数理解析研究所講究録
685巻 1989年 90-103

スピングラス問題における積分方程式と代数方程式

東京電機大学　桂 重俊　佐々木光弘
(Shigetoshi Katsura, Mitsuhiro Sasaki)

§ Cayley tree (Bethe格子)上のランダムイジングモデルを考える(図1)
格子点iのスピンσの熱力学的平均値はzを最近接格子点の数とすると

$$\langle\sigma_i\rangle = \mathrm{th}\left[\beta H_i + \sum_{j=1}^{z} \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\beta J_{ij}\,\mathrm{th}\beta H_j^{(2)})\right] \qquad (1)$$

で与えられる. H_iは外場, $H_j^{(2)}$は$H_{j-ij}^{(2)}$と書くべき量でijボンドのjに働らくi以外の外から働らく有効場である. $H_j^{(2)}$を定める式は

$$H_{j-ij}^{(2)} = \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{z-1} \mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\beta J_{jk}\,\mathrm{th}\beta H_{k-jk}^{(2)}) \qquad (2)$$

である.[1] (1)(2)の$\sum$の中の1項

$$\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}\beta J_{jk}\,\mathrm{th}\beta H_{k-jk}^{(2)}) = h_{jk} \qquad (2')$$

はsingle bond jkにおいてkからjに働らく有効場でこれをh_{jk}と記す.

$$H_{j-ij}^{(2)} = \sum_{k\neq i}{}' h_{jk} + H_j \qquad (3)$$

である.
ランダム系ではJの分布が与えられる. 例えば ±Jモデルでは

$$P(J) = p\,\delta(J-J_0) + (1-p)\,\delta(J+J_0) \qquad (4)$$

或はGaussianモデル

$$P(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta_J}\exp\left[-\frac{(J-J_0)^2}{2\Delta_J^2}\right] \qquad (5)$$

等. 以下 ±Jモデルの場合を考える. (1)は

$$H_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{z} h_{ij} + H_i \qquad (6)$$

$$\langle\sigma_i\rangle = \mathrm{th}\,\beta H_i^{(1)} \qquad (7)$$

のように書ける.

ここではランダム系として J_{ij} がランダムに与えられたボンドランダム系を考える. ランダム系では J の分布のため, h, $H^{(2)}$, $H^{(1)}$ に分布を生ずる. その分布関数を $g(h)$, $G_T^{(1)}(H^{(1)})$, $G_T^{(2)}(H^{(2)})$ とする.

(3) および (6) により外場 $H_i=0$ の場合を考えると

$$G_T^{(2)}(H_i^{(2)}) = \int \delta\Big(H_i^{(2)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{z-1} h_k\Big) \prod_{k=1}^{z-1} g(h_k)\, dh_k \tag{8}$$

$$G_T^{(1)}(H^{(1)}) = \int \delta\Big(H^{(1)} - \sum_{k=1}^{z} h_k\Big) \prod_{k=1}^{z} g(h_k)\, dh_k \tag{9}$$

の関係がある. (8)(9) より $g(h)$ の Fourier 変換 $S(k)$ が分れば $G_T^{(2)}(H^{(2)})$, $G_T^{(1)}(H^{(1)})$ は $[S(k)]^{z-1}$, $[S(k)]^{z}$ の逆Fourier変換で与えられることが分る.

(2') と (3) より

$$g(h) = \int \delta\Big(h - \frac{1}{\beta}\tanh^{-1}(\tanh\beta J \tanh\beta H^{(2)})\Big) G_T^{(2)}(H^{(2)})\, dH^{(2)}\, P(J)\, dJ \tag{10}$$

$$g(h) = \int \delta\Big(h - \frac{1}{\beta}\tanh^{-1}(\tanh\beta J \tanh\beta \sum^{z}{}' h_k)\Big) \prod g_k(h_k)\, dh_k\, P(J)\, dJ \tag{11}$$

となる. これが $g(h)$ のみたすべき積分方程式である. $g(h)$ が h の偶関数の場合 $P(J)$ についての積分は除いても差支ない*ので以下その場合を考える.

