数理解析研究所講究録
683巻 1989年 44-57

Drach-Vessiot 理論について

熊本大学・理　梅村　浩
Hiroshi Umemura

代数方程式のGalois理論を見て，類似の理論を微分方程式について確立することをLie(1842-1899)は夢みた。解析学で必要な理論は本質的に無限次元であるが，有限次元の通常のLie群論から作り始めなければならなかった．Lie全集7巻の中に，無限次元に関する論文は決して多くない．

Picardは線型常微分方程式についてのGalois理論を作った(19世紀の終り頃)．この理論は現在Picard-Vessiot理論と呼ばれている．しかし，この理論は有限次元の場合であって，Lieの目標とした一般論から見れば，極めて特別な場合である。Lieの野心的な夢を最初に実現しようとしたのは，J. Drachの学位論文(1898)である．彼は，その理論の発展を生涯の仕事とした．しかし彼の論文には，不十分な定義，不完全な証明が多く，非常に魅力はあるが，疑わしい印象を与えることは否めない．

一方Painlevéは彼の発見した第1方程式の既約性の証明はDrach理論を使ってできると主張した(1903)．PainlevéはDrach理論の欠陥を知っていたようなので，Painlevéが

Drach理論を使った跡約性の厳密な証明を得ていたのか疑わしい.
Drach理論は当時, 一般に受け入れられてはいなかったが,
それが正しいこと又近い将来万人に認められるようになるこ
とをPainlevéは信じていた.

しかし以下に見るように, そうはならなかった. Vessiot
は1904年から始まる仕事で, Drachの理論を完全にするのを
目標にした. その最初の3部作は, 学士院の大賞(grand
prix des sciences)に輝いている. しかし彼の仕事は省みられ
ることなく, Vessiotの名前は, 彼にとって不本意なことに,
有限次元の場合であるPicard-Vessiot理論に残っているにす
ぎない. なお1915年にDrachは彼のGalois理論を使って
(従って厳密でない), Painlevéの才1方程式のGalois群を計
算することによって, その既約性を証明している.

Painlevéの方程式の既約性については, 既に二つの異る証
明がある. Painlevéが期待したように無限次元微分
Galois理論に基づく才3の証明があるのか極めて興味深い。
才3の証明のために, まずVessiotの仕事の分析から始めよ
うと思った。その結果, 定式化には問題が少しはあるが,
Vessiotの仕事は, ほぼ正しいことが判明した. ただし, そ
れが有用であるか, 例えばPainlevé方程式の既約性の証明に
使えるかは, 未だわからない. 我々の成果の一部をここに報

生する。

§1 代数拡大のGalois理論と, Picard-Vessiot 理論

L/Kを体のGalois拡大とする。この条件は$\mathrm{Spec}\,L/\mathrm{Spec}\,K$がある reducedな K-群スキームGの主等質空間であると言い換えることもできる。又, 拡大体L/Kの$\overline{K}/K$への埋め込み全体$\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$が$\mathrm{Aut}_K\overline{K}$の主等質空間であるとも言える($\overline{K}$は$K$の代数的閉包を表す).

定理(代数拡大のGalois理論) L/KをGalois拡大とする. 次の2つの集合の間に包含関係を逆にした1:1対応がある.

(1) L/Kの中間体.

(2) 群$\mathrm{Aut}_K L$の部分群.

中間体Mには部分群$\{g \in \mathrm{Aut}_K L \mid g$は$M$の元をすべて固定する$\}$を, 部分群$H$には中間体$\{x \in L \mid x$は$H$の任意の元で固定される$\}$を対応させる.

次にPicard-Vessiot理論を説明する.

