数理解析研究所講究録
683巻 1989年 76-84

Painlevé 方程式の第2種特異について

神戸大理 高野 恭一 (Kyoichi Takano)

λを未知関数, tを独立変数とするPainlevé方程式 P_J ($J=$ I, …, VI)は、あるHamilton系 (H_J): $d\lambda/dt=\partial H_J/\partial\mu$, $d\mu/dt=-\partial H_J/\partial\lambda$ に同値であることがK. Okamoto ([2]) によって示された. ここで H_J はλ, μの多項式(特にμについては2次式)で係数はtの有理関数である. このHamilton系をOkamotoに従ってPainlevé系ということにする. P_Jを2連立系に書き換える方法はいくらでもあるが、Painlevé系への書き換えは対称性が高く最も優れていると思われる.

P_Jの動かない特異点を、Painlevé系を用いて、第1種と第2種とに分類する。すなわち、その点におけるPoincaré階数が0のとき第1種、1以上のとき第2種とする. 線形常微方程式の場合に準じて、確定型、不確定型ともいわれるが、著者はこういうことにする.

P_Jすなわち(H_J)の動かない特異点における解の2パラメータ族を構成すること、いいかえれば、適当な双正則変換によ

り求積可能な方程式に変換することを考える。このことについては、最近 S. Shimomura, S. Yoshida と共著で「数学」に論説を書いたので、なるべく繰返しはさけるが、ともかく Painlevé 方程式に対してはこのことが可能であることはわかっている。(H_V) の第2種特異点 $t=\infty$ において形式変換が収束することを始めて示したとき([3])、Poincaré 条件が満たされないのに何故収束するのかという理由ははっきりしてはいたが、(H_V) そのものを扱っていたため、一体どのような方程式に対して同様のことがいえるのかは不明であった。その後 S. Yoshida ([5]) によりこの点に関しての解答が与えられ、Painlevé 方程式の第2種特異点はすべて統一的に扱うことが可能となった。

ところで Painlevé 系の第1種特異点については、正準変数を適当にとることにより H_J を求積可能な標準形にできるということが、一般の Hamilton 系に対する定理という形で明らかにされた([1], [4])。すなわち $t=0$ を $H=H(t,q,p)$ の第1種特異点とするとき、tH が非有界領域

$$\{(t,q,p)\in\mathbb{C}^3 \mid |t|<r,\ |q|,|tp|,|qp|<\rho\}$$

において有界ならば、形式的正準変換も同様の領域で収束するという定理である。これは Hamilton 関数の性質が形式的正準変換の収束域に遺伝するというように理解できる。これ

と同様のことがPainlevé系の第2種特異点に関してもいえないかということが当然考えられる．これについて著者としては満足できる結果が得られたので以下報告する．

Painlevé系において、第1種特異点とは異なり、第2種特異点は、我々の立場からは歪んで退化しているので簡単ではないが、S. Yoshidaの論文[6]における変換を参考にして、すなわち大体は[6]の変換を正準変換でおきかえると、各H_Jは独立変数tと正準変数q, pを適当にとることにより、次のように表わされることがわかる（第2種特異点は∞に移して考えるという習慣に従い、以下$t=\infty$が特異点であることに注意する）：

$$H = \lambda q p + H'(t, q, p).$$

ここで

(i) $\lambda \neq 0$は定数，

(ii) tH'は$D(\theta, \Theta, R, \rho) := \{(t, q, p) \in \mathbb{C}^3 \mid |t| > R,\ \theta < \arg t < \Theta,\ |q|, |t^{-1}p|, |qp| < \rho\}$で有界，正則で

(1) $$tH' = \sum_{i,j \geq -1} h_{ij}(t) q^{i+1} p^{j+1}$$

とTaylor展開したとき、$h_{ij}(t)$は$S(\theta, \Theta, R) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| > R,\ \theta < \arg t < \Theta\}$で有界正則かつ$t \to \infty$のとき$t^{-1}$の巾級数に漸近展開される，

(iii) 閉区間 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ は $\cos(\theta + \arg\lambda) = 0$ なる θ を唯一つ含み、$\theta = \underline{\theta}, \overline{\theta}$ に対して $\cos(\theta + \arg\lambda) \neq 0$.

この H に対する Hamilton 系 (H) : $dq/dt = \partial H/\partial p$, $dp/dt = -\partial H/\partial q$ は $t = \infty$ に Poincaré 階数 1 の第2種特異点をもっている。関数 H' が上の (ii) の有界性の性質をもつとき H' は $D(\underline{\theta}, \overline{\theta}, R, \rho)$ に関して $t = \infty$ に第1種特異点をもつということにしよう。このとき $|tH'| \leq M$, $R\rho \geq 1$ ならば

$$|h_{ij}(t)| \leq M|t|^{-(j-i)^+} / \rho^{\max(i,j)+1}, \quad t \in S(\underline{\theta}, \overline{\theta}, R)$$

であることがわかる。ここで $a \in \mathbb{R}$ に対して $a^+ := \max(a, 0)$.

