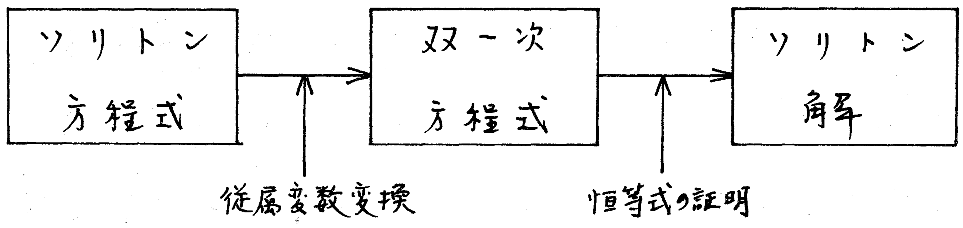
数理解析研究所講究録
684巻 1989年 71-82

代数ソリトン解の直接証明

山口大学教養部物理　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 序論

ソリトン方程式の厳密解法のひとつとして知られている双一次変換法（広田の方法）は、N-ソリトン解を構成する上で特に有効である。この方法はソリトン方程式を従属変数変換により双一次方程式に変換し、後者を議論の出発点とするものである（下図参照）。



ソリトン解は純代数的に構成できるが、その際多項式から成る恒等式を数学的帰納法で証明する必要がある。

さて、ソリトン解の多くは行列式によって書かれることはよく知られているが、最近Wronsky行列式による解の表示を用い、解の証明をPlückerの関係式やJacobiの恒等式などの行列式に関する恒等式に帰着する試みがなされている：

Satsuma (1979) : KdV eq., MKdV eq.

Freeman and Nimmo (1983): KdV eq., KP eq., Boussinesq eq.

Nimmo (1983): Toda eq.

Freeman (1984): Nonlinear Schrödinger eq.

. Davey-Stewartson eq.

Hirota (1986): Classical Boussinesq eq.

Hirota and Nakamura: (1987) Toda molecule eq.

この直接証明法により方程式や解の構造がより深く理解されるようになってきた。さて、ソリトン解の中には代数関数で表わされる解が知られている。Benjamin-Ono (BO) 方程式や、Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式の代数解はその典型的な例であるが、これらの解のWronsky行列式による表示はまだ知られておらず、上記の解の直接証明法はそのままの形では適用できない。しかしながら解が行列式で書けることから推察して、解は何らかの行列式に関する恒等式を満たすことが予想される。ここではBO方程式とKP方程式の代数解についてこの予想が実際正しく、解はJacobiの恒等式を満たすことを示す。ソリトン方程式にはPfaffianで表わされる行列式とは全く異なる解をもつものもあることが知られているが、最近著者が提案した深い水の中の波動を記述するモデル方程式の代数的N-ソリトン解がPfaffianによって書かれることを最後に示す。

2. BO方程式

ここではBO方程式の代数的N-ソリトン解が、行列式に関するJacobiの恒等式を満たすことを証明する。 詳細は文献1)を参照のこと。

BO方程式は次の形に書かれる:

$$u_t + 4uu_x + Hu_{xx} = 0, \quad u = u(x,t) \qquad (2.1a)$$

ここで演算子HはHilbert変換で

$$Hu(x,t) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y,t)}{y-x}\,dy \qquad (2.1b)$$

で定義される。 (2.1)に従属変数変換

$$u = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln(f^*/f), \quad f \propto \prod_{j=1}^{N}\{x - x_j(t)\}, \quad \mathrm{Im}\, x_j(t) > 0 \qquad (2.2)$$