一般的な説明はしないことにして, Dを$\mathbb{C}$の領域とする。KをD上の有理型関数からなる体であって微分で閉じている

ものとする．$K(D)$ を D 上の有理型関数全体からなる体とする，$K(D)$ は微分で閉じている．簡単のため K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含んでいるものとする． $A=(a_{ij})\in GL_n(K(D))$ とする。 A の各成分を微分して得られる行列 (a'_{ij}) を A' で表わす。 $A'A^{-1}=F\in M_n(K)$ と仮定する．つまり A は K-係数の線型常微分方程式の解であるとする．このとき，$L=K(a_{ij})_{1\le i,j\le n}/K$ を K の GL_n-原始拡大であると言う．

定理（Picard-Vessiot 理論） L/K を GL_n-原始拡大とする。このとき $G=\{B=(b_{ij})\in GL_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij}\mapsto \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$ は微分体 L/K の K-自己同型を引き起す$\}$ とおくと，G は $\mathbb{C}$ 上定義された代数群となる（実際，G は $GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$-代数部分群である）。さらに，次の集合の間に包含関係を逆にした $1:1$ 対応が存在する．

(1) L/K の微分中間体（＝中間体であって微分で閉じているもの）.

(2) 代数群 G の $\mathbb{C}$-代数部分群.

対応のさせ方は，代数拡大の Galois 理論の場合と同様である。さらに，Ω/K を微分万有体，C をその定数体とすると $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ は $G_C(C)=(G\otimes_{\mathbb{C}} C)(C)$ の主等質空間であ

ることが証明できる．又 L/K が $G_K = G\otimes_{\mathbb{Q}} K$ のある主等質空間のモデルとなることも証明できる。

§2 Drach理論

代数常微分方程式 $y^{(n)} = F(x; y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ を考える．ここで F は，ある領域 $D(\subset\mathbb{C})$ 上の有理型関数を係数とする $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ の有理式（x は $\mathbb{C}$ の座標，微分は x に関する微分をあらわす）

常微分方程式 $y^{(n)} = F(x; y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ の Galois 理論はこの常微分方程式の第1積分の満たす線型偏微分方程式 $\frac{\partial z}{\partial x} + y'\frac{\partial z}{\partial y} + \cdots + F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})\frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}} = 0$ の Galois 理論と同値であると考えられる（この主張は何ら論理的な意味を持たない）．従って，線型偏微分方程式の微分 Galois 理論を作ることを考える．

$D \subset \mathbb{C}^{m+1}$ を領域とし，$t, t_1, \cdots, t_m$ をその座標を与える関数とする．K を D 上有理型の関数から成る体であって，K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含み，かつ偏微分 $\partial/\partial t, \partial/\partial t_1, \cdots, \partial/\partial t_m$ に関して閉じていると仮定する．$a_1, a_2, \cdots, a_m \in K$ として，線型偏微分方程式

$$(1)\quad (\partial/\partial t + a_1\partial/\partial t_1 + \cdots + a_m \partial/\partial t_m) z = 0$$

を考察する。

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ を(1)の独立な解とする．つまり，z_i $(1 \leq i \leq m)$ は(1)の解であり，$D(z_1, z_2, \cdots, z_m)/D(t_1, t_2, \cdots, t_m) \neq 0$．さて，$u_1, u_2, \cdots, u_m$ をもう1組の(1)の独立な解とすれば，座標変換 $\Phi =(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ が存在して，

$$
(2) \quad \begin{aligned}
u_1 &= \varphi_1(z_1, z_2, \cdots, z_m) \\
u_2 &= \varphi_2(z_1, z_2, \cdots, z_m) \\
&\vdots \\
u_m &= \varphi_m(z_1, z_2, \cdots, z_m)
\end{aligned}
$$

となる。

言い換えれば，(1)の解全体は座標変換全体のなす Lie pseudo-group の主等質空間になっており，§1に上げた二つの例と似たような状況にある。ただし，§1の例では一つの解から他の解へ，有理式で移れるのに対して，この場合は巾級数になっており，ここから多くの困難が生じる（§1の最初の例では根の置換であり，2番目の例では線型変換である）．

