数理解析研究所講究録
683巻 1989年 85-90

Cauchy問題の解の特異性の伝播について

千葉大理学部　筒井 亨 (Toru Tsutsui)

複素領域での Cauchy 問題の解がどこに特異性を持つのか初期 data の singular locus が nonsingular でない場合、依然不明である。一例として、$\mathbb{C}^3\ (\ni(t,x,y))$ で Cauchy 問題

$$(1)\quad \begin{cases} (D_t-D_x-D_y)(D_t+D_x+D_y)u(t,x,y)=0 \\ u(0,x,y)=0 \\ D_t u(0,x,y)=\dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

を挙げる。この解は、

$$u(t,x,y)=\int_0^t \frac{d\tau}{(x-t+2\tau)(y-t+2\tau)}$$

$$=\frac{1}{2(x-y)}\{\log(x-t)-\log(y-t)+\log(y+t)-\log(x+t)\}$$

であって、初期 data の singular locus を通る characteristic surface $x\pm t=0$, $y\pm t=0$ 以外に $x-y=0$ 上に特異性を持つ（すなわち、解 u にとっては、初期面の乗っている branch においてだけ、たまたま singular locus $x-y=0$ が消えているに過

ぎない).

このような現象をどう理解すべきなのか,実はよくわからない。ただし,次のようなことは成り立つ。

$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の原点の近傍 Ω における正則関数係数 m 階線型偏微分作用素,

$$P(x,D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ \alpha_0 \leqq m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ただし,

$$x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_0, x'), \quad a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

を考える。

仮定1. $|\alpha| = m \Rightarrow a_\alpha(x) \equiv a_\alpha \in \mathbb{C}$

$S = \{x_0 = 0\}$, V を $S \cap \Omega$ 内の codim. 1 の analytic subset とし,その既約分解(原点での germ の意味で)を

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$$

$$V_\nu = \{x' \in S \cap \Omega \mid f_\nu(x') = 0\} \quad (\nu = 1, \cdots, N)$$

とする。$\Omega \cap (S \setminus V)$ の universal covering space 上で正則な函数 $w_h(x')$ $(0 \leqq h \leqq m-1)$ に対して Cauchy 問題

$$(2) \quad \begin{cases} P(x,D)u(x) = 0 \\ D_0^h u(0,x') = w_h(x') & (0 \leqq h \leqq m-1) \end{cases}$$

を考える。さらに次の仮定を置く。

仮定2. 主シンボル $g(\xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ は $\mathbb{C}[\xi_0, \cdots, \xi_n]$ 内

で1次式の積に分解する：

$$g(\xi)=\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_0-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ji}\xi_i\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_0-\langle\lambda_j,\xi'\rangle\right)$$

ただし，$\lambda_j=(\lambda_{j1},\lambda_{j2},\cdots,\lambda_{jn})\in\mathbb{C}^n$，$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ と置いた。

仮定3 各 V_ν ($\nu=1,\cdots,N$) は，$x=0$ で非特異，すなわち，

$$\operatorname{grad} f_\nu(0)=\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(0),\cdots,\frac{\partial f_\nu}{\partial x_n}(0)\right)\neq 0$$

仮定4．特性根は単純：すなわち，$\forall j\neq j'$，$\forall\nu=1,\cdots,N$ に対して，

$$\langle\lambda_j,\operatorname{grad} f_\nu(0)\rangle\neq\langle\lambda_{j'},\operatorname{grad} f_\nu(0)\rangle$$

各 $\nu=1,\cdots,N$ に対して，V_ν を通る特性超曲面 K_ν を

$$\begin{cases}\dfrac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_0}(x)-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ji}\frac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_i}(x)=0\\ k_{j\nu}(0,x')=f_\nu(x')\end{cases}$$

の正則解 $k_{j\nu}(x)$ によって，$K_{j\nu}=\{k_{j\nu}(x)=0\}$ で定義する．

さらに，超曲面 $K'_{j,JJ',\mu\nu}$ ($j,J,J'=1,\cdots,m$，$J\neq J'$，$\mu,\nu=1,\cdots,N$，$\mu\neq\nu$) を，

$$K'_{j,JJ',\mu\nu}=\{c_{j,JJ',\mu}(x)k_{j\nu}(x)=c_{j,JJ',\nu}(x)k_{j\mu}(x)\}$$

ただし，

$$c_{j,JJ',\mu}(x)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{Ji}-\lambda_{J'i})\partial_i k_{j\mu}(x)$$

で定義する．$K'_{j,JJ',\mu\nu}$ は $\xi_0-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ji}\xi_i$ に関して特性的であるが，$V_1,\cdots,V_N$ を通らない。

$K_j=\bigcup_{\nu=1}^{N}K_{j\nu}$，$K'_j=\bigcup_{J\neq J'}\bigcup_{\mu\neq\nu}K'_{j,JJ',\mu\nu}$ と置く。($N=1$ ならば $K'_j=\phi$ に注意)．