を行うと、次の双一次方程式に帰着できる。

$$i(f_t^* f - f_t f^*) = f_{xx}^* f - 2f_x^* f_x + f_{xx} f^* \qquad (2.3)$$

(2.3)のN-ソリトン解は

$$f = \det M \qquad (2.4a)$$

$$M = (m_{jk}) = \begin{cases} i\theta_j + 1, & (j = k) \\ \dfrac{2a_j}{a_j - a_k}, & (j \neq k) \end{cases} \qquad (2.4b)$$

$$\theta_j = a_j(x - a_j t - x_{0j}) \qquad (2.4c)$$

と書かれる。 ここで a_j は、条件 $a_j > 0$, $a_j \neq a_k$ $(j \neq k)$ を満たす各ソリトンの振幅を表わす定数である。

解の直接証明に入る前に次の記号を導入する。 これらは次章のKP方程式の場合にも用いる:

$$f(j_1,\cdots,j_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n \det M}{\partial\theta_{j_1}\cdots\partial\theta_{j_n}} \tag{2.5}$$

$$\Delta_{jk} = \frac{\partial \det M}{\partial m_{jk}}, \quad (: \text{Cofactor of } m_{jk}) \tag{2.6}$$

$$\Delta_{jk}(j_1,\cdots,j_n) = \frac{\partial}{\partial m_{jk}} f(j_1,\cdots,j_n), \quad (j,k \neq j_1,\cdots,j_n) \tag{2.7}$$

$$I_{m,n} = \begin{vmatrix} & & a_1^m \\ & M & \vdots \\ & & a_N^m \\ -a_1^n, & \cdots, -a_N^n & 0 \end{vmatrix}, \quad (m,n = 0,1,\cdots) \tag{2.8}$$

上記定義の下で次の行列式に関する恒等式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} & & x_1 \\ & M & \vdots \\ & & x_N \\ y_1, & \cdots, y_N & z \end{vmatrix} = |M|\, z - \sum_{j,k} \Delta_{jk}\, x_j\, y_k \tag{2.9}$$

$$\Delta_{jk} = -f(j,k)\frac{2a_k}{a_k - a_j} - 4\sum_{\substack{m,n \\ (m,n\neq j,k)}} \Delta_{mn}(j,k)\frac{a_m a_k}{(a_m - a_j)(a_n - a_k)} \tag{2.10}$$

$$I_{1,0} = \sum_j f(j)\, a_j = \sum_j \Delta_{jj}\, a_j \tag{2.11}$$

$$I_{1,1} = \sum_j f(j)\, a_j^2 - \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j a_k \tag{2.12}$$

ここで $\sum_{j,k}'$ は $j\neq k$ という条件の下での j,k に関する和を表わす。また、行列式の性質を使うと次の恒等式も得られる。

$$\begin{vmatrix} & & a_1 \\ & M & \vdots \\ & & a_N \\ -1, & \cdots, -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & a_1 \\ & \hat{M} & \vdots \\ & & a_N \\ -1, & \cdots, -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.13a}$$

$$\hat{M} = (\hat{m}_{jk}) = \begin{cases} i\theta_j\,, & (j = k) \\ \dfrac{a_j + a_k}{a_j - a_k}\,, & (j \neq k) \end{cases} \tag{2.13b}$$

$$|M| = |\hat{M}| + \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & \hat{M} & & \vdots \\ & & & 1 \\ -1, & \cdots, & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{vmatrix} & M & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_N \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \hat{M} & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_N \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & a_1 & 1 \\ & \hat{M} & & \vdots & \vdots \\ & & & a_N & 1 \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 & 0 \\ -1, & \cdots, & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

$$|M|^* = |M^*| = (-1)^N \left\{ |\hat{M}| - \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & \hat{M} & & \vdots \\ & & & 1 \\ -1, & \cdots, & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} \tag{2.16}$$

$$\begin{vmatrix} & M & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_N \\ -1, & \cdots, & -1 & 0 \end{vmatrix}^* = (-1)^{N+1} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & \hat{M} & & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

$$\begin{vmatrix} & M & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_N \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 \end{vmatrix}^* = (-1)^N \left\{ - \begin{vmatrix} & \hat{M} & & a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_N \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & a_1 & 1 \\ & \hat{M} & & \vdots & \vdots \\ & & & a_N & 1 \\ -a_1, & \cdots, & -a_N & 0 & 0 \\ -1, & \cdots, & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} \tag{2.18}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial t} = -\sum_j a_j^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}$ に注意するとBO方程式（2.1）は

$$\mathrm{Re}\left[\left\{ \sum_j f(j) a_j^2 - \sum_{j,k}{}' f(j,k) a_j a_k \right\} f^* \right] = \left(\sum_j \Delta_{jj} a_j \right) \left(\sum_k \Delta_{kk} a_k \right)^* \tag{2.19}$$