$z_1, z_2, \cdots, z_m$ に K上微分関係式があれば，Φ として微分関係式を保つもののみを考える．この様にして，(1)の Galois 群が定義されると Drach は考えた。この考え方には次のような問題点がある．

(i) 解 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ として canonical なとり方がない，どのような解をとってよいのか，はっきりしない．

(ii) 座標変換も Lie pseudo-group[1] であり，Φ の定義域がはっきり

1) 定義については§2 参照

りしなり．

Vessiot は(1)を次の様に改善した。

(1)の独立な解 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を一つ固定する．(1)の Galois 群ではなくて，微拡大体 $L=K(z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots \partial^{\alpha} z_i/\partial t_0^{\alpha_0}\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_n^{\alpha_n} \cdots)/K$ の Galois 群が定義できる。つまり，Galois 群は方程式Kのみによって決まるのではなく，その独立な解のとり方にも依存する概念である。

Vessiot の考えを以下に説明する。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が正則である点 $\tau=(\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n)\in D$ が存在して $z_1(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n)=t_1$, $z_2(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n)=t_2, \cdots, z_n(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n)=t_n$ が任意の $(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n)\in D$ について成立するとき，独立な解 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ は主であるという．

$\mathcal{L}$ を τ の近傍で有理型な関数の全体からなる微分体とする．自然な K－埋め込み

$$L \longrightarrow \mathcal{L}$$

により，L は $\mathcal{L}$ の微分部分体とみなせる．

1904年の Vessiot の論文は次のことを主調しているようである。

(a) $\mathrm{Hom}_K(L, \mathcal{L})$ は Lie pseudo－group の主等質空間である（ここで Hom_K は微分体の K－(準)同型全体を表わす）．

(b) $K = \{x \in L \mid$ 任意の $\varphi \in G$ について, $\varphi(x) = x\}$
である。

(a)について少し説明を加えると, $\Phi \in Hom_K(L, \mathcal{L})$ とすれば, Φ は $z_1, z_2, \cdots, z_n$ の像 $\Phi(z_1), \Phi(z_2), \cdots, \Phi(z_n)$ で決ってしまう. 従って(a)のように, 座標変換 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ で

$$\Phi(z_1) = \varphi_1(z_1, z_2, \cdots, z_n),$$
$$\Phi(z_2) = \varphi_2(z_1, z_2, \cdots, z_n),$$
$$\vdots$$
$$\Phi(z_n) = \varphi_n(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

とするものが決まる。この座標変換全体が, 合成および逆変換をとることによって閉じていることを主張する.

ここでも Drach の問題点の(ii), つまり座標変換の定義域の問題は常に残る.

(b)は次の例を見るように, デリケートである.

例　$n = 1$, 微分方程式 $\partial z / \partial t = 0$ を考える. $z = z_1 = \Gamma(t_1)$ とする. $K = \mathbb{C}(t, t_1)\langle \partial^2 z / \partial t_1^2 \rangle$, $L = \mathbb{C}(t, t_1)\langle z \rangle$ とおく, ここで $\langle a \rangle$ は a および, その微分を付加することを意味するものとする。さて tr. d. $[L : K] = 4$ である(注意, $\Gamma(t_1)$ は $\mathbb{C}(t_1)$ 上自明でなく, いかなる微分方程式も満さない). ここ $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ を固定しておき, この近傍で有理型である関数の芽全体のなす微分体を $\tilde{\mathcal{L}}$ とおく. 自然な埋め込み $L \to \tilde{\mathcal{L}}$ があ

3. tr.d. $[L:K]=4$. L の K-埋め込みは $z \longmapsto z+f(t_1)$ ($f(t_1)$ は t_1 の多項式であって，その次数は3以下) で与えられる。従って，$\mathrm{Hom}_K(L, \mathcal{L})$ は4次元ある。一方，一変数の変数変換全体に含まれる有限次元Lie群の次元は，3次元以下である。したがって，$\mathrm{Hom}_K(L, \mathcal{L})$ は Lie pseudo-group の主等式空間になりえない。

§2 Lie pseudo-group

変数変換に関する微分方程式系が与えられており，次の条件を満すとき，Lie pseudo-group であるという。

(1) f, g が解であり，$f \circ g$ が定義されれば $f \circ g$ も解である。

(2) f が解であれば，逆変換も解である。

例1. $y''=0$.　解 $y=ax+b$.