定理 以上の仮定の下で Cauchy 問題(2)の unique な

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{j=1}^{h} u_j(x)$$
$$u_j(x) \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega' \setminus (K_j \cup K_j'))$$

と書ける。ここで，Ω' は Ω に含まれる $x=0$ の近傍。

証明は Wagschal の idea によって逐次近似によって成される。だが，いかにも仮定が多すぎるし，その仮定は証明がうまくいくために付けたものにほかならない。

すでに V が非特異な超曲面が交叉したものだという仮定自体，本質をついていないものの様に思える。

例を挙げよう。

$$(3)\quad \begin{cases} (D_t - D_x)(D_t - D_y)u(t,x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = 0 \\ D_t u(0,x,y) = (x^2 - y^3)^\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

解は，$x^2 - y^3 = 0$ を通る characteristic surface

$$f_1 = x^2 - (y+t)^3 = 0$$
$$f_2 = (x+t)^2 - y^3 = 0$$

上に singularity を持つことは確実であるが，それ以外にどこに singularity を持つか？ (3) の解 u は次の積分で与えられる。

$$u(t,x,y) = \int_0^t \{(x+t-s)^2 - (y+s)^3\}^\lambda ds$$

この関数 u の特異性は，被積分関数の特異点集合

$$F(\zeta) = (x+t-\zeta)^2 - (y+\zeta)^3 = 0$$

において，まず，ζ が端点と一致するという条件から

$$V(f_1) = \{f_1 = 0\} \qquad V(f_2) = \{f_2 = 0\}$$

(end point singularity) および $F(\zeta)$ の判別式集合上に現れる (pinching singularity) (cf. Kobayashi, Math. Ann. 269, 217–234 (1984)). $F(\zeta)$ の判別式を計算してみると

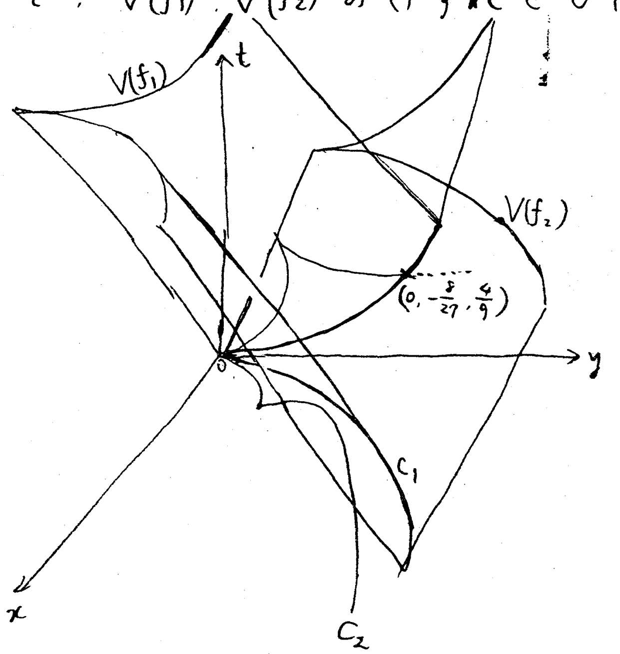
$$(x+y+t)^3\{4-27(x+y+t)\}$$

であるから，次の2つの集合上にも解 u の特異性がある。

$$V(f_3) = \{f_3 = x+y+t = 0\}$$

$$V(f_4) = \left\{f_4 = x+y+t-\frac{4}{27} = 0\right\}$$

$V(f_3)$, $V(f_4)$ は $(D_t - D_x)$, $(D_t - D_y)$ のいずれに対しても特性的。$V(f_3)$ は初期 data の singular locus $t = x^2 - y^3 = 0$ の特異点 $t = x = y = 0$ を通る。又，$V(f_4)$ は点 $(t, x, y) = (0, -\frac{8}{27}, \frac{4}{9})$ において，$V(f_1)$, $V(f_2)$ のいずれとも接している。



なお，図で C_1，C_2 と書いたのは

$$V(f_1, f_2) = C_1 \cup C_2$$

$$C_1 = \{t = x^2 - y^3 = 0\}$$

$$C_2 = \{x^2 - (y+t)^3 = (3y^2+2x) + (3y+1)t + t^2 = 0\}$$

と2つの既約成分に分かれるから，それを大体書き込んだものである．

$\mathbb{C}^{n+1}$ 内での原点の近傍で正則な関数を係数とする偏微分作用素 $P(x, D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_0 \le m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$ の主表象 $g(x, \xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ に対して $g(0, x'; \xi)$ の ξ_0 の多項式としての判別式を $h(x', \xi')$ とする．初期 data $w_h(x')$ の特異点集合を $V = \{f(x') = 0\}$ とし，それに対して解 u の特異点集合を Σ とすると，以上の例で見たように，$\Sigma_0 = \Sigma \cap \{t = 0\}$ は必ずしも V と一致しないが，次のように予想している．

予想　Σ_0 は V と $h(x', \xi')$ とから構成できる．