と書きかえられる。 この式に（2.11）から（2.18）までの式

を代入すると

$$\begin{vmatrix} \hat{M} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{M} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \hat{M} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{M} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix} = |\hat{M}| \begin{vmatrix} \hat{M} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 & 0 \\ -1,\cdots,-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2.20)$$

となる。上式はJacobiの恒等式に他ならない。

Note 1　(2.20)は恒等式

$$\left|\begin{array}{c:c:cccc} \hat{M} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1,\cdots,-1 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \hat{M} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ & -a_1,\cdots,-a_N & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -1,\cdots,-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = 0 \qquad (2.21)$$

を最初のN+2行に関してLaplace展開すると得られる。

Note 2　First higher-order BO 方程式の双一次形式、およびそれのN-ソリトン解は次の形に書かれる。

$$iD_t f^*\cdot f = \frac{i}{4} D_x^3 f^*\cdot f - \frac{3}{4} D_\tau D_x f^*\cdot f \qquad (2.22a)$$

$$iD_\tau f^*\cdot f = D_x^2 f^*\cdot f \qquad (2.22b)$$

$$f = \det \tilde{M} \qquad (2.23a)$$

$$\tilde{M} = (\tilde{m}_{jk}) = \begin{cases} i\tilde{\theta}_j + 1, & (j = k) \\ \dfrac{2a_j}{a_j - a_k}, & (j \neq k) \end{cases} \qquad (2.23b)$$

$$\hat{\theta}_j = a_j\left(x - \frac{3}{4}a_j^2 t - a_j\tau - x_{0j}\right) \tag{2.23c}$$

ここでτは補助変数である。BO方程式(2.3)に対して行ったのと同様の議論により(2.22)は次のJacobiの恒等式に帰着できる。

$$|\hat{M}|\begin{vmatrix} & & a_1^2 & 1 \\ & \hat{M} & \vdots & \vdots \\ & & a_N^2 & 1 \\ -a_1,\cdots,-a_N & & 0 & 0 \\ -1,\cdots,-1 & & 0 & 0 \end{vmatrix} + \text{Complex conjugate}$$

$$= \begin{vmatrix} & a_1^2 \\ \hat{M} & \vdots \\ & a_N^2 \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} & 1 \\ \hat{M} & \vdots \\ & 1 \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & 1 \\ \hat{M} & \vdots \\ & 1 \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} & a_1^2 \\ \hat{M} & \vdots \\ & a_N^2 \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \text{Complex conjugate} \tag{2.24a}$$

ここで

$$\hat{M} = (\hat{m}_{jk}) = \begin{cases} i\theta_j, & (j = k) \\ \dfrac{a_j + a_k}{a_j - a_k}, & (j \neq k) \end{cases} \tag{2.24b}$$

3. KP方程式

ここではKP方程式の代数的N-ソリトン解について、第2章と同様の直接証明を行う。詳細は文献[2]を参照のこと。

KP方程式

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\alpha^2 u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y, t) \tag{3.1}$$

は従属変数変換

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f \tag{3.2}$$

により次の双一次方程式に還元できる：

$$(f_{xt} + f_{xxxx} + 3\alpha^2 f_{yy})f - f_x f_t - 4f_{xxx}f_x$$
$$+ 3f_{xx}^2 - 3\alpha^2 f_y^2 = 0 \tag{3.3}$$