§ $T\to 0$ で

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta}\tanh^{-1}(\tanh\beta J \tanh\beta H) = \mathrm{sgn}(J)\,\mathrm{sgn}(H)\min(|J|, |H|) \tag{12}$$

が成立つことに注意する. (以下 $T\to 0$ の場合を考える.) また $J_0=1$ とする.

(10)(11) より

$$g(h) = \int \delta\big(h - \mathrm{sgn}(H^{(2)})\min(|H^{(2)}|, 1)\big)\, \delta\big(H^{(2)} - \textstyle\sum' h_k\big)\, dH^{(2)}$$

$$\times \prod g(h_k)\, dh_k \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dH^{(2)} dy\, e^{iyH^{(2)}}\, \delta\big(h - \mathrm{sgn}(H^{(2)})\min(|H^{(2)}|, 1)\big)$$

$$\times \prod{}' \int e^{-iyh_k} g(h_k)\, dh_k \tag{14}$$

* (11) と (4) より

$$g(h) = p\int \delta\left(h - \frac{1}{\beta} th^{-1}\left(th\beta J_0\, th\left(\beta \Sigma' h_k\right)\right)\right) \prod g(h_k)\, dh_k$$

$$+(1-p)\int \delta\left(h + \frac{1}{\beta} th^{-1}\left(th\beta J_0\, th\left(\beta \Sigma' h_k\right)\right)\right) \prod g(h_k)\, dh_k \quad (11')$$

第2項で $h_k = -h'_k$ とすれば $g(h)$ が偶関数なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} dh_k\, g(h_k) = -\int_{-\infty}^{\infty} dh'_k\, g(-h'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dh'_k\, g(h'_k)$$

ここで h'_k をあらためて h_k と書けば

$$(11') = \int \delta\left(h - \frac{1}{\beta} th^{-1}\left(th\beta J_0\, th\left(\beta \Sigma' h_k\right)\right)\right) \prod g(h_k)\, dh_k$$

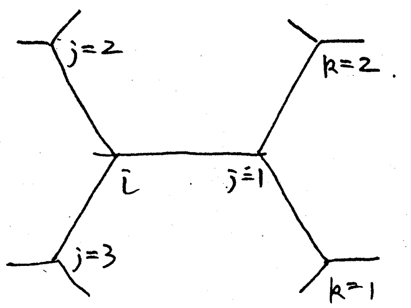

図 1

$$= \frac{1}{2\pi}\int dH^{(2)}\, e^{iyH^{(2)}}\, \delta\left(h - \mathrm{sgn}(H^{(2)}) \min(1,|H^{(2)}|)\right) [S(y)]^{z-1}\, dy \qquad (15)$$

ここに

$$S(x) = \int g(h) e^{-ixh}\, dh. \qquad (16)$$

(16)の左辺に e^{-ixh} をかけて dh で積分すると

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}\int K(x,y)\,[S(y)]^{z-1}\, dy \qquad (17)$$

$$K(x,y) = \int e^{iyH^{(2)}}\, \delta\left(h - \mathrm{sgn}(H^{(2)}) \min(1,|H^{(2)}|)\right) e^{-ixh}\, dH^{(2)}\, dh \qquad (18)$$

$$= \int e^{iyH^{(2)}}\, e^{-ix\,\mathrm{sgn}(H^{(2)}) \min(1,|H^{(2)}|)}\, dH^{(2)} \qquad (18')$$

(18)は非線型積分方程式の標準の形である。

§ ここで

$$S(x) = \sum_{l=-n}^{n} \mu_l\, e^{i\frac{l}{n}x} \qquad (19)$$

すなわち

$$g(h) = \sum_{l=-n}^{n} \mu_l\, \delta\left(h - \frac{l}{n}\right) \qquad (20)$$

とおくと

$$[S(y)]^{z-1} = \left[\sum_{l=-n}^{n} \mu_l\, e^{i\frac{l}{n}y}\right]^{z-1} = \sum a_m\, e^{i\frac{m}{n}y}. \qquad (21)$$

$$G(H^{(2)}) = \sum_{m=-(z-1)n}^{(z-1)n} a_m\, \delta\left(H^{(2)} - \frac{m}{n}\right) \qquad (21')$$

となる.

