数理解析研究所講究録
683巻 1989年 9-31

STRUCTURE OF THE MODULI SPACE OF SL-OPERATORS ON A RIEMANN SURFACE AND THE MONODROMY PRESERVING DEFORMATION.

岩崎 克則 Katsunori IWASAKI

Department of Mathematics, University of Tokyo.
東大 理

Abstract: Let M be a compact Riemann surface of genus g and let ξ be a holomorphic line bundle over M with $c_1(\xi) = 1-g$. The SL-operators are a certain class of second order Fuchsian differential operators $\mathcal{M}(\xi) \rightarrow \mathcal{M}(\xi \otimes \kappa^2)$, where κ is the canonical line bundle over M. Given $m \in \mathbf{N}$ and $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in (\mathbf{C}-\mathbf{Z})^m$, let $E(m,\theta)$ be the set of SL-operators with $m+n$ ($n := m+3g-3$) ordered regular singularities such that the j-th singularity has the characteristic exponents $\frac{1}{2}(1 \pm \theta_j)$, $j=1,\cdots,m$, and the last n singularities are apparent and of "ground state". $E(m,\theta)$ is naturally an analytic space of pure dimension $m+2n$. Let $B(k)$ be the space of ordered k points in M which are mutually distinct. We have the projection $\pi : E(m,\theta) \longrightarrow B(m+n)$ which assigns each SL-operator to its ordered singularities. There exists a nonempty Zariski open subset $X(m)$ of $B(m+n)$ such that $\underline{E}(m,\theta) := \pi^{-1}(X(m))$ is a complex manifold of dimension $m+2n$ and $\pi : \underline{E}(m,\theta) \longrightarrow X(m)$ is a holomorphic affine bundle of rank n. Let $\rho : X(m) \longrightarrow B(m)$ be the projection into the first m factors ; it is surjective. We put $\omega := \rho \cdot \pi$. There exists a closed 2-form Ω on $\underline{E}(m,\theta)$ defined canonically such that the monodromy preserving deformation gives rise to an Ω-invariant foliation on $\underline{E}(m,\theta)$ which is transverse to each fiber of $\omega : \underline{E}(m,\theta) \longrightarrow B(m)$. K. Okamoto [5,6] considered the monodromy preserving deformation for second order Fuchsian differential

equations on the projective line (g=0) or an elliptic curve (g=1). Our work contains a generalization of his results to an arbitrary genus g.

§1. Riemann面上の SL-作用素

M: 種数 $g \geqq 0$ のコンパクト Riemann 面, ξ: M上の正則線束, $\mathcal{U}=\{(U_j, x_j)\}$: M の座標被覆, $(\xi_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$: ξ を代表する 1-余鎖, とする. 被覆は必要に応じて細くとり直すものとする.

<u>定義</u> GL-operator on $\mathcal{U}$ for ξ とは, 次のような微分作用 L_j (local expression) の組 $L=(L_j)$ のことである:

$$L_j = D_j^2 + P_j D_j + Q_j \ , \quad P_j, Q_j \in \mathcal{M}(U_j), \quad D_j = \frac{d}{dx_j}$$

such that

未知関数 f_j と f_k が $U_k \cap U_j$ 上で $f_j = \xi_{jk} f_k$ と移り合うとき, 2つの微分方程式 $L_j f_j = 0$ と $L_k f_k = 0$ は $U_k \cap U_j$ 上同値.

$$\{\text{GL-operators on } M \text{ for } \xi\} \underset{def}{:=} \varinjlim_{\mathcal{U}} \{\text{GL-op's on } \mathcal{U} \text{ for } \xi\}.$$

我々は後で一階の項が無いような方程式を考えたいので次の定義を行なう.

<u>定義</u> an SL-operator on M for ξ とは, a GL-operator on M for ξ であって, それを代表するある GL-operator $L=(L_j)$ on $\mathcal{U}$ for ξ に対し

$$\forall j \ , \quad P_j \equiv 0 \quad \text{in } U_j$$

が成り立つようなものとする.

SL-operator が存在するためには, 線束 ξ は勝手ではいけない.

<u>補題</u> ξ: 正則線束 over M とする.

SL-operators for ξ が存在する $\Longleftrightarrow$ $c_1(\xi) = 1-g$.

そこで以後, $c_1(\xi)=1-g$ なる線束を固定して考える. SL-operator on M for ξ を単に SL-operator と呼ぶ. 次に SL-作用素を記述する空間について述べる. 被覆 $\mathcal{U}$ はいわゆる Leray 被覆とする. $U_j \cap U_k$ 上 $\theta_{jk} := \{x_j ; x_k\}$ とおく. ここで $\{\ ;\ \}$ は Schwarz 微分を表わす. この時, $(\theta_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\kappa^2))$ となることに注意する. 但し κ は M 上の標準線束とする. $\mathcal{Q}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{Q} := \left\{ Q = (Q_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}(\kappa^2)) \ ; \ \delta(Q_j) = (\theta_{jk}) \right\},$$

但し, δ は余境界作用素とする. この時次の全単射(同一視)がある.

補題

$$\begin{array}{ccc} \{\text{SL-作用素}\} & = & \mathcal{Q} \\ \Psi & & \Psi \\ L = (L_j) & \longleftrightarrow & Q = (Q_j) \end{array}$$

但し L_j と Q_j の関係は次のように与える:

$$L_j = -D_j^2 + Q_j .$$

注意 SL-作用素 L は微分作用素としては, $\mathcal{M}(\xi)$ を $\mathcal{M}(\xi \otimes \kappa^2)$ へ写す作用素と見なすことができる.

注意 SL 作用素の集合と同一視される $\mathcal{Q}$ は定義により, $\Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2))$-アフィン空間である. しかし座標被覆 $\mathcal{U}$ として"良い"ものを選べば, $\mathcal{Q}$ を線型空間と見なすことができる. 実際 M がその複素構造に subordinate した射影構造を許すことを思い出す(例えば Gunning [3]). そのような射影構造は $g \geqq 1$ の時一意ではなく, $g = 1$ あるいは $g \geqq 2$ に応じて各々 1 あるいは $3g-3$ 個のパラメータに依存するが, とも角ひとつ固定する. そして $\mathcal{U}$ を対応する射影的座標被覆とすると, 上で定義した θ_{jk} は恒等的に零となるから

$$\begin{array}{ccc} \{\text{SL-作用素}\} & = & \Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2)) \\ \Psi & & \Psi \\ L = (-D_j^2 + Q_j) & \longleftrightarrow & Q = (Q_j) \end{array} .$$

以後この同一視を保持する.

微分方程式に対して定義される局所的な概念(例えば, 確定

特異点，特性指数等）は，GL-作用素に対しても，local expressions を通じて矛盾なく定義できる．確定特異点の分類を下に記しておく：

確定特異点
- generic $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\theta :=$ 特性指数の差 $\notin \mathbb{Z}$
- non-generic ($\Updownarrow$ $\theta \in \mathbb{Z}$)
  - 対数的 $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 解に対数項が現われる．
  - 非対数的 $=$ 見掛けの特異点

見掛けの特異点では必然的に $\theta \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ となることに注意されたい．

<u>定義</u> L : a GL-作用素，$p \in M$: L の見掛けの特異点，とする．p の重複度（multiplicity）$N \in \mathbb{N}$ とは，（特性指数の差）-1 のこと．p が基底状態（ground state）とは $N=1$ のこと．次に $p_1, \cdots, p_k \in M$ を L の相異なる見掛けの特異点，$N_1, \cdots, N_k \in \mathbb{N}$ を対応する重複度とする．この時 $n := N_1 + \cdots + N_k$ を L の見掛けの特異点の全重複度（total multiplicity）という．$n=k$ の時 L は基底状態にあるという．