(3.3) の代数的 N-ソリトン解は以下のように表わせる。

$$f = \det M \tag{3.4a}$$

$$M = (m_{jk}) = \begin{cases} \theta_j, & (j = k) \\ \dfrac{2a_j}{a_j - a_k}, & (j \neq k) \end{cases} \tag{3.4b}$$

$$\theta_j = a_j(x + \alpha^{-1}a_j y - 3a_j^2 t - x_{0j}) \tag{3.4c}$$

ここで a_j は条件、$a_j \neq a_k\ (j \neq k)$ を満たす任意の複素定数である。

(2.9), (2.10) および (3.4b) を用いると以下の恒等式が容易に証明できる。

$$I_{1,0} = \sum_j f(j)\, a_j \tag{3.5}$$

$$I_{1,1} = \sum_j f(j)\, a_j^2 - \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j a_k \tag{3.6}$$

$$I_{1,2} = \sum_j f(j)\, a_j^3 - 2\sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^2 a_k$$
$$+ \frac{2}{3}\sum_{j,k,m}{}' f(j,k,m)\, a_j a_k a_m \tag{3.7}$$

$$I_{2,0} = \sum_j f(j)\, a_j^2 + \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j a_k \tag{3.8}$$

$$I_{2,1} = \sum_j f(j)\, a_j^3 - \frac{4}{3}\sum_{j,k,m}{}' f(j,k,m)\, a_j a_k a_m \tag{3.9}$$

$$I_{3,0} = \sum_j f(j)\, a_j^3 + 2\sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^2 a_k$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{j,k,m}{}' f(j,k,m)\, a_j a_k a_m \tag{3.10}$$

$$J \equiv \begin{vmatrix} & & a_1^2 & 1 \\ & M & \vdots & \vdots \\ & & a_N^2 & 1 \\ -a_1,\cdots,-a_N & & 0 & 0 \\ -1,\cdots,-1 & & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^3 a_k - \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^2 a_k^2 - \frac{1}{3}\sum_{j,k,m,n}{}' f(j,k,m,n)\, a_j a_k a_m a_n \tag{3.11}$$

τ の x、および t に関する微分は、上記 (3.5)−(3.10) により

$$\tau_x = \sum_j a_j \frac{\partial \tau}{\partial \theta_j} = \sum_j a_j f(j) = I_{1,0} \tag{3.12}$$

$$\tau_{xx} = \frac{1}{2}(I_{2,0} - I_{1,1}) \tag{3.13}$$

$$\tau_{xxx} = \frac{1}{4}(I_{3,0} - 2I_{2,1} + I_{1,2}) \tag{3.14}$$

$$\tau_t = -(I_{3,0} + I_{2,1} + I_{1,2}) \tag{3.15}$$

$$\tau_y = (2\alpha)^{-1}(I_{2,0} + I_{1,1}) \tag{3.16}$$

となる。　従って

$$\begin{aligned} & -\tau_x\tau_t - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}^2 - 3\alpha^2\tau_{yy} \\ &= -(\tau_t + 4\tau_{xxx})\tau_x + 3(\tau_{xx} + \alpha\tau_y)(\tau_{xx} - \alpha\tau_y) \\ &= 3(I_{2,1}I_{1,0} - I_{2,0}I_{1,1}) \\ &= 3J|M| \end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで (3.17) の最後の行に移るときに次の Jacobi の恒等式を用いた。

$$\begin{vmatrix} M & \begin{matrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_N^2 \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M & \begin{matrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_N^2 \end{matrix} \\ -1,\cdots,-1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 \end{vmatrix} = |M| \begin{vmatrix} M & \begin{matrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_N^2 \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \\ -a_1,\cdots,-a_N & 0 & 0 \\ -1,\cdots,-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

(3.17)、および関係式

$$f_{xxxx} = \sum_{j,k,m,n}{}' f(j,k,m,n)\, a_j a_k a_m a_n \tag{3.19}$$

$$f_{tx} = -3 \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^3 a_k \tag{3.20}$$

$$f_{yy} = \alpha^{-2} \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^2 a_k^2 \tag{3.21}$$