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{iyH^{(2)}} \sum a_m\, e^{i\frac{m}{n}y}\, e^{-ix\,\mathrm{sgn}(H^{(2)}) \min(1,|H^{(2)}|)}\, dy\, dH^{(2)} \qquad (21'')$$

$\int dy$を行って

$$= \sum a_m \int \delta\left(H^{(2)} - \frac{m}{n}\right) e^{ix\,\mathrm{sgn}(H^{(2)}) \min(1,|H^{(2)}|)}\, dH^{(2)} \qquad (21''')$$

$$= \sum_{-n+1}^{n-1} a_m\, e^{ix\frac{m}{n}} + \left(\sum_{-(z-1)n}^{-n} a_m\right) e^{-ix} + \left(\sum_{n}^{(z-1)z} a_m\right) e^{ix} \qquad (22)$$

(21) より a_m は $\left(\sum_{-n}^{n}\mu_\ell \xi^\ell\right)^{z-1}$ の ξ^m の係数である。(22)
より

$$\mu_\ell = \sum_{\substack{l_1\ l_2\ \cdots\ l_{z-1} \\ \sum l_i = \ell}} \mu_{l_1}\mu_{l_2}\cdots\mu_{l_{z-1}} \qquad \ell=-n-1,-n-2\cdots n-1 \tag{23}$$

$$\mu_n = \sum_{\ell=n}^{(z-1)n} \sum_{\substack{l_1\ l_2\ \cdots\ l_{z-1} \\ \sum l_i = \ell}} \mu_{l_1}\mu_{l_2}\cdots\mu_{l_{z-1}} \tag{24}$$

$$\mu_{-n} = \sum_{\ell=-(z-1)n}^{n} \sum_{l_1}\sum_{l_2}\cdots\sum_{l_{z-1}} \mu_{l_1}\mu_{l_2}\cdots\mu_{z-1} \tag{24'}$$

という $(2n+1)$ 変数 $(z-1)$ 次の連立代数方程式が得られる。
対称解 $\mu_\ell=\mu_{-\ell}$ の場合 $\ell=0,1,\cdots n-1$ についての (23) と

$$2\sum_{\ell=1}^{n}\mu_\ell + \mu_0 = 1 \tag{25}$$

が $n+1$ 個の変数に対して十分である。
$z=2$ に対する (23)(25) は
$n=1$

$$\begin{aligned} \mu_0+2\mu_1 &= 1 \\ \mu_0^2+2\mu_1^2 &= \mu_0 \end{aligned} \tag{26}$$

$n=2$

$$\begin{aligned} \mu_0+2\mu_1+2\mu_2 &= 1 \\ \mu_0^2+2\mu_1^2+2\mu_2^2 &= \mu_0 \\ \mu_1\mu_2+2\mu_0\mu_1 &= \mu_1 \end{aligned} \tag{27}$$

等となる。
(23), (25) (26)(27) 等はスピングラス代数方程式として知られている式で、n が大きくなるにつれて急激に複雑となる。Gröbner basis の方法を用いると μ_0 についての 2^n 次の整数係数代数方程式 $F(\mu_0)=0$ と 2^n-1 次の多項式 $f_\ell(\mu_0)$ による $\mu_\ell = f_\ell(\mu_0)$ に帰着される。

例えば

$n=1$

$$3\mu_0^2 - 4\mu_0 + 1 = 0$$
$$2\mu_1 + \mu_0 - 1 = 0 \qquad (28)$$

$n=2$

$$21\mu_0^4 - 46\mu_0^3 + 34\mu_0^2 - 10\mu_0 + 1 = 0$$
$$4\mu_1 + 42\mu_0^3 - 71\mu_0^2 + 34\mu_0 - 5 = 0 \qquad (29)$$
$$4\mu_2 - 42\mu_0^3 + 71\mu_0^2 - 32\mu_0 + 3 = 0$$

等.