§2. Fuchs型SL-作用素のなす様々の解析空間．

以後 SL-作用素といえば常に Fuchs型も仮定する．また以後 m, n, k は次の用途に用いる：

m = （見掛けではない）確定特異点の個数，
k = 見掛けの特異点の個数，
n = 見掛けの特異点の全重複度．

$E(\ell) := \{$丁度 ℓ 個の順序付けられた確定特異点をもつ SL-作用素$\}$

とおく．この節では $E(m+k)$ 及びその様々の部分集合の解析空間としての構造を調べる．その為に先ず

$$C(\ell) := \{ (p_1, \cdots, p_\ell) \in M^\ell \ ; \ \exists i, j \text{ s.t. } i \neq j,\ p_i = p_j \}$$
$$B(\ell) := M^\ell \setminus C(\ell)$$

とおく．この時次の図式（D.G.1）をうる．但し π 及び p は次のような写像である：

$$\begin{tikzcd} & E(m+k) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] \\ M^m \times M^k \supset B(m+k) \arrow[dr, "p"'] & \\ & B(m) \subset M^m \end{tikzcd}$$

(D.G.1)

$\pi : E(m+k) \to B(m+k)$, $Q \mapsto Q$ の順序付確定特異点

$p : B(m+k) \to B(m)$, $(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_k) \mapsto (p_1, \cdots, p_m)$

さて集合 $E(\ell)$ に標準的な複素構造を与えておく. その為に与えられた $\mathbb{P}=(p_1, \cdots, p_\ell) \in B(\ell)$ に対して線型空間 $F(\ell)_{\mathbb{P}}$ を

$$F(\ell)_{\mathbb{P}} := \Gamma(M, \mathcal{O}(K^2 \otimes [2p_1 + \cdots + 2p_\ell]))$$

とおく. Riemann-Roch の公式により, $\dim F(\ell)_{\mathbb{P}} = (2\ell+3g-3)^+$ となり, この値は $\mathbb{P} \in B(\ell)$ に依存しない. 但し, $a^+ := a \ (a>0)$, $1 \ (a=0)$, $0 \ (a<0)$ とおく. 従って Kodaira-Spencer の定理 [4] より,

<u>補題</u> $F(\ell) := \coprod_{\mathbb{P} \in B(\ell)} F(\ell)_{\mathbb{P}}$ には, $F(\ell) \to B(\ell)$ が階数 $(2\ell+3g-3)^+$ の正則ベクトル束となるような, 自然な複素多様体の構造がはいる.

そこで射影 $\pi_{\ell,j} : B(\ell) \to B(\ell-1)$, $(p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto (p_1, \cdots, \hat{p}_j, \cdots, p_\ell)$ とおくと,

<u>命題</u> $E(\ell) = F(\ell) \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} \pi_{\ell,j}^* F(\ell-1)$. 従って $E(\ell)$ は $F(\ell)$ の開部分多様体. 特に $\dim E(\ell) = (2\ell+3g-3)^+ + \ell$.

以後 $E(m+k)$ の部分集合を, 上の命題の複素構造に基いて考える.

$E(m, k) := \{ Q \in E(m+k) \, ; \, Q$ の最後の k 個の特異点は見掛け$\}$,

とおく. 各 $N=(N_1, \cdots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ に対して,

$$E(m, k; N) := \left\{ Q \in E(m+k) \, ; \, \begin{array}{l} \text{第 } m+j \text{ 番目の特異点は重複度 } N_j \\ \text{の見掛けの特異点 } (j=1, \cdots, k) \end{array} \right\}$$

とおくと, 明らかに $E(m, k) = \coprod_{N \in \mathbb{N}^k} E(m, k; N)$ と直和分解するから, 各々の $E(m, k; N)$ を考えればよい. また各 $\mathbb{P} \in B(m)$ に対して

$$E(\mathbb{P}, k; N) := \{ Q \in E(m, k; N) \, ; \, \varpi(Q) = \mathbb{P} \}$$

とおく. ϖ については (D.G.1) を見よ. 更に各 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in \mathbb{C}^m$ に対し

$$E(m, k; \theta, N) := \left\{ Q \in E(m, k; N) \, ; \, \begin{array}{l} j\text{-番目の特異点における特性} \\ \text{指数の差が } \theta_j \ (j=1, \cdots, m) \end{array} \right\},$$

$$E(\mathbb{P}, k; \theta, N) := \{ Q \in E(m, k; \theta, N) \, ; \, \varpi(Q) = \mathbb{P} \}$$

と定義する.

<u>定理</u>　$m \geqq \max(2-g, 0)$, $k \geqq 1$, $N \in \mathbb{N}^k$ とする. このとき

(i) $E(m, k; N)$ は $E(m+k)$ の純次元の解析的部分空間であり,

$$\dim E(m, k; N) = 3(m+g-1)+k.$$

(ii) $\pi: E(m, k; N) \longrightarrow B(m+k)$ は全射である.

(iii) $E(\mathbb{P}, k; N)$, $\mathbb{P} \in B(m)$, は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(\mathbb{P}, k; N) = 2m+k+3g-3.$$

(iv) $E(m, k; \theta, N)$ は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(m, k; \theta, N) = 2m+k+3g-3.$$

(v) $\pi: E(m, k; \theta, N) \longrightarrow B(m+k)$ は全射である.

(vi) $E(\mathbb{P}, k; \theta, N)$, $\mathbb{P} \in B(m)$, は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(\mathbb{P}, k; \theta, N) = m+k+3g-3.$$

§3. 可約なSL-作用素, 既約なSL-作用素.

後の議論の中で, 可約なSL-作用素を排除して考えなければならない箇所がある. その為に可約SL-作用素が§2で定義した様々の空間の中で, 余次元正の解析的部分集合となることを見ておこう.

<u>定義</u>　座標被覆 $\mathcal{U} = \{(U_j, x_j)\}$ 上のSL-作用素 $L = (L_j)$, $L_j = -D_j^2 + Q_j$ が可約(reducible)とは, 各 U_j 上に1階Fuchs型作用素 $M_j = -D_j + P_j$ が存在して, $L_j = M_j^* M_j$ と書けること. 但し M_j^* は M_j の形式的共役. ある座標被覆上可約なSL-作用素を可約という.

$E(\ell)_{red} := \{Q \in E(\ell); Q \text{は可約}\}$, $E(\ell)_{irr} := \{Q \in E(\ell); Q \text{は既約}\}$ とおき, $E(\ell)$ の部分集合 X に対して $X_{red} := X \cap E(\ell)_{red}$, $X_{irr} := X \cap E(\ell)_{irr}$ とおく. $E(\ell)_{red}$ を記述するために, 予備的な空間 $V(\ell)$ を次のように導入する: 先ず $U_j \cap U_k$ 上 $\tau_{jk} = \frac{1}{2} D_j \log K_{jk}$ とおくと, $(\tau_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K))$ に注意する.

$$\mathcal{P} := \{ P = (P_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}(K)) \ ; \ \delta(P_j) = (\tau_{jk}) \}$$

とおき, そして

$$V(\ell) := \{ P \in \mathcal{P} \ ; \ P \text{は丁度} \ell \text{個の順序付1位の極をもつ} \}.$$

$V(\ell)$ に入れる複素構造を考える為に，空間 $A(\ell)$ を

$$A(\ell) := \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell) \in \mathbb{C}^\ell \,;\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell = g-1,\ \alpha_1 \cdots \alpha_\ell \neq 0\}$$

と定義する．更に射影 π を次のように定義する：

$$\pi : V(\ell) \longrightarrow A(\ell) \times B(\ell)\,,\quad P \longmapsto (\alpha, \mathbb{P})$$

ここで，

$\mathbb{P} = (P_1, \cdots, P_m)$ ；P の m 個の順序付1位の極，

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ ：α_j は P_j における P の留数．

<u>補題</u>　$V(\ell)$ には，$\pi : V(\ell) \to A(\ell) \times B(\ell)$ が階数 g の正則アフィン束となるような，自然な複素多様体の構造がはいる．特に $V(\ell)$ の次元：

$$\dim V(\ell) = 2\ell + g - 1.$$

$V(\ell)$ にはこの複素構造を与え，その下で写像 Φ を次のように定義：

$$\Phi : V(\ell) \to E(\ell),\quad P = (P_j) \longmapsto Q = \left(\frac{dP_j}{dx_j} + P_j^2\right).$$

$V(\ell)$ という空間を考えたのは，次が成りたつからである：

<u>補題</u>　$E(\ell)_{red} = \Phi(V(\ell))$.