以上の事実を踏えて、考察すべき Hamilton 系を Poincaré 階数が一般の σ のものに一般化しよう。$\lambda(t)$ を

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\sigma-1} + \lambda_1 t^{\sigma-2} + \cdots + \lambda_{\sigma-1}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

なる次数が $\sigma - 1$ の t の多項式とし、

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(t)\,dt = (\lambda_0/\sigma)t^\sigma + \cdots + \lambda_{\sigma-1} t$$

とする。

$$\mathrm{Re}\,\Lambda(x) = |t|^\sigma |\lambda_0/\sigma| \cos(\sigma\theta + \arg\lambda_0) + O(t^{\sigma-1}),$$

$\theta = \arg t$ に注意して

$$\cos(\sigma\theta + \arg\lambda_0) = 0$$

なる θ に対して方向 (θ) を $\Lambda(t)$ の特異方向ということにする。次の仮定が大事である。

(A)　角領域 $S(\underline{\theta}, \overline{\theta}, \cdot)$ は $\Lambda(t)$ の特異方向を唯一つ含み

かつ $\underline{\theta}$ も $\overline{\theta}$ も $\Lambda(t)$ の特異方向ではない．

さて我々の考えるHamilton関数を

(2)　$$H = \lambda(t)qp + H'(t; q, p)$$

としよう．ここで H' は $D(\underline{\theta}, \overline{\theta}, R, \rho)$ に関して $t=\infty$ に第1種特異点をもつものとし，tH' の q, p についてのTaylor展開を(1)と表わしたとき $h_{ij}(t)$ は $S(\underline{\theta}, \overline{\theta}, R)$ で有界正則で $t\to\infty$ のとき t^{-1} の巾級数に漸近展開されるとする．

$\lambda(t)qp$ をHamilon関数とするHamilton系はPoincaré階数が0の最も簡単なものである．もちろん求積できる．我々が考えるHamilton関数は，この $\lambda(t)qp$ に $D(\underline{\theta}, \overline{\theta}, R, \rho)$ に関して第1種特異点をもつ摂動項を付け加えたものと理解できることに注意しておこう．

このとき以下のことがいえる．先ず形式的正準変換に関しては，

<u>定理1</u>．(A)を仮定すると，$H = \lambda(t)qp + t^{-1}\sum_{i,j\geq -1} h_{ij}(t)q^{i+1}p^{j+1}$ を $H_\infty = \lambda(t)QP + t^{-1}\sum_{i\geq 0} h_{ii}(\infty)(QP)^{i+1}$ に変換する形式的正準変換

$$q = \sum_{j\geq 0} a_{-1,j}(t)P^j + Q\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}(t)Q^iP^j$$
$$p = \sum_{i\geq 0} b_{i,-1}(t)Q^i + P\sum_{i,j\geq 0} b_{ij}(t)Q^iP^j$$

で次の性質をもつものが唯一つ存在する．

(i) $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ は $S(\theta, \Theta, R')$ で有界正則で $t \to \infty$ のとき t^{-1} の巾級数に漸近展開され

$$a_{ij},\ b_{ij} = O(|t|^{-(j-i)^+ - \delta_{ij} - (1-\delta_{ij})\sigma})$$

(ii) $a_{00}(\infty) = b_{00}(\infty) = 1$, 但し $R'(\geq R) \gg 1$.

次に収束性に関して

<u>定理2.</u> (i) $\sum_{j\geq 0} a_{-1,j}(t) P^j$ は $D''(\theta, \Theta, R', \rho') = \{(t, P) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in S(\theta, \Theta, R'),\ |t^{-1}P| < \rho'\}$ において一様絶対収束し、そこで $O(t^{-1-\sigma})$ の大きさの正則関数を表わす,

(ii) $\sum_{i\geq 0} b_{i,-1}(t) Q^i$ は $D'(\theta, \Theta, R', \rho') = \{(t, Q) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in S(\theta, \Theta, R'),\ |Q| < \rho'\}$ において一様絶対収束し、そこで $O(t^{-\sigma})$ の大きさの正則関数を表わす,

(iii) $\sum_{i,j\geq 0} c_{ij} Q^i P^j$ ($c = a$ 又は b) は $D(\theta, \Theta, R', \rho')$ において一様絶対収束し、そこで有界な正則関数を表わす,

但し $R'(\geq R)$ は十分大, $0 < \rho'(\leq \rho)$ は十分小.