μ_ℓの方程(23)(25)からその解を求めることは $n=1$, 任意の z に対し

$$\mu_0 = \mu_0^{z-1}\ {}_2F_1\left(\frac{1-z}{2}, 1-\frac{z}{2}; 1; \left(\frac{1-\mu_0}{\mu_0}\right)^2\right) \qquad (30)$$

と得られた, 特に $z=3$ に対しては $\mu_0 = \mu_1 = \mu_{-1} = \frac{1}{3}$. (Katsura et al 1979)

$z=3$ に対し $n=2$ 以上の解の存在は Inawashiro が注意した(1980) $z=3$ に対し $n=1, 2, 3, 4$ を数値計算で Miyamoto が求めた、Gröbner basis による解は Fukuda が理研の SAC2 の subroutine を用いて $n=3$ まで求めた. Gebauer が $n=4$ を Gröbner basis で求めた,[2)3)] この問題の $n=5$ 以上の Gröbner basis を求めることは数式処理研究会のよい例題となって来た.(Moritsugu, 小林[4)])

$z=3$ の $F_n(\mu_\ell)=0$ は μ_0 の 2^n 次式であるが物理的に意味のあるものは確率分布の意味をもつもので, $1 \geq \mu_\ell \geq 0$ をみたすものである. その解の数は

n	1	2	3	4	5
物理的に意味のある解	2	3	3	4	3
物理的に意味のない実数解	0	1	3	8	
複素解	0	0	2	4	
全数	2	4	8	16	
$\omega(n)$	1	2	2	3	2

となっている. 特に物理的に意味のある解の数は n の約数の数さ

$\omega(n)$ とすると $\omega(n)+1$ となって居り, n に対する解は n の約数に対するすべての解を含んでいる. $n=1,2,3,4$ に対する解 $g(h)$ の様子は以前に示したので省略する.[3)8)]

§ 連続分布解[5)]

図2 より $n\to\infty$ の極限での解は $h=-1,0,1$ における δ関数と $-1<h<1$ における連続関数の和で与えられることが予想される. Morita (1984) は $-1<h<1$ を512分割して数値計算でこの連続関数部分を得た. ここでは解析的に解を求める.

(18) より

$$K(x,y)=\int_1^\infty dH^{(2)}\, e^{iyH^{(2)}-ix}+\int_{-\infty}^{-1} dH^{(2)}\, e^{iyH^{(2)}+ix}+\int_0^1 dH^{(2)}\, e^{i(y-x)H^{(2)}}+\int_{-1}^0 dH^{(2)}\, e^{i(y+x)H^{(2)}} \tag{31}$$

$$=2\pi\cos x\,\delta(y)-2\cos x\frac{\sin y}{y}+\frac{\sin(y-x)}{y-x}+\frac{\sin(y+x)}{y+x} \tag{32}$$

$S(x)$ を偶関数に限れば (32) の右辺第4項を除き第3項の係数を2倍にしてよい. 球Bessel関数の加法定理

$$\frac{\sin(y\mp x)}{y\mp x}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n(1+2n)\,j_n(x)\,j_n(y) \tag{32}$$

を用いると

$$K(x,y)=2\pi\cos x\,\delta(y)-2j_0(y)\cos x+2\sum_{n=0}^{\infty}(1+4n)\,j_{2n}(x)\,j_{2n}(y) \tag{33}$$

$S(x)$ を

$$S(x)=a+b\cos x+\sum_{l=0}^{\infty}c_{2l}\,j_{2l}(x) \tag{34}$$

とおき (33)(34) を積分方程式に入れると未定係数の間の代数方程式

$$a=a^2+b^2/2 \tag{35}$$

$$b=2ab+bc_0+b^2/2+c_0^2-\sum_l\sum_m c_{2l}c_{2m}I_{0,2l,2m} \tag{36}$$

$$c_{2n}=2ac_{2n}+2b(1+4n)\sum_l c_{2l}I_{2l,2m}+(1+4n)\sum_l\sum_m c_{2l}c_{2m}I_{2l\,2m\,2n} \tag{37}$$