さて，写像 Φ が閉写像かつ正則写像であることは容易に分り，更に

<u>補題</u>　Φ の各ファイバーの元の個数は高々 2^ℓ．特に Φ は finite な正則写像である．

従って有限正則写像定理を用いることにより，次のことが分る：

<u>命題</u>　$\ell \geqq \max(1, 2-g)$ の時，$E(\ell)_{red}$ は $E(\ell)$ の解析部分集合であり，$\operatorname{codim} E(\ell)_{red} = \ell + 2g - 2$.

更に $E(m+k)$ の様々の部分空間に対しては，次のようになる．

<u>定理</u>　$m \geqq \max(1, 2-g)$, $k \geqq 0$, $N \in \mathbb{N}^k$ 又 $\mathbb{P} \in B(m)$ とする．

(i) $E(m, k; N)_{red}$ は余次元 $m+2g-2$ の $E(m, k; N)$ の解析的部分集合．

(ii) $E(\mathbb{P}, k; N)_{red}$ は余次元 $m+2g-2$ の $E(\mathbb{P}, k; N)$ の解析的部分集合．

<u>定義</u>　$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in \mathbb{C}^m$, $N = (N_1, \cdots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ が与えられたとき，

$$(\theta, N) \text{ が generic} \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \delta_i, \varepsilon_j \in \{\pm 1\}\ (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k)$$
$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \theta_i + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j (N_j + 1) \neq 2g-2-(m+k).$$

<u>定理</u> $m \geqq \max(1, 2-g)$, $k \geqq 0$, $N \in \mathbb{N}^k$ そして $\mathbb{P} \in B(m)$ とする.

(i) (θ, N) : generic の時, $E(m, k; \theta, N)_{red} = \phi$.

(ii) (θ, N) : non-generic の時 $E(m, k; \theta, N)_{red}$ は $E(m, k; \theta, N)$ の解析的部分集合で余次元は少くとも $m+2g-3$ である.

(iii) (θ, N) : non-generic の時, $E(\mathbb{P}, k; \theta, N)_{red}$ は $E(\mathbb{P}, k; \theta, N)$ の解析的部分集合で, 余次元は少くとも $m+2g-3$ である.

(i) は一般の (θ, N) に対しては, $E(m, k; \theta, N)$ の元が全て既約であることをいっている.

§4. SL-作用素のなす様々の解析空間, Part 2.

§2 の定理及び(D.G.1)により, 右の(D.G.2)のような図式が存在することを想起しよう. そこにおける π, p, ϖ はすべて全射である. この節では $B(m+k)$ のある Zariski 開集合 $B(m,k;N)$ を導入し, $E(m,k;N)$ をその上に制限して考える.

$$\begin{tikzcd} & E(m,k;N) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\varpi"] \\ B(m+k) \arrow[r, "p"] & B(m) \subset M^m \end{tikzcd}$$

(D.G.2)

<u>注意</u> $B(m,k;N)$ を導入する必然性を荒く説明すると次のようである: $E(m,k;N)$ は $\mathcal{C} := \{M$ 上の階数 2 のあるベクトル束上の, m 個の確定特異点をもつ, あるタイプの Fuchs 型接続全体$\}$ のゲージ群 $\mathcal{G}$ を法とした"標準形"の集合と考えられる. $\mathbb{P} \in B(m)$ に対して, $\mathcal{C}(\mathbb{P}) := \{\mathbb{P}$ に特異点をもつ $\mathcal{C}$ の元$\}$ とおく; $E(\mathbb{P}, k; N) \subset \mathcal{C}(\mathbb{P})$. 特異点を固定するようなゲージ変換から成る $\mathcal{G}$ の部分群を $\mathcal{G}_{fix}$ とかく. $\mathcal{G}_{fix}$ は各 $\mathcal{C}(\mathbb{P})$ に働く. "標準形"というからには, $E(\mathbb{P}, k; N)$ を自分自身に移すような変換から成る $\mathcal{G}_{fix}$ の部分群が $\mathcal{G}_{fix}$ の中で離散的であることが望ましい. しかしこれは一般に正しくないので, $E(m,k;N)$ のかわりに, $\mathbb{E}(m,k;N) := \pi^{-1}(B(m,k,N))$ を考えるのである. そうすれば, 上に述べたことが正しくなる(ことが後に分る).

$B(m,k;N)$を定義する為に$\mathbb{r}=(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_k)\in B(m+k)$, $N=(N_1,\cdots,N_k)\in\mathbb{N}^k$でパラメトライズされた$M$上の線束

$$\eta(\mathbb{r};N):=K^{-1}\otimes[N_1q_1+\cdots+N_kq_k-(p_1+\cdots+p_m)]\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$$

を導入する．そして

$$D(m,k;N):=\{\mathbb{r}\in B(m+k);\ \dim\Gamma(M,\mathcal{O}(\eta(\mathbb{r},N)))\geqq 1\},$$

$$B(m,k;N):=B(m+k)\setminus D(m,k;N).$$

と定義する．$c_1(\eta(\mathbb{r};N))=|N|-m+2-2g$に注意する．但し$|N|=N_1+\cdots+N_k$とする．また Grauert の定理[2]を用いると，

<u>補題</u>　$B(m,k;N)$は$B(m+k)$の Zariski 開集合．特に$|N|\leqq m+2g-3$の時は$B(m,k;N)=B(m+k)$となる．

§2での記号を思い出しつつ，次の空間を導入する：

$$\mathbb{E}(m,k;N):=\{Q\in E(m,k;N);\ \pi(Q)\in B(m,k;N)\},$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P},k;N):=\{Q\in E(\mathbb{P},k;N);\ \pi(Q)\in B(m,k;N)\},$$

$$\mathbb{E}(m,k;\theta,N):=\{Q\in E(m,k;\theta,N);\ \pi(Q)\in B(m,k;N)\},$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P},k;\theta,N):=\{Q\in E(\mathbb{P},k;\theta,N);\ \pi(Q)\in B(m,k;N)\}.$$

この時，(D.G.2)に対応して，右の図式(D.G.3)を得る．そこにおいて，$B(m,k;N)=\phi$かも知れない．$B(m,k;N)\neq\phi$の時，定義によりπは全射だが，pは全射でないかも知れない．そこで

$$\mathbb{B}(m,k;N):=p(B(m,k;N))$$

とおく．(D.G.4)を見よ．$\mathbb{B}(m,k;N)=B(m)$となる為の十分条件を与えよう．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E}(m,k;N) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] \\ B(m,k;N) \arrow[dr, "p"'] & \\ & B(m) \end{tikzcd}$$

(D.G.3)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E}(m,k;N) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] \\ B(m,k;N) \arrow[dr, "p"'] & \\ & \mathbb{B}(m,k;N) \end{tikzcd}$$

(D.G.4)

<u>補題</u>　次の(i)又は(ii)が成り立つとき，$B(m)=\mathbb{B}(m,k;N)$が成りたつ．特に$B(m,k;N)$は$B(m+k)$の中で non-empty Zariski 開である．

(i)　$|N|\leqq m+2g-3$

(ii)　$m+2g-3\leqq|N|\leqq m+3g-3$, $\#\{j;\ N_j=1\}\geqq g$.