2. $y^{(3)}/y' - \frac{3}{2}(y''/y')^2=0$.　解 $y=(ax+b)/(cx+d)$.

3. 2変数. $\partial y_1/\partial x_1=1$, $\partial y_1/\partial x_2=0$, $\partial y_2/\partial x_2=0$.

解 $y_1=x_1+a$, $y_2=x_2+f(x_1)$.

4. n-変数, $\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)/\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)=1$.

例1, 2では定義域がはっきりしているが，3, 4では合成

を考えるとき，定義域の問題が生じる．

これを避けるため，我々は次の様に考える．

Kを標数0の体とする．$\mathcal{C}(K)$を完備，局所K−代数$(A, \mathfrak{m}, K)$（即ち$A/\mathfrak{m} = K$）のカテゴリーとする。次のfunctor Gを考える．

$$G : \mathcal{C}(K) \longrightarrow (\text{集合})(= \text{集合のカテゴリー}).$$

$$A \longmapsto \{\varphi \in A[[x]] \mid \varphi \equiv x \bmod \mathfrak{m}\}$$

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, $\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \in G(A)$

とする。合成関数 $\varphi \circ \psi(x) = (a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \cdots)$

$+ (a_1 b_1 + 2 a_2 b_0 b_1 + 3 a_2 b_0^2 b_1 + 4 a_3 b_0^3 b_1 + \cdots) x + \cdots$

$\in G(A)$ が定まる。注意を要するが，逆写像も定まり，Gは群functorとなる．

$K[[x]]$−係数の常微分方程式 $F(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n)}) = 0$ がありその解が，群functorの部分群functor$H$となるとき，HをLie pseudo-group functorとよぶ．

functor $F : \mathcal{C}(K) \to (\text{集合})$ を $A \mapsto F(A) = \mathfrak{m}$ と定義すると群functor HはFに作用する：$a \in \mathfrak{m} = F(A)$, $\varphi(x) \in H(A) \subset G(A) = A[[x]]$ について，$\varphi(x)[a] = \varphi(a)$ とおく．

以上，1変数でやったが，多変数でも同様にできる。この立場からLieの仕事を全て見なおすのは意味があると思れる．

§3 抽象的設定

$(N, \partial/\partial t, \partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_m)$ を偏微分体．体 N の標数は 0 であると仮定する．K を N の一つの微分部分体とする．$a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ とする．微分方程式

$$(1) \qquad (\partial/\partial t + a_1 \partial/\partial t_1 + \cdots + a_n \partial/\partial t_m) z = 0$$

を考える。N の定数体と K の定数体は一致すると仮定する．

簡単のため，$n=1$ と仮定する。$z \in N$ となる(1)の解をとる．$\partial z/\partial t_1 \neq 0$ と仮定する．$L = K\langle z \rangle = K(z, \partial z/\partial t, \partial z/\partial t_1, \dots)$ とおく。さて微分体 $\mathcal{K}$ に対して，その微分を忘れることによって得られる抽象体を $\mathcal{K}^\natural$ とおく．つまり $\mathcal{K} \to \mathcal{K}^\natural$ は微分構造を忘れる functor である。

Lemma $\quad N \to N^\natural[[T, T_1]]$ を $a \mapsto \sum_{m, m_1 \geq 0} \frac{1}{m!\, m_1!} \left(\partial^{m+m_1} a / \partial^m t\, \partial^{m_1} t_1\right) T^m T_1^{m_1}$

で定義すると，微分体の埋め込みである．ここで，巾級数環 $N^\natural[[T, T_1]]$ の微分は $\partial/\partial T, \partial/\partial T_1$ であり，それぞれ $\partial/\partial t, \partial/\partial t_1$ が対応する．