を得る. なお

$$a+b+c_0=1 \tag{38}$$

が成立つ. ここに

$$I_{2l,2m}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\, j_{2l}(y)\, j_{2m}(y)\cos y$$

$$I_{2l,2m,2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\, j_{2l}(y)\, j_{2m}(y)\, j_{2n}(y) \tag{39}$$

で

$$I_{00}=\frac{1}{2}\quad I_{02}=0\quad I_{22}=\frac{7}{80}\quad I_{000}=\frac{3}{4}\quad I_{002}=\frac{1}{16}\quad I_{022}=\frac{1}{160}\quad I_{222}=\frac{9}{256}$$

等である. $I_{2l,2m}$, $I_{2l,2m,2n}$ は l, m, n の増加と共に急激に小さくなるので (35) を l, m, n を有限で打切ってもよい近似が得られると考えられる. これもまた Gröbner basis のよい例題である. 規格化条件 (36) があるので例えば c_2 まで求めるには (37) は c_0 に対する式のみを用いればよい. b までで打切った場合は前節の $n=1$ の結果を再現す. 表1, 2. に c_0 までで打切った場合および c_2 までで打切った場合の Gröbner basis を示す. c_0 までとったときと c_2 までとったときの結果を比較してこの truncation の収束が非常によいことが分る. c_2 までとったときの $g(h)$ の図も ref. 1(の2), 8 に示してある. 前節の場合は任意の n を与えたとき積分方程式の正確解を与えたが, 本節では c_l を l で打切ったときの解は収束の極めてよい正確解に収束する関数列を与える.

§. 其後の展開.

以上 $z=3$ の場合についてのべた. $z=4, 5, 6$ に対しては非連続解に対して Inawashiro-Katsura 1980 がある. 連続解に対して Sasaki-Katsura 1988 がある.[6]

強磁性 bond の濃度(確率) $P(J)$ を(4)の形に与えたとき, p をかえると $g(h)$ がどう変るかという問題は Sasaki-Katsura[7] がある. このとき (32) は

$$K(x,y)=2\pi\delta(y)\cos x$$

$$-2p\frac{\sin(y-x)}{y}-2(1-p)\frac{\sin(y+x)}{y}$$

$$+2p\frac{\sin(y-x)}{y-x}+2(1-p)\frac{\sin(y+x)}{y+x} \tag{40}$$

となり,

$$S(x)=a+b\cos x-ic\sin x+\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n d_n j_n(x) \tag{41}$$

とおく. これは

$$g(h)=a\delta(h)+\frac{1}{2}\{(b+c)\delta(h-1)+(b-c)\delta(h+1)\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}d_l P_l(h) \qquad (|h|\leqq 1) \tag{42}$$

とおくことと等価である. (41), (40) を (17) に入れると $a, b, c, d_0, d_1, d_2, d_3$ までの代数方程式は 表3 のようになる. 解は

1) $a=1,\quad b=c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$

2) $a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{2}{3},\quad c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$

3) $a=\frac{1}{2p-1}\quad b=2-\frac{1}{2p-1}\quad c=[(8p-7)(4p-3)]^{1/2}/(2p-1)$

4) $a=0.10683\quad b=0.43686,\quad d_0=0.45631,\quad d_2=0.05759$
$c=d_1=d_3=0$

5) $a, b, \cdots d_3 \neq 0$ で p の関数である解

に分類される. 今まで得られている 1)−4) の他 5) が得られた.[7]
$g(h)$ の図は別に発表する.[7] どの領域でどの解が物理的に実現されるかについては現在検討中である. また energy の極値と積分方程式の解の関係も近く発表する.

References

1) (1)(2)の導出は

S. Katsura and S. Fujiki, J. Phys C. 12 (1979) 1087

綜合報告として

S. Katsura, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.87 (1986) 139

桂、猪苗代、松原、藤木、日本物理学会誌 42 (1987) 634.