上の補題が適用できる簡明な場合がある．後にそれを引用するので命題としてまとめておこう．

命題　次の(a)又は(b)が成り立つとき，$B(m)=\mathbb{B}(m,k;N)$である：
(a)　$g=0$，$|N|\leqq m-3$，
(b)　$g\geqq 1$，$k\leqq m+3g-3$，$N=\mathbb{1}_k:=(1,\cdots,1)\in\mathbb{N}^k$．

以上の準備の下に，§2 の定理は，次のように強められる：

定理　$m\geqq\max(1,3-g)$，$k\geqq 1$，$N\in\mathbb{N}^k$とする．そして$B(m,k;N)\neq\phi$と仮定する．この時，$E(\cdots)$を$\mathbb{E}(\cdots)_{irr}$で置きかえ，$B(m+k)$を$B(m,k;N)$，$B(m)$を$\mathbb{B}(m,k;N)$とおきかえると，§2 の定理の主張がそのまま成り立つ．

最後に，見掛けの特異点の全重複度がnであるような SL-作用素の様々の空間を便宜的に導入しておく．先ず

$$\Lambda(n):=\{(k,N)\,;\,0\leqslant k\leqslant n,\ N=(N_1,\cdots,N_k)\in\mathbb{N}^k,\ |N|\leqq n\}$$

とおき，これを用いて

$$\mathbb{E}(m|n)_{irr}:=\coprod_{(k,N)\in\Lambda(n)}\mathbb{E}(m,k;N)_{irr},$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}|n)_{irr}:=\coprod_{(k,N)\in\Lambda(n)}\mathbb{E}(\mathbb{P},k;N)_{irr},$$

$$\mathbb{E}(m|n;\theta):=\coprod_{(k,N)\in\Lambda(n)}\mathbb{E}(m,k;\theta,N)_{irr},$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}|n;\theta):=\coprod_{(k,N)\in\Lambda(n)}\mathbb{E}(\mathbb{P},k;\theta,N)_{irr},$$

と定義する．

§5．基本群の射影表現のなす複素多様体と射影モノドロミー写像

この節では，Riemann 面 M から m 点を除いた領域の基本群の $PSL(2,\mathbb{C})$ への表現類のなす空間について考える．以後 $G=Aut(\mathbb{P}^1)=PSL(2,\mathbb{C})$ とおく．$\mathbb{P}=(p_1,\cdots,p_m)\in B(m)$ の非順序化を $|\mathbb{P}|=\{p_1,\cdots,p_m\}$ とおく．また M の点 $p_1,\cdots,p_m$ における実爆烈空間を $[\mathbb{P}]$ と表わす．即ち，$[\mathbb{P}]$ は，M から $p_1,\cdots,p_m$ を中心とする十分小さい開円板を取り

除いて得られる図形である．$\partial[\mathbb{P}]\cong S^1\amalg\cdots\amalg S^1$（$m$-個）となることに注意する．以下で $M\setminus|\mathbb{P}|$ のかわりに $[\mathbb{P}]$ を考えることがあるが，それは便宜上の理由からである．さて，$\mathbb{P}\in B(m)$ に対して

$$\hat{R}(\mathbb{P}) := Hom(\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}|),\ G)$$

とおく．$\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}|)$ を離散群と見て，$\hat{R}(\mathbb{P})$ にはコンパクト開位相を与える．$\hat{\rho}\in\hat{R}(\mathbb{P})$ が既約（irreducible）ということを，$\hat{\rho}(\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}|))\subset Aut(\mathbb{P}^1)$ が $\mathbb{P}^1$ 内に固定点を持たないこととして定義する．$\hat{R}(\mathbb{P})_{irr} := \{\hat{\rho}\in\hat{R}(\mathbb{P});\ \hat{\rho}$ は irreducible$\}$ とおく．$\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}|)$ の $m+2g$ 個の生成元を指定して，$\hat{\rho}$ とその生成元の $\hat{\rho}$ による像を同一視することによって，$\hat{R}(\mathbb{P})$ を複素 Lie 群 G^{m+2g} の部分多様体と見なせる．この時，$\hat{R}(\mathbb{P})_{irr}$ は $\hat{R}(\mathbb{P})$ の中で空でない Zariski 開集合である．G の内部自己同型群 $Ad(G)$ は $\hat{R}(\mathbb{P})$ に働く．そして $\hat{R}(\mathbb{P})_{irr}$ は $Ad(G)$-不変である．Schur の補題より，$Ad(G)$ は $\hat{R}(\mathbb{P})_{irr}$ に自由に作用する．そこで $R(\mathbb{P}) := \hat{R}(\mathbb{P})/Ad(G)$，$R(\mathbb{P})_{irr} := \hat{R}(\mathbb{P})_{irr}/Ad(G)$ と定義する．$\rho\in R(\mathbb{P})$ に対して，$L(\rho)$ を $[\mathbb{P}]$ 上の局所系であってその特性表現が ρ であるものとすると，次の全単射（同一視）がある：

$$R(\mathbb{P}) \cong H^1([\mathbb{P}], G)\ ,\quad \rho \longleftrightarrow L(\rho).$$

<u>補題</u> $R(\mathbb{P})_{irr}$ には，$\hat{R}(\mathbb{P})_{irr}\to R(\mathbb{P})_{irr}$ が正則 $Ad(G)$-主束となるような自然な複素多様体の構造が入る．そして $\dim R(\mathbb{P})_{irr}=3m+6g-6$．$R(\mathbb{P})_{irr}$ の点 $\rho\in R(\mathbb{P})_{irr}$ における接空間は $H^1([\mathbb{P}], Ad\,L(\rho))$ と同一視される．

次に $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})^m$ に対して次の定義をする：

$$\hat{R}(\mathbb{P},\theta)_{irr} := \left\{\hat{\rho}\in\hat{R}(\mathbb{P})_{irr}\ ;\ \begin{array}{l}\hat{\rho}\text{ が点 }P_j\text{ のまわりに導く局所表現の表}\\ \text{現行列の固有値が }\exp(\pm\pi\sqrt{-1}\theta_j)\end{array}\right\},$$

$$R(\mathbb{P},\theta)_{irr} := \hat{R}(\mathbb{P},\theta)_{irr}/Ad(G).$$

<u>補題</u> $R(\mathbb{P},\theta)_{irr}$ は $R(\mathbb{P})_{irr}$ の部分多様体であって，$\dim R(\mathbb{P},\theta)_{irr} = 2(m+3g-3)$．また接空間 $T_\rho R(\mathbb{P},\theta)_{irr}$，$\rho\in R(\mathbb{P},\theta)_{irr}$ は制限写像 $j^*: H^1([\mathbb{P}]; Ad\,L(\rho))\to H^1(\partial[\mathbb{P}]; Ad\,L(\rho)|\partial[\mathbb{P}])$ の核と同一視される．

<u>注意</u> 次のコホモロジー長完全列に注意する:

$$0 = H^0([\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)) \longrightarrow H^0(\partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)|\partial[\mathbb{P}])$$

ρの既約性とSchurの補題 $\qquad \cong \; \mathbb{C}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}$ (m個)

$$\xrightarrow{\delta^*} H^1([\mathbb{P}], \partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)) \xrightarrow{i^*} H^1([\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho))$$

$$\xrightarrow{j^*} H^1(\partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)|\partial[\mathbb{P}]).$$