Hamilton 系 (H_∞) : $dQ/dt = \partial H_\infty/\partial P$, $dP/dt = -\partial H_\infty/\partial Q$ は求積可能である. 実際 QP が (H_∞) の第一積分であることより,

$$\eta = h_{00}(\infty)$$

$$h(w) = \sum_{i\geq 1} (i+1) h_{ii}(\infty) w^i$$

とおくと $h(w)$ は $|w|<\rho$ で正則で、(H_∞) の解は

$$Q(t) = c_1 t^{\eta + h(c_1c_2)} \exp(\Lambda(t)),$$

$$P(t) = c_2 t^{-\eta - h(c_1c_2)} \exp(-\Lambda(t)),$$

c_1, c_2 は任意定数，と表わされる.

以上の定理は、第1種特異点について説明したと同じ意味での、第2種特異点に関する遺伝定理と解釈できる。従って著者としてはこれで Painlevé 系の動かない特異点における2パラメータ局所解の表現定理としては満足すべき結果が得られたと考えている.

さてこのような局所解に関する定理が、それが直接主張している以上の意味を持ち得るか、すなわち Painlevé 方程式の大域的性質に関して何かいい得るのかという問題が当然ある。最後にこれについて考えていることを述べてみたい。

t の有理関数微分体 $\mathbb{C}(t)$ に Painlevé 方程式 P_J の解をすべて添加した微分拡大体 K に対して微分 Galois 群 $G = G(K/\mathbb{C}(t))$ がどのような構造を持っているかというようなことを考えてみる. K. Okamoto により Painlevé 系 (H_J) の各点 t_0 ($t_0 \in X := \mathbb{P}^1 - \{$動かない特異点$\}$) に対して相空間 $R(t_0)$ が構成されているので、G は $R(t_0)$ の自己同型全体のなす群の部分群である。G そのものは著者には全く

わからない。ところで Painlevé 方程式の動く特異点は極であることに注意すると、一種のモノドロミー群が定義される。すなわち、$(q,p)\in R(t_0)$ に対して (t_0,q,p) を通る (H_J) の解を X 内の閉曲線に沿って解析接続することにより $(Q,P)\in R(t_0)$ が対応する。この対応 $(q,p)\mapsto(Q,P)$ は $R(t_0)$ から $R(t_0)$ への双正則写像で、すべての閉曲線をとることにより「モノドロミー群」$\mathfrak{M}$ がえられる。$\mathfrak{M}$ は $\pi_1(X;t_0)$ の生成元に対して決まる双正則写像より生成される $\mathrm{Aut}(R(t_0))$ の部分群で、もちろん G の部分群でもある。線形方程式に対する Picard-Vessiot 理論から安易な類推をすると、動かない特異点がすべて第1種の (H_{VI}) に関しては $\mathfrak{M}$ が大体 G を規定しているのではないかと思われる。(H_J) $(J\neq VI)$ に対しては線形方程式の場合の Stokes 現象に対応するものを付け加えなければならないだろう。ぼんやりと考えていることは、$\mathfrak{M}$ を知る上であるいは Stokes 現象まがいのものを定義する上で、局所解の表現定理が使えるかどうかということである。第1種特異点を回る閉曲線に対する $\mathfrak{M}$ の生成元 f に関しては、我々の定理から、$R(t_0)$ の1つの不動点(この特異点において有理的な解に対応する $R(t_0)$ 上の点)の近傍での f の振舞はよくわかる。例えば (H_J) $(J\neq \mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{IV})$ に含まれるパラメータの間に特別な関係がなければ、f の位数は ∞ であ

ることや，不動点の近傍での invariant subsets などはよくわかる。しかし今のところこれ以上のことはわかっていない。何か御教示願えれば幸いです。

References

[1] Kimura, H., The construction of a general solution of a Hamiltonian system with regular type singularity and its application to Painlevé equations, Ann. Mat. Pura Appl., 134 (1983), 363–392.

[2] Okamoto, K., Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations I, Proc. Japan Acad. Ser. A, 56 (1980), 264–268.

[3] Takano, K., A 2-parameter family of solutions of Painlevé equation (V) near the point at infinity, Funkcial. Ekvac., 26 (1983), 79–113.

[4] ——, Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind, ibid., 29 (1986), 99–119.

[5] Yoshida, S., A general solution of a nonlinear 2-system without Poincaré's condition at an irregular singular point, ibid., 27 (1984), 367–391

[6] ——, 2-parameter family of solutions of Painlevé equations (I)～(V) at an irregular singular point, ibid., 28 (1985), 233–248.