S. Katsura, S. Inawashiro and T. Morita, J. Phys A 21 (1988) 1937.

2). B. Buchberger, in Multidimensional Systems Theory (N.K. Bose ed.) (1985, Reidel, Dordrecht) 184.

W. Boege, R. Gebauer, and H. Kredel, J. Symbolic Computation 1 (1986) 83.

3) S. Katsura, W. Fukuda, S. Inawashiro, N.M. Fujiki and R. Gebauer, Cell Biophys. 11 (1987) 309.

4) S. Moritsugu, On solving a system of algebraic equations by using a Gröbner basis, ISSAC 1988

小林英恒 連立代数方程式の簡単化とその解法、1986.9.26 統数研

5) 1)の Progress の Supplement 参照

6) M. Sasaki and S. Katsura, Physica in press.

7) M. Sasaki and S. Katsura, Physica in press.

8) 桂 理研シンポジウム 1968.2月, 数式処理通信 5 No.4 1988.11月 p.13.

表1. C_0までとったときのGröbner basis
とその解

```
A>reduce33
in "gro2.red";
off time;


off ratpri$


load"groebner"$


f1:=-a+a**2+b**2/2$


f21:=3/4*c0**2+c0*c2/8+c2**2/160$


f2:=-b+2*a*b+b*c0+b**2/2+c0**2-f21$


f3:=-c0+2*a*c0+b*c0+f21$


f4:=-c2+2*a*c2-7/8*b*c2+5/16*c0**2
+c0*c2/16+45/256*c2**2$


f5:=a+b+c0-1$


c2:=0$


end;

2: groebner({f1,f2,f3,f5},{c0,a,b});

                3          2
{C0 + 27/5*B  - 3/2*B  - 7/5*B,

               3          2
 A - 27/5*B  + 3/2*B  + 12/5*B - 1,

  4          3          2
 B  - 4/9*B  - 4/9*B  + 16/81*B}

3: in "grul.red";
solve(third(input(2)),b);


{B=0,B=4/9,B=2/3,B= - 2/3}
multiplicities!*;


{1,1,1,1}
```

```
y1:=first(input(2));

              3          2
Y1 := (54*B   - 15*B   - 14*B + 10*C0)/10
y2:=second(input(2));

                      3          2
Y2 := (10*A - 54*B   + 15*B   + 24*B - 10)/10
                                               b:=0$

 solve(y1,c0);

{C0=0}
solve(y2,a);

{A=1}

clear b$

 b:=4/9$

 solve(y1,c0);

{C0=4/9}
solve(y2,a);

{A=1/9}

clear b$

 b:=2/3$

 solve(y1,c0);

{C0=0}
solve(y2,a);

{A=1/3}

clear b$

 b:=-2/3$

 solve(y1,c0);

{C0=4/3}
solve(y2,a);

{A=1/3}

end;
```