従って特に

$$T_\rho R(\mathbb{P};\theta)_{irr} \cong \frac{H^1([\mathbb{P}], \partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho))}{H^0(\partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)|\partial[\mathbb{P}])}$$

と同一視される。ところで、$\mathrm{Ad}L(\rho)\times\mathrm{Ad}L(\rho)\to\mathbb{C}$ を、$\mathcal{L}ie\, G = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のKilling形式を用いた、定数層$\mathbb{C}$への乗法写像とするとき、Poincaré-Lefschetz双対形式

$$H^1([\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho))\times H^1([\mathbb{P}], \partial[\mathbb{P}]; \mathrm{Ad}L(\rho)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が存在する。$T_\rho R(\mathbb{P};\theta)_{irr} = \mathrm{Ker}\, j^*$ と5行上の同一視を行なうと、上の双対形式は $T_\rho R(\mathbb{P};\theta)_{irr}$ 上の$\mathbb{C}$-値非退化歪対象形式を誘導する。まだきちんと確めた訳ではないが、この形式は$R(\mathbb{P};\theta)_{irr}$上に複素シンプレクティック構造を定めるであろう。

さて

$$R(m)_{irr} := \coprod_{\mathbb{P}\in B(m)} R(\mathbb{P})_{irr}$$

とおくと、$R(m)_{irr}$は自然に$B(m)$上の局所系となる。実際基点$\mathbb{P}_0 \in B(m)$をとると、対応する特性表現は、次で与えられる:

$$\begin{array}{ccc} Br(m) := \pi_1(B(m), \mathbb{P}_0) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(R(\mathbb{P}_0)_{irr}) \\ \Psi & & \Psi \\ \ell & \longmapsto & [\rho \longmapsto \rho\circ\ell_*] \end{array}$$

但し、$B_r(m)\to\mathrm{Aut}(\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}_0|))$, $\ell\mapsto\ell_*$, は群$B_r(m)$の$\pi_1(M\setminus|\mathbb{P}_0|)$への作用を表わす。$R(\mathbb{P}_0)_{irr}$が$3m+6g-6$次元の複素多様体だから、$R(m)_{irr}$は自然に$4m+6g-6$次元複素多様体である。次に$R(m;\theta)_{irr}$を、$R(\mathbb{P}_0;\theta)_{irr}$が定める$R(m)_{irr}$の部分局所系とする。$R(\mathbb{P}_0;\theta)_{irr}$が$2(m+3g-3)$次元複素多様体故、$R(m;\theta)_{irr}$は$m+2(m+3g-3)$次元複素多様体である。ここで§5で定義した空間$\mathbb{E}(m|n)_{irr}$及び$\mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr}$を思い出しつつ次の定義をする。

<u>定義</u> 射影モノドロミー写像 PM の定義.

$$\begin{array}{cccc} PM: & \mathbb{E}(m|n)_{irr} & \longrightarrow & R(m)_{irr} \\ & \Psi & & \Psi \\ & Q & \longmapsto & Q\text{ が定める射影モノドロミー表現類} \end{array}$$

また PM の $\mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr}$ への制限もやはり,同様に表わす:

$$PM: \mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr} \longrightarrow R(m;\theta)_{irr}$$

これらの写像は,正則写像である.ただの正則写像だけではうまくないが,更に次のことが成りたつ:

<u>定理</u> $n = m+3g-3$ のとき, $PM: \mathbb{E}(m|n)_{irr} \longrightarrow R(m)_{irr}$ 及び $PM: \mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr} \longrightarrow R(m;\theta)_{irr}$ は局所的に単射となるような正則写像である.特に局所有限写像である.

この定理から多くのことが従う.そのひとつを述べる為に,§4の定理から得られる事実を注意としてまとめておこう.

<u>注意</u> $n = m+3g-3$ とする. $(k, N) \in \Lambda(n)$ (see §4) に対して,

$$\begin{array}{l} \dim \mathbb{E}(m,k;N)_{irr} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\} \dim R(m)_{irr} \\ \dim \mathbb{E}(m,k;\theta,N)_{irr} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\} \dim R(m;\theta)_{irr} \end{array} \quad \text{if } (k,N) \left\{ \begin{array}{c} \neq \\ = \end{array} \right\} (n, \mathbb{1}_n)$$

が成りたつ.但し $\mathbb{1}_n = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{N}^n$ とする.即ち $\mathbb{E}(m|n)_{irr}$ 及び $\mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr}$ の成分のうち,基底状態に対応するものだけに対して,等号が成りたち,励起状態のものに対しては真の不等式が成りたつ.

そこで,上の定理と注意,そして有限写像定理により次の定理をうる.定理を述べる為に先ず記号を導入する:

$$\mathbb{E}'(m|n)_{irr} := \mathbb{E}(m|n)_{irr} \setminus \mathbb{E}(m,n;\mathbb{1}_n)_{irr},$$

$$\mathbb{E}'(m|n;\theta)_{irr} := \mathbb{E}(m|n;\theta)_{irr} \setminus \mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr}.$$

<u>定理</u> $n = m+3g-3$ とする.

(i) $PM(\mathbb{E}'(m|n)_{irr})$ は, $R(m)_{irr}$ の中で nowhere dense, $PM(\mathbb{E}'(m|n;\theta)_{irr})$

は $R(m;\theta)_{irr}$ の中で nowhere dense である．

(ii) PM : $\mathbb{E}(m,n;\mathbb{1}_n)_{irr} \longrightarrow R(m)_{irr}$ 及び PM : $\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr} \longrightarrow R(m;\theta)_{irr}$ は，局所単射かつ開正則写像である．

<u>注意</u> 与えられた射影表現に対して，それを射影モノドロミー表現とするSL-作用素が存在するか否かを論じるRiemann-Hilbert 問題を考えよう．その際に見掛けの特異点の全重複度を出来るだけ少くしたい．Otsuki [7] の議論と同様にすれば次のことは分る：

$n = m+4g-3$ と仮定すると，

PM : $\mathbb{E}(m|n)_{irr} \longrightarrow R(m)_{irr}$ の像のZariski 閉包は $R(m)_{irr}$ 全体，

PM : $\mathbb{E}(m|n,\theta)_{irr} \longrightarrow R(m;\theta)_{irr}$ は全射，但し $\theta \in \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

この結果は，Riemann-Hilbert 問題を generic に解く為には全重複度が $m+4g-3$ あれば良いことを示している．一方，上の定理の(i)は全重複度が $m+3g-2$ 以下，又は全重複度が $m+3g-3$ であっても励起状態であるようなSL-作用素を考えていただけでは，Riemann-Hilbert 問題がgenericには解けないことを示している．また定理の(ii)は，与えられた射影表現に対して Riemann-Hilbert 問題の解が，全重複度 $m+3g-3$ で基底状態の SL-作用素の中にあれば，十分近い射影表現すべてに対して，同じクラスの解があることを示している．著者の予想としては，$n = m+3g-3$ あれば Riemann-Hilbert 問題は genericに解けるであろうと考える．即ち $m+3g-3$ かつ基底状態というのが，望ましい最低線であろう．

更に上の定理の(ii)の系として

<u>系</u> $n = m+3g-3$ の時 $\mathbb{E}(m,n;\mathbb{1}_n)_{irr}$ 及び $\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr}$ は複素多様体であり，更に右の図式(D.G.5)をうる．そこにおいて PM は局所双正則である．また $B(m,n;\mathbb{1}_n) \neq \phi$ で，p は全射である．(cf. §4 の命題)．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr} \arrow[r, "PM"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] & R(m;\theta)_{irr} \arrow[ddl] \\
B(m,n;\mathbb{1}_n) \arrow[dr, "p"'] & & \\
 & B(m) &
\end{tikzcd}$$

(D.G.5)

$\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr}$ は後にもっと詳しく調べられる. また後にモノドロミー保存変形を考え, 変形方程式を導くが, その方程式は, 空間 $\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr}$ 上に m 次元の接分布を定義する. 上の系は, その接分布が Frobenius 積分可能であり, 従って foliation を定義することを導く. またその接分布が $\varpi:\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)_{irr}\to B(m)$ の各 fiber に横断的であること, 従って変形パラメーターとして, $B(m)$ の座標がとれることを導く. これらのことは, 上の接分布が, 局所系 $R(m;\theta)_{irr}\to B(m)$ 上の水平分布の, 局所双正則写像 PM による引戻しとして与えられることから自明である.

