{\theta}_* - (g-1)\hat{\theta}_*^{(i)}$ とおくとき、θ のジャックナイフ推定量

$$\tilde{\theta}_* = \left(\sum_{i=1}^{g} \tilde{\theta}_i^*\right)/g$$

について考える．このとき、仮定されたモデル $(\theta, 0)$ の下で $E[\sqrt{n}(\tilde{\theta}_* - \theta)] = o(1/\sqrt{n})$ となる．ここでさらに次の条件を仮定する．

(A. 6) $\quad J_{011} = 0$.

条件 (A.6) は、次の条件 (A.6)′ が満たされるとき、成り立つ．

(A. 6)′ θ が位置母数、すなわち $f(x, \theta, \xi) = f(x-\theta, \xi)$ a.e. $[\mu]$ でかつ $f(x, \xi)$ が対称性をもつ、すなわち

$f(x,\xi)=f(-x,\xi)$ a.e. $[\mu]$ である．

定理 3.2．条件 (A.1)～(A.6) が成り立つと仮定する．このとき、仮定されたモデル $(\theta,0)$ の下で、θ のジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}_*$ は、次の stochastic expansion

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_*-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{\sqrt{n}}{n-h}\tilde{Q}_0+\frac{1}{\sqrt{n}}L+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

をもち、さらに $h=o(n)$ ならば

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_*-\theta)=\frac{Z_0}{I_{00}}+\frac{1}{\sqrt{n}}(\tilde{Q}_0+L)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

である．

定理 3.3．条件 (A.1)～(A.6) が成り立つと仮定する．このとき、仮定されたモデル $(\theta,0)$ の下で、ジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}_*$ に対する修正最尤推定量 $\hat{\theta}_*^0$ の漸近欠損量は 0 である．

定理 3.2 の証明は定理 2.3 の証明と同様にして得られ、定理 3.3 の証明は Akahira (1986) の定理 2.3.1 を用いて導かれる．

定理 3.4．条件 (A.1)～(A.5), (A.6)$'$ が成り立つと仮定する．このとき、$h=o(n)$ ならば、真のモデル (θ,ξ) の下でのジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}$（または最尤推定量 $\hat{\theta}^*$）に対する、仮定されたモデル $(\theta,0)$ の下でのジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}_*$（または最尤推定量 $\hat{\theta}_*$）の漸近欠損量 D は

$$D = \frac{1}{I_{00}^2}\left(t^2 - \frac{1}{I_{11}}\right)\left(I_{00}M_{0101} - J_{010}^2\right)$$

によって与えられる.

証明は、定理2.4, 3.2, 3.3 から導かれる. 定理3.4において、条件(A.6)′が仮定されているから分布の対称性によって最尤推定量を偏り修正する必要がない. また定理3.4の漸近欠損量において t^2の項は仮定されたモデルの真のモデルに対する「ズレ」によると考えられ、$1/I_{11}$ は未知の局外母数の存在による推定誤差を表わしていると見なされる. さらに、$I_{00}M_{0101} - J_{010}^2 \geq 0$ であるから $t^2 < 1/I_{11}$ のとき $D<0$ にもなり得る.

4. 例

$f_1(x)$を正規分布 $N(0,1)$の密度とし、$f_0(x)$を自由度αのt分布の密度、すなわち

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{(\alpha+1)/2}} \qquad (-\infty<x<\infty;\ \alpha=1,2,\cdots)$$

とする. ただし $B(a,b)$ はベータ関数とする.

このとき f_0 と f_1 の次のような混合密度

$$f(x,\xi) = C(\xi)\{f_1(x)\}^{\xi}\{f_0(x)\}^{1-\xi} \quad (-\infty<x<\infty;\ 0\leq\xi\leq 1)$$

を考える. ただし $C(\xi)$は $C(0)=C(1)=1$ を満たすある定数と

する．このとき

$$f(x,\xi)=K(\xi)\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{(\alpha+1)(\xi-1)/2} e^{-\frac{\xi x^2}{2}}, \quad (-\infty<x<\infty)$$

となる．ただし $0\leq\xi\leq1$ で $K(\xi)=C(\xi)(1/\sqrt{2\pi})^{\xi}\{\sqrt{\alpha}B(\alpha/2,1/2)\}^{\xi-1}$ とする．

今、$X_1,\cdots,X_n$ がたがいに独立にいずれも密度

$$f(x-\theta,\xi)=K(\xi)\left\{1+\frac{(x-\theta)^2}{\alpha}\right\}^{(\alpha+1)(\xi-1)/2} e^{-\xi(x-\theta)^2/2}, \quad (-\infty<x<\infty)$$

をもつ分布に従う確率変数とする．

このとき条件 (A.1) ～ (A.5), (A.6)′ は満たされるから、定理 3.4 によって、$h=o(n)$ ならば真のモデル (θ,ξ) の下でのジャックナイフ推定量（または最尤推定量）に対する、仮定されたモデル $(\theta,0)$ の下でのジャックナイフ推定量（または最尤推定量）の漸近欠損量 D は

$$D=\frac{1}{I_{00}^2}\left(t^2-\frac{1}{I_{11}}\right)\left(I_{00}M_{0101}-J_{010}^2\right)$$

で与えられる．ただし $\xi=t/\sqrt{n}$ とする．

まず、上のような混合分布の場合には、$\alpha=3,4,\cdots$ に対して

$$\frac{1}{I_{00}^2}\left(I_{00}M_{0101}-J_{010}^2\right)=\frac{6(\alpha+3)}{(\alpha+1)^2(\alpha-2)}=k_\alpha \ (\text{say})$$

となり、この k_α の数値は次の表のようになる．

α	3	4	5	6	7	8	9	10	16	20	25	50	∞
k_α	2.251	0.840	0.444	0.276	0.188	0.136	0.103	0.080	0.024	0.017	0.011	0.003	0

表 4.1.

なお $\alpha=1,2$ に対して、形式的には $k_\alpha=\infty$ となる.

また $\alpha>4$ について

$$I_{11}(\theta,0)=\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2(\alpha-2)^2(\alpha-4)}+\frac{(\alpha+1)^2}{4}V_{f_0}\left(\log\left(1+\frac{X^2}{\alpha}\right)\right)$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha-2)}E_{f_0}\left[\log\left(1+\frac{X^2}{\alpha}\right)\right]-\frac{\alpha+1}{2}E_{f_0}\left[X^2\log\left(1+\frac{X^2}{\alpha}\right)\right]$$

となる. ただし $E_{f_0}(\cdot)$, $V_{f_0}(\cdot)$ はそれぞれ密度 $f_0(x)$ の下での平均と分散を表わす.

特に $\alpha=5$ のとき $I_{11}(\theta,0)\fallingdotseq 27.700$ となり、表 4.1 より $k_5=0.444$ であるから、その漸近欠損量は

$$D\fallingdotseq 0.444(t^2-0.036)$$

になる.

References

Akahira, M.(1986). The Structure of Asymptotic Deficiency of Estimators. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics No.75, Queen's University Press, Kingston, Ontario, Canada.

Efron, B.(1982). The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans. CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 38, SIAM, Philadelphia.

Quenouille, M.(1949). Approximate tests of correlation in time series. J. Roy. Statist. Soc., Ser.B, 11, 18-84.

Quenouille, M.(1956). Notes on bias in estimation. Biometrika, 43, 353-360.

Tukey, J.(1958). Bias and confidence in not quite large samples. Abstract, Ann. Math. Statist., 29, 614.