さて，Lemma により，微分体の埋め込み，$i : L \to L^\natural[[T, T_1]]$ を得る．

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & L^\natural[[T, T_1]] \\ | & & | \\ K & \longrightarrow & K^\natural[[T, T_1]] \end{array} .$$

ここで, $i|K$ を固定する, i の infinitesimal deformation を考える. 即ち, $C(L^q) \ni A$ について,

$X(L/K) = \{ f : L \to A[\![T, T_1]\!] \mid f|K = i|K$, 但 $L \xrightarrow{f} A[\![T, T_1]\!] \to L^q[\![T, T_1]\!]$ は i に等しい, ここで $A[\![T, T_1]\!] \to L^q[\![T, T_1]\!]$ は係数の reduction である$\}$ とおくことにより functor

$X(L/K) : C(L^q) \to$ (集合)

が定義される.

$i(z) - z^q \in L^q[\![T, T_1]\!]$ は極大イデアルに入る. 一方, 巾級数 $i(z) - z^q$ の T_1 の係数 $\partial z/\partial t_1 \neq 0$ であるので, $L^q[\![T, T_1]\!] = L^q[\![T, i(z) - z^q]\!]$, $i(z) - z^q = T_1'$ とおけば, $L^q[\![T, T_1']\!]$ では微分方程式 $(\partial/\partial t + a_1 \partial/\partial t_1) z = 0$ は, $(\partial/\partial T_1') i(z) = 0$ となる. 故に $f : L \to A[\![T, T_1]\!]$ は $\varphi(x) \in A[\![x]\!]$ が存在して, $z \mapsto z^q + \varphi(i(z) - z^q)$ で決まる.

定義 上の方法で, 正則拡大 L/K の定める functor $X(L/K) : C(L^q) \to$ (集合) が, Lie pseudo-group H の主等質空間となるとき, L/K は automorphic 拡大であるという. H をその Galois 群とよぶ.

次の定理が成り立つ.

定理 L/K を automorphic 拡大とする. $A = \{L \supset M \supset K \mid M$ は微分中間体, $L \supset M$ は automorphic$\}$, $B = \{G \supset H \mid H$ は Lie pseudo-group functor$\}$ とおく. このとき, 写像 $\Phi : A \to B$, $M \mapsto \{\varphi \in G \mid \varphi$ は M をとめる$\}$, は単射である.

注意　L/K が automorphic, $L \supset M \supset K$ を微分中間体, L/M は正則拡大と仮定しても, L/M は automorphic とは限らない。Subgroup functor から出発して, 部分体を定め, それから部分群を定義しても, もとに戻るとは限らない。

例　$K = \mathbb{C}(t, t_1, t_2)$, 微分方程式 $(\partial/\partial t + t_2 \partial/\partial t_1 + 6t_1^2 \partial/\partial t_2) z = 0$ の解 $z_1 = t_2^2 - 4t_1^3$, $z_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \int^y \frac{d\eta}{\sqrt{4\eta^3 + \theta}}\right)$ を考える。$L = K\langle z_1, z_2\rangle / K$ は automorphic であって, その Galois 群は, $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 + f(y_1))$ f は y_1 の任意関数となる。

参考文献

[1] Drach, J.: Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes, Annales Sci. Ecole Normale Sup. (3), 15 (1898), 243–384

[2] Vessiot, E.: Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, Annales Sci. Ecole Normale sup. (3), 21 (1904), 9–85.

[3] ——— : Sur une théorie générale de la réductibilité des equations et systèmes d'equations finies ou différentielles,

Ann. Sci. Ecole Normale Sup., (3) 63 (1946), 1–22.

注意　Drachのアイディアを紹介したところで，非線型常微分と線型偏微分の同値性の部分が問題であったが，線型偏微分を経由することなく，Vessiotの的の考え方で扱えるものと思われる．