§6. Cousin 問題と基底状態の SL-作用素のなす多様体

§5における考察から, 見掛けの特異点の全重複度が $n=m+3g-3$ の基底状態の SL-作用素の空間 $\mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n)$ を詳しく調べることは意味のあることである. そこで以後常に次を仮定する:

(*) $\quad n = m+3g-3.$

上の仮定の下で, 記号を簡単化するために, 次のようにおく.

$$\mathbb{E}(m;\theta) := \mathbb{E}(m,n;\theta,\mathbb{1}_n).$$

さて各 $\mathbb{r}=(P_1,\cdots,P_m,g_1,\cdots,g_n)\in B(m+n)$ に対して, M上の複素線束

$$\xi(\mathbb{r}) := K^2\otimes[P_1+\cdots+P_m-(g_1+\cdots+g_n)]\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$$

を導入しよう. 一般に線束 φ に対し, $K\otimes\varphi^{-1}$ を Serre の意味で φ に双対の線束と呼ぶことにする.

<u>注意</u> (i) $\xi(\mathbb{r})$ は, §4で定義した線束 $\eta(\mathbb{r},\mathbb{1}_n)$ に, Serre の意味で双対.
(ii) (*) の仮定により, $C_1(\xi(\mathbb{r}))=g-1$ が成りたつ. 従って Riemann Roch の公式を書くと次のようになる:

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) = \dim H^1(M,\mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) \quad \text{for } \mathbb{r}\in B(m+n).$$

これが成立つことが (*) のひとつの御利益である. これを Fredholm's Alternative と呼ぼう. これによると, H^0 が消えることと H^1 が消えることとが同値である. 我々は, すぐ後に, 線束 $\xi(\mathbb{r})$ に付随したある "Cousin

問題"を考える. $H^1=0$ とは Cousin 問題が可解であることであり, $H^0=0$ とは Cousin 問題の解が一意であるということである. 即ち可解性と解の一意性が同値となる. そこでコホモロジーを積分方程式論の一種の拡張と解釈するとき, 先の等式は Fredholm の交代性を表わしている.

さて $D(m)$, $X(m)\subset B(m+n)$ を次のように定義する:

$$D(m) := \{\mathbb{r}\in B(m+n)\ ;\ \dim H^0(M,\mathcal{O}(\mathfrak{Z}(\mathbb{r})))\geqq 1\}$$
$$X(m) := B(m+n)\setminus D(m).$$

注意の(i)により, 実は $D(m)=D(m,n\,;\mathbb{1}_n)$, $X(m)=B(m,n\,;\mathbb{1}_n)$ である(cf. §4の命題, §5の系). よって $X(m)$ は $B(m+n)$ の空でない Zariski 開集合であって, 次の図式(D.G.6)をうる.

π, p, ϖ (特に p が)がすべて全射であることに注意する.

$D(m)$ がどういう集合であるかを例をあげて説明しよう.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{E}(m;\theta) \arrow[r, "PM"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\varpi"] & R(m;\theta) \arrow[dl] \\ X(m) \arrow[r, "p"'] & B(m) & \end{tikzcd} \qquad (\mathrm{D.G.6})$$

例 (i) $g=0$ の時 $D(m)=\phi$ 即ち $X(m)=B(m+n)$.

(ii) $g=1$ の時. このとき $m=n$ であることに注意する. そして

$$D(m)=\{\mathbb{r}=(P_1,\cdots,P_m,q_1,\cdots,q_m)\in B(m+m)\ ;\ P_1+\cdots+P_m \underset{\text{線型同値}}{\sim} q_1+\cdots+q_n\},$$
$$\underset{\text{Abelの定理.}}{=}\{\mathbb{r}\in B(m+m)\ ;\ \sum_{j=1}^{m}\int_{P_j}^{q_j}\omega\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 周期)\}.$$

ここで, ω は M 上の恒等的に零でない正則1-形式とする.

我々がこの節で考察する中心的な課題は次のように述べられる.

課題 空間 $\mathbb{E}(m;\theta)$ の構造を, 次の問題の考察を通して理解せよ: 特異点の組 $\mathbb{r}\in X(m)$ と"ファイバー座標"(= SL-作用素のアクセサリー パラメーター)が与えられたとき, そのようなデータに対応する SL-作用素を"Cousin 問題"(CPと略記)の解として構成すること. 更に解のデータに関する依存性を調べること.

次の補題は、これまでの議論から自明であるが、上で述べた課題を考える上で鍵となるものである。次の補題ではステートメントを(i)(ii)(iii)の3つに分けるが、ひと続きの文章であると諒解されたい。

Key Lemma

(i) $H^1(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) = 0$, ←(CP)の可解性を保証する。

(ii) $H^0(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) = 0$ ←(CP)の解の一意性を保証する。

(iii) が $\mathbb{r} \in X(m)$ によらず成立する。←(CP)の解の"データ"に関する正則的依存性を保証する。

この節における結果のうち簡単に述べられるのは、次のものである。

定理 $\pi : \mathbb{E}(m;\theta) \longrightarrow X(m)$ は、階数 $m+3g-3$ の正則アフィン束の構造をもつ。(cf. (D.G.6))。

後の議論の為に、この定理の証明に若干立入る必要がある。先ず $X(m)$ の局所座標近傍の便利なとり方から説明する。

定義 $\mathbb{r}^0 = (p_1^0, \cdots, p_m^0, q_1^0, \cdots, q_n^0) \in X(m)$ を任意にとり固定する。$\mathcal{U} = \{(U_i, x_i)\}$ を自然数を添字とする M の座標被覆とする。このとき、$\mathcal{U}$ が M の $\mathbb{r}^0$-座標被覆 (an $\mathbb{r}^0$-coordinate covering) であるとは、次の2つの条件を満足することであると定義する。

(i) $p_j^0 \in U_j \quad (j = 1, \cdots, m)$, $q_k^0 \in U_{m+k} \ (k = 1, \cdots, n)$,

(ii) $U := U_1 \times \cdots \times U_{m+n} \subset X(m)$, i.e.

U は $X(m)$ における $\mathbb{r}^0 \in X(m)$ の(直積)近傍である。

この時、U を、M の $\mathbb{r}^0$-座標被覆 $\mathcal{U}$ によって定まる、$\mathbb{r}^0 \in X(m)$ の近傍と呼ぶことにする。また上の状況の時、記号の簡明化のため

$$V_k := U_{m+k}, \quad y_k := x_{m+k} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

とおく。さて、$\mathbb{r} = (p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n) \in U$ に対して次のようにおく。

$$\begin{cases} t_j(\mathbb{r}) := x_j(p_j) & (j = 1, \cdots, m), \\ \lambda_k(\mathbb{r}) := y_k(q_k) & (k = 1, \cdots, n). \end{cases}$$

このとき、$(t_1, \cdots, t_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ は U 上定義された、$X(m)$ のひとつの局

所座標を与える. $(U\,;\,t_1,\cdots,t_m,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を $\mathcal{U}$ から定まった $X(m)$ の局所座標近傍と呼ぶ.