を(3.3)へ代入すると

$$\Big[-3 \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^3 a_k + \sum_{j,k,m,n}{}' f(j,k,m,n)\, a_j a_k a_m a_n + 3 \sum_{j,k}{}' f(j,k)\, a_j^2 a_k^2 + 3J \Big] |M| = 0 \tag{3.22}$$

となる。 上式は(3.11)により恒等的に成り立つ。

4. 水の波のモデル方程式

最近提案された深い水の中での波動を記述するモデル方程式の双一次形式は次のようになる。[3,4]

$$(iD_t + iD_x + D_t D_x)\, f^* \cdot f = 0 \tag{4.1}$$

(4.1)の代数的N-ソリトン解は以下のように表わされる：

$$f_N = \prod_{j=1}^{N} \xi_j + \sum_{n=1}^{[\frac{N}{2}]} \sum_{j_1,\cdots,j_{2n}}^{(N)}{}' B_{j_1 j_2} \cdots B_{j_{2n-1} j_{2n}} \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq j_1,\cdots,j_{2n})}}^{N} \xi_k \tag{4.2a}$$

$$\xi_j = i\theta_j + 1 = i a_j \left(x - \frac{1}{1-a_j} t - x_{0j} \right) + 1 \tag{4.2b}$$

$$B_{jk} = \frac{2(2-a_j-a_k)\, a_j a_k}{(a_j - a_k)^2}, \quad (j \neq k,\ j,k = 1,2,\ldots,N) \tag{4.2c}$$

ここで $a_j\ (j=1,2,\cdots,N)$ は条件 $0<a_j<1$, $a_j \neq a_k\ (j \neq k)$ を満たす定数、そして記号 $\sum_{j_1,\cdots,j_{2n}}^{(N)}{}'$ は、条件 $j_1<j_2, \cdots, j_{2n-1}<j_{2n}$,

$j_1 < j_3 < \cdots < j_{2n-1}$ の下で $1, 2, \cdots, N$ から取られた $j_1, j_2, \cdots, j_{2n}$ についてのすべての組み合せにわたる和を表わす。具体的には

$$f_1 = \xi_1 + 1 \tag{4.3a}$$

$$f_2 = \xi_1\xi_2 + B_{12} \tag{4.3b}$$

$$f_3 = \xi_1\xi_2\xi_3 + B_{23}\xi_1 + B_{13}\xi_2 + B_{12}\xi_3 \tag{4.3c}$$

等である。(4.2) は次のように Pfaffian を用いて書くことができる。[5]

$$f_N = \varepsilon_N \operatorname{Pf} F_{2N} \tag{4.4}$$

ここで $\varepsilon_N = (-1)^{N(N-1)/2}$ である。また、F_{2N} は次の $2N \times 2N$ の反対称行列である。

$$F_{2N} = \left|\begin{array}{c:c} -A_N & \Xi_N \\ \hdashline -\Xi_N & B_N \end{array}\right| \tag{4.5a}$$

$$A_N = (a_{jk}) = \frac{2 - a_j - a_k}{a_j - a_k}(1 - \delta_{j,k}) \tag{4.5b}$$

$$B_N = (b_{jk}) = \frac{2a_j a_k}{a_j - a_k}(1 - \delta_{j,k}) \tag{4.5c}$$

$$\Xi_N = (\xi_{jk}) = \xi_j \delta_{j,k} \tag{4.5d}$$

また、(4.4) で表わされた f_N が Pfaffian に関するある二次の恒等式を満たすことも最近証明された。[5] 従って方程式(4.1)

は、従来の行列式表示を解としてもつソリトン方程式とは全く異なる構造をもつと言える。

参考文献

1) Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Japan 57 (1988) 1924
2) Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Japan 58 (1989) No1
3) Y. Matsuno, J. Math. Phys. 20 (1988) 49
4) Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Japan 57 (1988) 1577
5) Y. Matsuno, to be published.