表2. C_2までとったときのGröbner basis

```
6:
groebner({f5,f3,f2,f3,f4},{c2,c0,b,a});
        5353533671491075763213860521904781915673    7
{C2 - ------------------------------------------*A  +
        3726668187184199620691476627849216O

 25176375660832513200472697407840264O323   6
 ---------------------------------------*A  -
     483982881452493457232659302318080

 2765494442770582712255663992420676176139 7   5
 ------------------------------------------*A  +
     372666818718419962069147662784921 60

 196919819002429960827755834681475700 66059   4
 -------------------------------------------*A  -
     372666818718419962069147662784921 60

 13295437010860232988537785467247897 7549   3
 ----------------------------------------*A  +
     677576034033490840125723023245312

 26871688294297638739280580469823085240 1   2
 ----------------------------------------*A  -
     745333637436839924138295325569843 2

 2055118915462714146599186929532923077 9
 ---------------------------------------*A  +
     745333637436839924138295325569843 2

 46976542885071053853046077976119264 5
 --------------------------------------,
     745333637436839924138295325569843 2

        39991984127473224715203475166 31    7
 C0 + --------------------------------*A  -
        14152604843674976809123840 0

 20660683728592762852268114079 51    6
 ------------------------------*A  +
     20218006919535681155891200

 20572229072669593992254164305339   5
 ---------------------------------*A  -
     14152604843674976809123840 0

 14592886780134811513837325525253   4
 ---------------------------------*A  +
     14152604843674976809123840 0

 21628247630758536658450917806 1   3
 --------------------------------*A  -
     5661041937469990723649536

 18193108671107743904303448797   2
 ------------------------------*A  +
   257320088066817760165888 0

 31841119436010015949734686 25
 ------------------------------*A  -
  5661041937469990723649536

 8423298543616972399531697 5
 ----------------------------,
 5661041937469990723649536

      3999198412747322471520347516631   7
 B - ---------------------------------*A  +
      1415260484367497680912384 00

 20660683728592762852268114079 51   6
 --------------------------------*A  -
   20218006919535681155891200

 20572229072669593992254164305339   5
 ---------------------------------*A  +
   14152604843674976809123840 0

 14592886780134811513837325525253   4
 ---------------------------------*A  -
   14152604843674976809123840 0

 21628247630758536658450917806 1   3
 -------------------------------*A  +
   5661041937469990723649536

 18193108671107743904303448797   2
 ------------------------------*A  -
   257320088066817760165888 0

 3178450901663531604249819089
 ----------------------------*A  +
  5661041937469990723649536

 7857194349869973327166743 9
 ---------------------------,
 5661041937469990723649536

 8     2047389435712   7   3399016617044   6
A  -  ---------------*A  + ---------------*A  -
       504997152843          504997152843

 2983827182848   5   1492044824578   4   1275872135360   3
 --------------*A  + --------------*A  - --------------*A
 504997152843         504997152843        1514991458529

    194539581820   2   4499350400      304677025
 + ---------------*A  - ------------*A + ------------}
    1514991458529        504997152843    1514991458529
```

表3 非対称分布の代数方程式

$$a = a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2$$

$$b = \frac{1}{2}b^2 + 2ab + d_0^2 + bd_0 + \frac{1}{2}c^2$$

$$-(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0 d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1 d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2)$$

$$c = (2p-1)\{ 2ac + bc + (cd_0 + \frac{1}{2}bd_1 - \frac{1}{8}bd_3)$$

$$-(\frac{1}{3}d_0 d_1 + \frac{7}{120}d_1 d_2 - \frac{19}{560}d_2 d_3) \}$$

$$d_0 = 2ad_0 + (bd_0 - \frac{1}{2}cd_1 + \frac{1}{8}cd_3)$$

$$+(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0 d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1 d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2)$$

$$d_1 = (2p-1)\{ 2ad_1 + (\frac{3}{2}cd_0 - \frac{1}{2}bd_1 - \frac{3}{8}cd_2 + \frac{3}{8}cd_3)$$

$$+(\frac{5}{8}d_0 d_1 - \frac{5}{16}d_1 d_2 + \frac{13}{128}d_2 d_3 - \frac{1}{16}d_3 d_0) \}$$

$$d_2 = 2ad_2 + (\frac{5}{8}cd_1 - \frac{7}{8}bd_2 + \frac{5}{16}cd_3)$$

$$+(-\frac{5}{16}d_0^2 + \frac{1}{16}d_0 d_2 + \frac{25}{96}d_1^2 - \frac{65}{384}d_1 d_3 - \frac{45}{256}d_2^2 + \frac{45}{512}d_3^2)$$

$$d_3 = (2p-1)\{ 2ad_3 + (-\frac{7}{8}cd_0 + \frac{7}{8}bd_1 - \frac{7}{16}cd_2 - \frac{5}{16}bd_3)$$

$$+(-\frac{7}{48}d_0 d_1 + \frac{91}{384}d_1 d_2 - \frac{63}{256}d_2 d_3 - \frac{19}{128}d_3 d_0) \}$$

$$a + b + d_0 = 1 .$$