以後, 任意の $\mathbb{r}^0\in X(m)$, 任意の $\mathbb{r}^0$-座標被覆 $\mathcal{U}$ をひとつ固定し, $\mathcal{U}$ から定まる $X(m)$ の局所座標近傍 $(U\,;\,t_1,\cdots,t_m,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を用いて議論を行なう. 先ず $\mathbb{E}(m;\theta)$ に属する SL-作用素 Q が局所的にどういう表示を持つかを考える. $\pi:\mathbb{E}(m;\theta)\to X(m)$ を (D.G.6) の射影とする.

<u>補題</u> $Q\in\mathbb{E}(m;\theta)$ が $\mathbb{r}:=\pi(Q)\in U$ であるとする. Q を M 上の有理型2次微分と見なすとき (cf. §1 の注意), Q は U_j 及び V_k で次のように局所表示される:

(i) $$Q=\left\{\frac{\alpha_j}{(x_j-t_j)^2}+O\left(\frac{1}{x_j-t_j}\right)\right\}(dx_j)^2 \quad \text{in } U_j \quad (j=1,\cdots,m),$$

但し $\alpha_j:=\frac{1}{4}(\theta_j^2-1)$ とおいた.

(ii) 適当な $(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{C}^n$ が存在して,

$$Q=\left\{\frac{3}{4(y_k-\lambda_k)^2}-\frac{\nu_k}{y_k-\lambda_k}+\nu_k^2+O(y_k-\lambda_k)\right\}(dy_k)^2 \quad \text{in } V_k \ (k=1,\cdots,n).$$

<u>注意</u> 上の補題(ii)において, $(y_k-\lambda_k)^0$ の項の係数が $(y_k-\lambda_k)^{-1}$ の項の係数の2乗となっているのは, $q_k\in M$ が Q の見掛けの特異点であるという条件を表わしたものである.

<u>定義</u> 上の補題(ii)に現われた $(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{C}^n$ を SL-作用素 Q のアクセサリーパラメーターと呼ぶ.

そこで, 以後, 上の補題の逆向きを考える. 即ち, 順序付特異点 $\mathbb{r}=(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n)\in U$ と アクセサリーパラメーター $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{C}^n$ が与えられたとき, 局所表示が, 上の補題で与えられるような $\mathbb{E}(m;\theta)$ の元 Q が一意的に存在し, しかも対応

$$U\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{E}(m;\theta),\quad (\mathbb{r},\nu)\longmapsto Q$$

が正則となるようにできることを示そうという訳である. 先ず記号を

準備する. $\mathbb{r}=(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n)\in X(m)$ として,

D_j : 超平面 $\{(p,\mathbb{r})\in M\times X(m)\ ;\ p=p_j\}$ で定義される $M\times X(m)$ 上の因子,

D'_k : 超平面 $\{(p,\mathbb{r})\in M\times X(m)\ ;\ p=q_k\}$ で定義される $M\times X(m)$ 上の因子,

とおく. 但し $j=1,\cdots,m$, $k=1,\cdots,n$. 次に u, v を右図のような射影とする. この時, $X(m)$ 上の層

$$\begin{tikzcd} & M\times X(m) \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ M & & X(m) \end{tikzcd}$$

$$v_*\mathcal{O}_{M\times X(m)}(u^*K^2\otimes[2D_1+\cdots+2D_m+2D'_1+\cdots+2D'_n])$$

は, $X(m)$ 上の局所自由な解析層である. そこで対応する $X(m)$ 上の正則ベクトル束を次のようにおく:

$$F \longrightarrow X(m).$$

順序付特異点 $\mathbb{r}\in X(m)$ とアクセサリ・パラメーター $\nu\in\mathbb{C}^n$ が与えられた時, 対応する SL-作用素で, $(\mathbb{r},\nu)$ に正則に依存するものを構成する為に, 補助的な F の正則局所切断をいくつか準備する. 前述したように U は, ある $\mathbb{r}^0$-座標被覆 $\mathcal{U}$ から定まる $\mathbb{r}^0\in X(m)$ の近傍であったが, 以下では必要に応じて U を十分小さく取り直すことにして, いちいち断わらない. また $\mathbb{r}=(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n)\in U$ に対して, $\eta(\mathbb{r})$ を

$$\eta(\mathbb{r}):=[2p_1+\cdots+2p_m+2q_1+\cdots+2q_n]$$

で定まる線束とする. このとき, 次の命題が成りたつ.

<u>命題</u> 次の条件を満足する正則局所切断 $\varphi_k^{(a)}\in\Gamma(U,\mathcal{O}_{X(m)}(F))$, $a=0,1,2$, $k=1,\cdots,n$, がただひとつ存在する: $\mathbb{r}\in U$ に対して,

$$\varphi_k^{(a)}(\mathbb{r})\in\Gamma(M,\mathcal{O}(K^2\otimes\eta(\mathbb{r})))\subset\Gamma(M,\mathcal{M}(K^2))$$

と見なすと, $\varphi_k^{(a)}(\mathbb{r})$ は, 点 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n\in M$ のまわりで次のようになる:

(i) $\varphi_k^{(a)}(\mathbb{r})$ は点 $p_1,\cdots,p_m\in M$ で高々1位の極をもつ.

(ii) $\varphi_k^{(a)}(\mathbb{r})=\left\{\dfrac{\delta_{k\ell}}{(y_\ell-\lambda_\ell)^a}+O(y_\ell-\lambda_\ell)\right\}(dy_\ell)^2$ in V_ℓ $(\ell=1,\cdots,n)$.

<u>命題</u> 次の条件を満足する正則局所切断 $\psi\in\Gamma(U,\mathcal{O}_{X(m)}(F))$ がただひとつ存在する: $\mathbb{r}\in U$ に対して

$$\psi(\mathbb{r})\in\Gamma(M,\mathcal{O}(K^2\otimes\eta(\mathbb{r})))\subset\Gamma(M,\mathcal{M}(K^2))$$

と見なすと, $\psi(\mathbb{r})$ の点 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n$ のまわりでの様子は

(i) $\psi(\mathbb{r}) = \left\{ \dfrac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + O\left(\dfrac{1}{x_j - t_j}\right) \right\} (dx_j)^2$ in U_j $(j=1,\cdots,n)$,

但し $\alpha_j = \frac{1}{4}(\theta_j^2 - 1)$ とおいた.

(ii) $\psi(\mathbb{r})$ は点 $g_1, \cdots, g_n$ で零点をもつ.

この2つの命題の証明は, Key Lemma を用いてなされる.その時に線束 $\xi(\mathbb{r}) = K^2 \otimes [P_1 + \cdots + P_m - (g_1 + \cdots + g_n)]$ が関係する事情を最初の命題に対して簡単に説明する. M上の2次微分の層に値をもつ1-余鎖 $\sigma = (\sigma_{ij})$ であって, 被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ に対し,

$$\sigma_{ij} := \begin{cases} \pm \dfrac{(dy_k)^2}{(y_k - \lambda_k)^2} & \begin{pmatrix} i = m+k \neq j \text{ のとき} \\ i \neq m+k = j \text{ のとき} \end{pmatrix} \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \text{in } U_i \cap U_j$$

によって定義されるものを考える. $\sigma \in Z^1(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r})))$ と見なすと, $H^1(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) = 0$ であるから, コホモロジー σ は解消できる. $\xi(\mathbb{r})$ は, $P_1, \cdots P_m$ で高々1位の極をもち, $g_1, \cdots, g_n$ で零点をもつような有理型2次微分の層に対応するから, σ のコホモロジーを解消すると命題の(i)(ii)の条件がえられる.

さて,上の命題を用いると, $(\mathbb{r}, \nu) \in U \times \mathbb{C}^n$ に対してSL-作用素が構成できる. すなわち,

<u>定理</u> $\mathbb{r}^0 \in X(m)$ を任意の点, U を十分小さい $\mathbb{r}^0$ の近傍とする. $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ を任意に与えたとき, 次の条件を満足する $Q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X(m)}(F))$ が一意的に存在する: $\mathbb{r} \in U$ に対して,

$$Q(\mathbb{r}) \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K^2 \otimes \eta(\mathbb{r}))) \subset \Gamma(M, \mathcal{M}(K^2))$$

と見なすとき,

(i) $Q(\mathbb{r}) = \left\{ \dfrac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + O\left(\dfrac{1}{x_j - t_j}\right) \right\} (dx_j)^2$ in U_j $(j=1,\cdots,m)$,

(ii) $Q(\mathbb{r}) = \left\{ \dfrac{3}{4(y_k - \lambda_k)^2} - \dfrac{\nu_k}{y_k - \lambda_k} + \nu_k^2 + O(y_k - \lambda_k) \right\} (dy_k)^2$ in V_k $(k=1,\cdots,n)$

が成りたつ. このような Q は, 予備的な局所切断 $\varphi_k^{(a)}$, ψ を用いて,

次のように与えられる:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{3}{4}\varphi_k^{(2)} - \nu_k \varphi_k^{(1)} + \nu_k^2 \varphi_k^{(0)} \right\} + \psi.$$

<u>系</u> $\mathbb{r}^0 \in X(m)$ を任意の点とし, U を上の定理における $\mathbb{r}^0$ の近傍とする. $\mathbb{E}(m;\theta)$ は $m+2n = m+2(m+3g-3)$ 次元複素多様体であって, $\mathbb{E}(m;\theta)|U := \pi^{-1}(U)$ における $\mathbb{E}(m;\theta)$ の局所座標として,次がとれる.

$$(t_1, \cdots, t_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \nu_1, \cdots, \nu_n).$$

<u>注意</u> 上の系で述べた $\mathbb{E}(m;\theta)|U$ における局所座標 $(t, \lambda, \nu) = (t_1, \cdots, t_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ は, U とともに, M 上の座標被覆 $\mathcal{U}$ のとり方に依存して決まったことに注意する. そこで別の座標被覆 $\mathcal{U}'$ をとったとき, U 及び (t, λ, ν) に対応するものが U' 及び (t', λ', ν') であるとする. もし $U \cap U' \neq \phi$ の時に, (t, λ, ν) と (t', λ', ν') の間には,どのような関係があるか? 実は $U \cap U'$ 上では,

ν' は (t, λ) の正則関数を係数とする ν のアフィン変換

となっている. 従って, $\pi: \mathbb{E}(m;\theta) \to X(m)$ は階数 n の正則アフィン束の構造を持つのである.

§7. $\mathbb{E}(m;\theta)$ 上の基本2次形式.

§6から引き続き, $\mathbb{r}^0 \in X(m)$ を任意の点, $\mathcal{U} = \{(U_j, x_j)\}$ を M の $\mathbb{r}^0$-座標被覆とし, U を $\mathcal{U}$ によって定まる $\mathbb{r}^0$ の(十分小さい)近傍, $(t, \lambda, \nu) = (t_1, \cdots, t_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ を $\mathcal{U}$ によって定まる $\mathbb{E}(m;\theta)|U$ の座標とする. このとき $Q \in \mathbb{E}(m;\theta)|U$ は, $U_j \times U \subset M \times X(m)$ で次の表示をもつ:

$$Q = \left\{ \frac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + \frac{H_j}{x_j - t_j} + O(1) \right\} (dx_j)^2 \quad \text{in } U_j \times U \ (j = 1, \cdots, m).$$

但し $H_j = H_j(Q)$ は適当な $\mathbb{E}(m;\theta)|U$ 上の正則関数である. H_j も $\mathcal{U}$ のとり方に依存して定まることに注意する.

そこで d を $\mathbb{E}(m;\theta)$ 上の外微分として, $\mathbb{E}(m;\theta)|U$ 上の閉2次形式を

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} d\lambda_k \wedge d\nu_k + \sum_{j=1}^{m} dH_j \wedge dt_j$$

によって定める. Ω は, $\mathcal{U}$ のとり方によって定まる, $\mathbb{E}(m.\theta)|U$ 上の局所的な対象のように一見みえる. しかし, 実はそうではない: $\mathcal{U}$ のかわりに $\mathcal{U}'$ をとったとき, U, (t,λ,ν) に対応するものを U', (t',λ',ν') と表わすと, Ω と同様に $\mathbb{E}(m;\theta)|U'$ 上の閉2次形式 Ω' が定義される. そして, $U\cap U'\neq\phi$ とすると, 実は次が成りたつ:

$$\Omega=\Omega' \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(m;\theta)|(U\cap U').$$

すなわち次の定理が成りたつ.

<u>定理</u> Ω は $\mathbb{E}(m;\theta)$ 上の大域的な閉2次形式である.

<u>定義</u> Ω を $\mathbb{E}(m;\theta)$ 上の基本2次形式と呼ぶ.

§8. モノドロミー保存変形.

16ページで与えた図式 (D.G.6) をここで思い出そう. 但し, ここでは irreducible という条件を付加する (see (D.G.7)). PM が局所双正則写像であったことを思い出す (§5の系).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}(m;\theta)_{irr} \arrow[r, "PM"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] & R(m;\theta)_{irr} \arrow[ddl] \\
X(m) \arrow[dr, "p"'] & & \\
 & B(m) &
\end{tikzcd} \qquad \text{(D.G.7)}$$

$R(m;\theta)_{irr}\to B(m)$ が局所系であったので, その水平接分布は, $R(m;\theta)_{irr}$ 上に foliation を定める. それを PM で引き戻して得られる $\mathbb{E}(m;\theta)_{irr}$ 上の foliation を, モノドロミー保存変形が定める foliation という. 図式 (D.G.7) より, これは明らかに $\varpi:\mathbb{E}(m;\theta)_{irr}\to B(m)$ の各ファイバーに横断的である. 更に次の事実が成りたつ:

<u>定理</u> モノドロミー保存変形が定める $\mathbb{E}(m;\theta)_{irr}$ 上の foliation は基本2次形式 Ω を不変に保つ.

証明を実行するためには, モノドロミー保存変形の定める foliation が定義する $\mathbb{E}(m;\theta)_{irr}$ 上の接分布, すなわち無限小モノドロミー保存変形を記述する変形方程式を導出することを行なう. 定理の証明は無限小のレベルで行うのが易しい. 我々の立場では, 積分多様体の存在がアプリオリに分っているから, 変形方程式の積分可能性を論じる必要はない.

References

[1] Goldman, W.M., The symplectic nature of fundamental groups of surfaces, Adv. in Math. **54**, (1984), 200-225.

[2] Grauert, H., Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulraume komplexen Strukturen, I.H.E.S., Publ. Math. **5**, (1960), 1-64.

[3] Gunning, R., Lecture on Riemann surfaces, Princeton Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1966.

[4] Kodaira, K. and D.C. Spencer, On deformation of complex analytic structures I-II, Ann. of Math. **67**, No. 2, (1958), 328-401, No. 3, (1958), 403-466.

[5] Okamoto, K., Isomonodromic deformation and Painleve equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., **33**, (1986), 575-618.

[6] Okamoto, K., Elliptic Garnier system, preprint, (1987), Univ. of Tokyo.

[7] Otsuki, M., On the number of apparent singularities of a linear differential equations, Tokyo J. Math., **5**, No. 1, (1982), 23-29.

Katsunori IWASAKI

Department of Mathematics,
Faculty of Science,
University of Tokyo,
7-3-1, Hongo, Tokyo, 113.